Concours blanc 2 - Épreuve 1

Lundi 22 mai 2023 — 8h00-12h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"La motivation vous sert de départ. L'habitude vous fait continuer."
Jim Ryun

Exercice 1

On rappelle que si f désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E, alors $f \circ f$ est également un endomorphisme de E et on note : $f^2 = f \circ f$.

Partie I. Puissances d'une matrice.

1. **Questions préliminaires.**
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{A}^3 - 5\mathrm{A}^2 + 8\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_3 = 0_3$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{I}_3$.
   - 1.a. Démontrer que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} comme une combinaison linéaire de I_3, A et A^2.
   - 1.b. Déterminer les racines du polynôme $\mathrm{X}^3 - 5\mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X} - 4$.
   - 1.c. A l'aide de la question précédente, démontrer que la matrice $\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3$ n'est pas inversible.

On considère à présent la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

2. L'exécution du programme Python qui suit

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[0,1,0],[0,0,1],[4,-8,5]])
A2=al.matrix_power(A,2)
A3=al.matrix_power(A,3)

print(A3-5*A2+8*A)
```

affiche :

```
[[4 0 0]
 [0 4 0]
 [0 0 4]]
```

En déduire un polynôme annulateur de la matrice A.

3. Quel est le rang de f ?
4.
   - 4.a. Soient λ une racine du polynôme $\mathrm{X}^3 - 5\mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X} - 4$ et $u = (1, \lambda, \lambda^2)$. Vérifier que $f(u) = \lambda u$.
   - 4.b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(u) = \lambda u$.
     - 4.b.i. Exprimer $f^2(u)$ en fonction de λ et u.
     - 4.b.ii. En déduire que λ est racine du polynôme $\mathrm{X}^3 - 5\mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X} - 4$.
   - 4.c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déduire des questions précédentes que : $f - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas bijectif si, et seulement si, $\lambda \in \{1; 2\}$.
5. Déterminer le rang de la matrice $\mathrm{A} - \mathrm{I}_3$. Donner alors une base de $\ker(f - \mathrm{id})$ constituée d'un unique vecteur, noté u_1, dont la première composante est égale à 1.
6. Notons $u_2 = (1, 2, 4)$. Vérifier que $u_2 \in \ker(f - 2\mathrm{id})$.
7. Résoudre l'équation $f(v) = 2v + u_2$, d'inconnue $v \in \mathbb{R}^3$, puis en donner une solution, notée u_3, dont la première composante est nulle.
8.
   - 8.a. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   - 8.b. Sans effectuer de calcul matriciel, déterminer, en justifiant, la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3). On notera T la matrice obtenue.
9. Posons maintenant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.
   - 9.a. Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse. *On admet que l'on a alors :* $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.
   - 9.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$.
   - 9.c. Posons $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{T} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n.
   - 9.d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Conclure sur l'expression de A^n.

Partie II. Application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$.

10. Écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n en sortie.
11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$.
12. En utilisant les résultats de la partie I, conclure sur le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

★★★★★★★

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

On considère également la suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **1.a.** Dresser le tableau de variations complet de f.

   1.b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. **2.a.** Écrire une fonction `Python` telle que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de `CB_1(a)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > a$.

   2.b. On admet que l'on a également défini une fonction `Python` tel que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de `CB_2(a)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n < a$.
   Les appels `CB_1(10**6)` et `CB_2(10**(-6))` renvoient respectivement 6 et 5.
   Qu'en déduire sur u_5 et u_6 ? Commenter le résultat en une ligne.

3. On définit maintenant la fonction g sur $[0;+\infty[$ par : $\forall x \in [0;+\infty[$, $g(x) = e^{-x} - x^2$.

   3.a. Démontrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$.

   3.b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0;+\infty[$, que l'on notera α.

   3.c. Justifier : $e^{-1} < \alpha < 1$.

4. **4.a.** Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

   4.b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   4.c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un réel ℓ appartenant à $[0;e^{-1}]$.

5. Pour $x \in]0;+\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

   5.a. Justifier que la fonction h est continue sur $[0;+\infty[$.

   5.b. Déterminer, pour tout $x \in]0;+\infty[$, une expression de $h(x)$ en fonction de $g(x)$.

   5.c. Résoudre alors l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.

   5.d. En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 puis déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Qu'en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

★★★★★★★

Exercice 3

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1 etX_2 les variables aléatoires égales aux durées respectives des opérations des clients C_1 et C_2. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. **1.a.** Rappeler la loi de la variable aléatoire X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

   1.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 \leq n]) = 1 - q^n$. Cette relation est-elle encore valable quand $n = 0$?

2. On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente du client C_3 avant de pouvoir se présenter à un guichet. De cette façon, $T = \min(X_1, X_2)$.

   2.a. Sans utiliser la commande `min`, écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simulT(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire T dans le cas où X_1 et X_2 suivent des lois géométriques de paramètre p.

   2.b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}([T > n])$.

   2.c. En déduire que T suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

3. On définit maintenant la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

   3.a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

   3.b. Soit n un entier naturel non nul. Établir :

   $$\mathbb{P}([\Delta = n]) = 2\frac{pq^n}{1+q}$$

   3.c. Justifier alors que $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$.

   3.d. Montrer que Δ admet une espérance et la calculer.

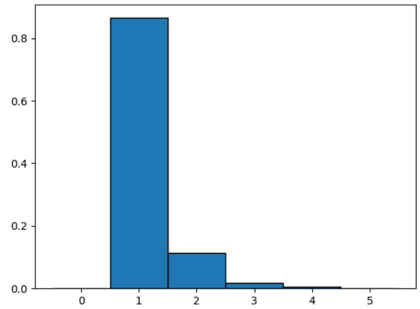
4. Dans cette question, on suppose que $p = \frac{1}{2}$. Ainsi, d'après le résultat de la question 2.c. la variable aléatoire T suit la loi géométrique de paramètre $\frac{3}{4}$. Afin de compenser son attente, le client C_3 se voit proposer une réduction sur son prochain billet de train.
   Si $n \in \mathbb{N}^*$ désigne l'attente subie par C_3 (représentée par la variable aléatoire T), alors celui-ci pioche au hasard un jeton dans une urne composée de n jetons numérotés de 1 à n.
   Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, le tirage du jeton numéro k entraînera une réduction de k euros. On note R la variable aléatoire égale au montant de la réduction obtenue par le client C_3.

4.a. Soient $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_{[T=n]}([R=k])$. *On distinguera les cas $k > n$ et $k \leq n$.*

4.b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([R=k]) = 3\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

4.c. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simulR()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire R.

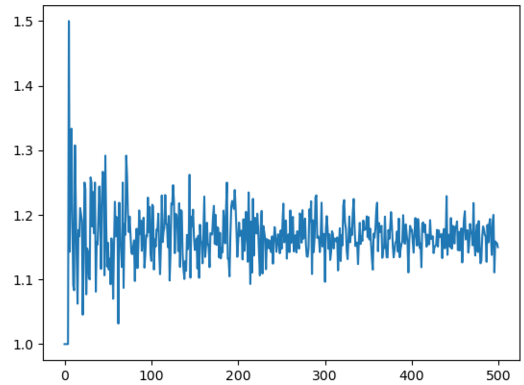
4.d. Écrire un programme `Python` dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous, représentant l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire R.



4.e. On considère la fonction `mystere` écrite en `Python` :

```
def mystere():
    LE=[]
    for n in range(1,501):
        LR=[simulR() for k in range(n)]
        E=sum(LR)/n
        LE.append(E)
    plt.plot(range(500),LE)
    plt.show()
```

L'exécution de `mystere()` affiche le graphique ci-dessous :



Interpréter ce graphique. On veillera en particulier à décrire le contenu de la liste `LE` après l'exécution de `mystere()`.

4.f. **4.f.i.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$.

4.f.ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \ln(4) - \ln(3) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$.

4.f.iii. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx = 0$.

4.f.iv. Établir alors que $\mathbb{P}([R=1]) = 3\big(\ln(4) - \ln(3)\big)$ puis donner la valeur de $\mathbb{P}([R=2])$.

4.f.v. Utiliser les résultats précédents pour donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([R \geq 3])$. *On donne :* $\mathbb{P}([R=1]) \simeq 0,86$.