Les Chartreux

0

Quelques bases à avoir...

Notations, rédaction, raisonnements

Introduction...

Comment commencer l'année autrement que par un petit chapitre sur les bases à avoir en mathématiques. Les bases, les bases... Quelles sont les bases des mathématiques ? Sans doute celles auxquelles on ne s'attend pas forcément. Euclide, au IIIème siècle avant notre ère, écrivait "*Si on coupe un segment au hasard, le carré formé sur le segment entier est égal à ceux formés sur les deux segments du partage ajoutés à deux fois le rectangle construit sur les segments*." Sans doute pas très clair, et pourtant, cette phrase se traduit aujourd'hui simplement par la formule "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$". Les symboles couramment utilisés aujourd'hui sont en effet arrivés bien après les raisonnements ! On trouve par exemple des raisonnements par l'absurde dans les *Éléments* d'Euclide (traité de 13 volumes regroupant l'ensemble du savoir mathématique connu à cette époque, et qui servira de repère aux mathématiciens pendant plus de vingt siècles)... alors que les symboles "$+$" et "$-$" ne firent leur apparition qu'au XVème siècle, et que "$=$" a été introduit par Robert Recorde ($\simeq$1510-1558, mathématicien gallois) en 1557. Quant au symbole "$\in$" : il faudra attendre Giuseppe Peano (1858-1932, italien) et Bertrand Russel (1872-1970, gallois) pour qu'il soit introduit et utilisé sous sa forme actuelle.

Ce langage mathématique a donc progressivement vu le jour, au fil des découvertes et des besoins, preuve que les mathématiques ne se résument pas à des successions de chiffres, lettres et autres symboles. En revanche, cette symbolique, qui a "simplifié" leur écriture, fait désormais partie intégrante des mathématiques. Ce premier chapitre est un rapide inventaire des notations et raisonnements qui ont pu être rencontrés jusqu'à présent, et que nous pourrons utiliser cette année, afin de s'assurer que nous parlons bien le même langage... Il sera aussi l'occasion d'introduire les premiers points importants concernant la rigueur de la rédaction qui, il faut bien l'avouer, n'avait que peu d'importance il y a encore seulement quelques petites centaines d'années...

I Rappels sur les ensembles de nombres...

Un ensemble est une collection d'objets que l'on peut décrire de deux façons différentes :

- **en extension :** cela revient à décrire les éléments qu'il contient : $E = \{1;2;3\}$
- **en compréhension :** cela revient à le définir à partir d'une condition : $E = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2x+5 \geq 1\}$

> **Notation**
> On remarque au passage l'emploi des accolades pour noter un ensemble.

Des notations habituelles qui seront très utilisées (E désigne un ensemble quelconque) :

- L'ensemble vide : $\varnothing$ (qui ne contient aucun élément).
- L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$.
- L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$.
- L'ensemble des réels : $\mathbb{R}$.
- $E \setminus \{x\}$ se lit "E privé de x" : c'est l'ensemble de tous les éléments de E sauf x.
- Si E contient 0, on note : $E^* = E \setminus \{0\}$.
- **Intervalles de réels :** $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$; $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$...
- **Intervalles d'entiers :** $[\![a;b]\!] = \{x \in \mathbb{N} \ / \ a \leq x \leq b\}$; $]\!]a;+\infty[\![= \{x \in \mathbb{N} \ / \ x > a\}$...
- On note : $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$; $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$; $\mathbb{R}^+_* =]0;+\infty[$...

II Notations et vocabulaires mathématiques

II.1 Un peu de vocabulaire...

- Une **définition** permet de nommer des objets ou propriétés mathématiques, ce qui permet d'y faire référence facilement. Elle ne se démontre pas.
- Une **assertion** est un énoncé (une phrase) mathématique pouvant être vrai ou faux.
- Un **prédicat** est une assertion dépendant d'une variable et dont la valeur de vérité dépend de cette variable.
- Un **théorème** est une assertion vraie, qui a donc été démontrée.
- Une **conjecture** est une assertion dont *on pense* qu'elle est vraie, mais qui n'a pas été démontrée (nous ne sommes donc pas certains qu'elle le soit).

> **Vocabulaire**
> On parle de **valeur de vérité** d'une assertion.

> **Petite remarque**
> Un prédicat peut également dépendre de plusieurs variables.

Exemples 1

- **E1** "3 est un entier pair" est une assertion fausse. Sa négation est "3 est un entier impair", elle est vraie.
- **E2** "$11^2 = 121$" est une assertion vraie. Sa négation est "$11^2 \neq 121$", elle est fausse.
- **E3** "$2x+1=0$" est un prédicat. On ne connaît pas sa valeur de vérité sans apporter de précisions sur la variable x.
- **CE4** "5+3" n'est pas une assertion : c'est une expression mathématique.
- **CE5** Si x désigne un nombre réel, "$3x^2$" n'est pas un prédicat : c'est une expression mathématique.

> **Notation**
> Si $\mathcal{P}$ est une assertion mathématique, on note non$\mathcal{P}$ sa **négation**.

Un prédicat n'est pas une assertion : nous ne pouvons pas savoir s'il est vrai ou faux sans précision sur la variable. Par conséquent, **un prédicat ne sera jamais écrit seul : la variable devra être introduite** à l'aide de ce qui suit...

> **En gros...**
> La phrase "Il a remporté Roland-Garros en 2022" est un prédicat : on ne sait pas si la phrase est vraie ou non sans précision sur la variable "il".
> En revanche, la phrase "Rafael Nadal a remporté Roland-Garros en 2022" est une assertion (le "il" a été quantifié, on sait ce qu'il désigne), et elle est vraie.

II.2 Quantificateurs

Notons $\mathcal{P}(x)$ un prédicat mathématique dépendant d'une variable x appartenant à un ensemble E.

Notations

- **N1#** La phrase "pour tout $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$" s'écrit "$\forall x \in E, \ \mathcal{P}(x)$".
- **N2#** La phrase "il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$" s'écrit "$\exists x \in E \ / \ \mathcal{P}(x)$".
- **N3#** La phrase "il existe un unique $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$" s'écrit "$\exists! x \in E \ / \ \mathcal{P}(x)$".

> **★Subtile...★**
> En mathématique, l'expression "il existe un" signifie "il existe au moins un". **Si on veut une unicité, on la mentionne explicitement.**

C'est toute la phrase qui s'écrit soit en langage courant, soit en langage mathématique. Les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas des abréviations...

Définitions 1 - Quantificateurs

- **D1#** $\forall$ est le **quantificateur universel.**
- **D2#** $\exists$ est le **quantificateur existentiel.**

> **Un peu d'histoire**
> $\forall$ est dû à Gerhard Gentzen (1909-1945, allemand) et $\exists$ à Giuseppe Peano (1858-1932, italien).

Un prédicat, une fois quantifié, devient une assertion ; il est alors possible de préciser sa valeur de vérité.

Exemples 2

Dans chaque cas, précisons si l'assertion donnée est vraie ou fausse.

E1 "$\exists ! x \in R \,/\, 2x+1=0$" est une assertion vraie / fausse.

E2 "$\forall x \in [-1;1],\ x^2-1 \leq 0$" est une proposition vraie / fausse.

E3 "$\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2+1=0$" est une proposition vraie / fausse.

E4 "$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N} \,/\, m \geq n$" est une assertion vraie / fausse.

E5 "$\forall x \in \mathbb{R},\ 2x+1=0$" est une assertion vraie / fausse.

Traduisons les assertions mathématiques suivantes en langage courant :

E6 $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=2$ (où f désigne une fonction) :

E7 $\exists n \in \mathbb{N} \,/\, u_n = 0$ (où (u_n) désigne une suite) :

Écrivons les phrases suivantes en langage mathématique :

E8 La fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$:

E9 La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$:

E10 La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$:

E11 La fonction f n'est pas la fonction nulle :

E12 Les fonctions f et g s'annulent simultanément sur $\mathbb{R}$:

> **Petite remarque**
> Les phrases mathématiques données sont bien des assertions : les variables ont toutes été *quantifiées*.

> **Important !**
> • Pour justifier qu'une assertion universelle est vraie, il faut la *démontrer* pour tous les éléments de l'ensemble indiqué !
> • Pour justifier qu'une assertion universelle est fausse, il suffit de
>
> • Pour justifier qu'une assertion existentielle est vraie, il suffit de

> **Vocabulaire**
> Dans une assertion, les éventuelles variables sont **muettes** : la valeur de vérité ne dépend plus des variables. Dans une expression ou une écriture mathématique, on dira également qu'une variable est muette si le résultat ou l'objet ne dépend pas de cette variable.

> **Petite remarque**
> La *négation* de "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$" est :

Exemple 3

L'assertion : "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \,/\, y = x^2$" est vraie / fausse. L'assertion "$\exists y \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ \ y = x^2$" signifie que

> **✘ Attention !**
> Attention à l'ordre des quantificateurs...

II.3 Implication & équivalence

Définitions 2

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux énoncés mathématiques (assertions ou prédicats).

D1# On dit que "**$\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$**" lorsque "si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie".
On note alors "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$".

D2# On dit que "**$\mathcal{P}$ équivaut à $\mathcal{Q}$**" lorsque "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$".
On note alors "$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$".

> **Important !**
> Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des prédicats, alors $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$ sont encore des prédicats : il faut donc les quantifier !

> **✘ Attention !**
> Les symboles $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ ne s'utilisent qu'**entre deux phrases mathématiques**.

Remarques

R 1. Une équivalence est donc une double implication, d'où la notation de flèche dans les deux sens...
R 2. Dans "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$", on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** (CS) de $\mathcal{Q}$.
R 3. Dans "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$", on dit que $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** (CN) de $\mathcal{P}$.
R 4. Ainsi, dans "$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$", on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) de $\mathcal{Q}$.

Exemples 4

E1 Les assertions "il pleut" et "il y a des nuages" ne sont pas équivalentes ; l'assertion "il y a des nuages" n'est donc pas une condition nécessaire et suffisante de l'assertion "il pleut".
En revanche, "il y a des nuages" est une condition nécessaire pour "il pleut", puisqu'il *faut* qu'il y ait des nuages pour qu'il pleuve. On a :

$$(\text{il pleut}) \Longrightarrow (\text{il y a des nuages})$$

Cette phrase est vraie ; sa négation est donc fausse. Sa négation est d'ailleurs :

Dans chaque cas, précisons si l'assertion donnée est vraie ou fausse.

E2 "$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x+6=0 \iff x=-3\right)$" est vraie / fausse.

E3 "$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x=2 \Longrightarrow x^2=4\right)$" est vraie / fausse.

E4 "$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2=4 \Longrightarrow x=2\right)$" est vraie / fausse.

E5 "$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2=4 \iff x=2\right)$" est vraie / fausse.

E6 "$1=2 \iff 0=1$" est vraie / fausse.

À retenir...
La négation de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ est :

Vocabulaire
"$\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$" est l'**implication réciproque** de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$".

✓ Rigueur !
Écrire : "On sait que $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$" ne prouve pas que $\mathcal{Q}$ est vraie, car on ne sait pas si $\mathcal{P}$ l'est !
En revanche, si on prouve que $\mathcal{P}$ est vraie et si $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ (ou $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$), alors $\mathcal{Q}$ sera vraie.

III Comment rédiger ?

III.1 Pourquoi rédiger ?

Et oui... avant de savoir *comment* rédiger, voyons *pourquoi* il est important de rédiger.

Au collège et au lycée, la rédaction a parfois été un peu mise de côté... Et il arrivera également qu'elle soit légèrement écartée de notre objectif par moments cette année. Même si elle paraît parfois superflue, il faut retenir le principe suivant :

Rédiger permet de structurer la pensée.

Il est donc important d'ancrer de bonnes habitudes de rédaction pour que celle-ci prenne le relais d'un éventuel manque d'inspiration dans le cas d'exercices plus théoriques ou plus difficiles ; mais également pour que celle-ci vous permette de repérer des erreurs de raisonnements...
C'était la première (et peut-être la meilleure ?) raison de bien rédiger.

La seconde est nettement plus intéressée sans doute : la rédaction est évaluée ! En effet, un vocabulaire approprié, une rédaction rigoureuse et claire, ainsi qu'une copie soignée seront des critères importants d'évaluation. C'est ce qui fait souvent la différence entre une "copie correcte" et une "bonne copie".

Donnons déjà les quatre commandements de la bonne rédaction :

1. **Tout objet dont tu parleras, au préalable tu introduiras.**
   Que signifie la phrase "Ils les lui ont volées." ? On n'en sait rien, puisqu'on ne sait pas ce que désignent "ils", "les", "lui"... Bref, en mathématiques, c'est pareil : on ne peut pas saisir le sens de la phrase "$x^2 = x$" si on ne sait pas ce que désigne x. On ne peut donc pas savoir si elle est vraie, ou fausse, ou s'il s'agit de déterminer quand elle est vraie...
2. **Ce que tu fais, tu expliqueras.**
   Des petites expressions comme "Montrons que", "Transformons le problème", "Résolvons"... seront utiles pour que vous et moi comprenions bien ce que vous êtes en train de faire.
3. **Les arguments utilisés, tu mentionneras.**
   Pour vous, il s'agit de vous assurer que ce que vous faites est correct... Pour moi, il s'agit de vérifier que vous avez bien saisi les subtilités du raisonnement.
4. **Tes résultats, en évidence tu mettras.**
   Il s'agit essentiellement de vous assurer que vous avez bien répondu à l'intégralité de la question, mais aussi de mettre en évidence un résultat qui pourra vous être utile dans la suite de votre copie... Et c'est nettement plus simple pour moi de repérer les changements de questions !

III.2 Exemples de rédaction

♣ **Rédaction** ♣ **Pour démontrer une assertion universelle "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$"**, on écrit :
"Soit $x \in E$. (Montrons que $\mathcal{P}(x)$)"
Puis on effectue les étapes nécessaires pour établir $\mathcal{P}(x)$.

♣ **Rédaction** ♣ **Pour démontrer une assertion existentielle "$\exists x \in E\ /\ \mathcal{P}(x)$"**, on écrit :
"Posons $x = ...$" (*il faut donc avoir une idée*)
Puis on vérifie que $x \in E$ et que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemples 5

E1 **Démontrons l'identité de Legendre** [1] **:**

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(a+b)^4-(a-b)^4 &= \left((a+b)^2\right)^2-\left((a-b)^2\right)^2\\ &= \left((a+b)^2+(a-b)^2\right)\left((a+b)^2-(a-b)^2\right)\\ &= \left((a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2\right)\left(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2\right)\\ &= (2a^2+2b^2)\times 4ab\\ &= 8ab(a^2+b^2)\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^4-(a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$.

[1] Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Mathématicien français dont les contributions sont importantes en analyse, arithmétique, mécanique céleste. On lui doit, entre autres, la méthode des moindres carrés.

E2 **Montrons qu'il existe un entier naturel n tel que $2^n < n^2$.**
Posons $n = 3$. On a ainsi $n \in \mathbb{N}$ et :

$$2^n = 2^3 = 8$$

également :

$$n^2 = 3^2 = 9$$

Par conséquent :

$$2^n < n^2$$

Conclusion : il existe un entier naturel n (exemple $n = 3$) tel que $2^n < n^2$.

E3 **Montrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}\ /\ m > n$.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $m = n+1$. On a ainsi $m \in \mathbb{N}$ et $m > n$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}\ /\ m > n$.

IV Sur les équations et inéquations

Je ne vais pas m'attarder dans cette section, mais je veux simplement insister sur trois points :

- Une équation est une égalité faisant intervenir des quantités dont une ou plusieurs sont inconnues. Une **solution** est une valeur qui rend l'égalité vraie. **Résoudre une équation**, c'est trouver toutes ses solutions.
- Pour tester un candidat solution, il suffit de remplacer l'inconnue par la valeur du candidat : si l'équation est vérifiée, le candidat est solution, sinon, ce n'est pas une solution.
- Pour résoudre une équation, on raisonne souvent par équivalence. C'est à dire que l'on cherche à *caractériser* l'ensemble des solutions. Les opérations suivantes transforment une équation en une équation équivalente (deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions) :
  - ajouter ou soustraire la même quantité quantité à chacun des deux membres ;
  - multiplier ou diviser chacun des deux membres par la même quantité **non nulle** ;
  - prendre l'inverse des deux membres **s'ils sont tous les deux non nuls**.
  - et c'est tout pour l'instant ! En particulier, "élever au carré" ou "prendre la racine carrée" ne conservent en général par les équivalences !

✘ Attention !
Pour les inéquations : multiplier par une quantité positive conserve le sens de l'inégalité, alors que multiplier par une quantité négative le change.

Pourquoi ?
Pourquoi *en général* ?
Parce-que tout dépend de l'ensemble d'appartenance de l'inconnue... Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, alors $a = b \iff a^2 = b^2$ est vraie.
Mais si a, b sont des réels quelconques, alors on a l'équivalence : $a^2 = b^2 \iff \left\{\begin{array}{l} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b\end{array}\right.$

V Quelques raisonnements mathématiques...

V.1 Raisonnement direct

♣ Rédaction ♣ **Pour démontrer l'implication "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$",** on écrit :
"Supposons $\mathcal{P}$ (et montrons $\mathcal{Q}$)."
Puis on effectue les étapes nécessaires afin d'établir $\mathcal{Q}$.

Exemple 6

Démontrer que la somme de deux multiples de 3 est encore un multiple de 3.

Reformulation

V.2 Raisonnement par récurrence

On dispose d'un prédicat $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un **entier naturel n** et on veut établir qu'il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le principe est le suivant :

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)\big)\end{array}\right\} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$$

Petite remarque
Si on veut démontrer un résultat qui débute au rang $n_0 \in \mathbb{N}$, il faudra alors vérifier que $\mathcal{P}(n_0)$ est vrai et le reste est valable pour $n \geq n_0$...

Si nous arrivons donc à démontrer les deux résultats de gauche, nous aurons automatiquement que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En pratique :

♣ Rédaction ♣ **Pour rédiger une récurrence :**

- Identifier le résultat à démontrer (qui doit dépendre d'une **variable dans $\mathbb{N}$** !).
- Démontrer **l'initialisation** : vérifier que $\mathcal{P}(0)$ est vrai.
- Démontrer **l'hérédité** : il faut démontrer une implication universelle...
  On écrit donc "Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$." puis on effectue les étapes nécessaires...
- Et comme toujours : **conclure.**

★ Classique ! ★
Il est indispensable de savoir bien rédiger une récurrence !

Exemple 7

Notons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{array}\right.$. **Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times (-3)^n$.**

✓ Rigueur !
Souvent il faudra faire 2 calculs **séparément** dans l'initialisation.

✍ Rédaction
• L'hypothèse de récurrence (HDR) doit être clairement écrite dans l'hérédité, tout comme l'objectif à atteindre.
• On mentionne explicitement l'endroit où l'HDR est utilisée.

Il est parfois nécessaire, dans une récurrence, de supposer que le prédicat est vrai aux rangs n et $n+1$ et de montrer qu'il l'est au rang $n+2$. On parle alors de **récurrence double** et il faudra initialiser aux deux premiers rangs...
De la même façon, il existe des récurrences triple, quadruple... et même forte (on suppose alors le prédicat vrai à tous les rangs jusqu'à n et on montre qu'il est vrai au rang $n+1$) ! Nous en verrons en exercices.

V.3 Raisonnement par l'absurde

Raisonner par l'absurde, c'est supposer le contraire de ce que l'on veut établir afin d'arriver à une contradiction. Comme une assertion est soit vraie, soit c'est son contraire qui l'est ; cela prouvera que l'assertion initiale est vraie.

Exemple 8

Montrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Raisonnons pas l'absurde et supposons donc que $\frac{1}{3}$ est un décimal, c'est à dire qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^b}$.
On obtient ainsi :

$$3a = 10^b$$

Puisque $a \in \mathbb{Z}$, cela implique que 10^b est un multiple de 3. Mais la somme des chiffres de 10^b est égale à 1, qui n'est pas divisible par 3, donc 10^b n'est pas divisible par 3 : contradiction.
Par conséquent, l'hypothèse "$\frac{1}{3}$ est décimal" est fausse.

Conclusion : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

♡ **Astuce du chef !** ♡
La difficulté réside souvent dans le simple fait de savoir s'il faut raisonner par l'absurde ou non... C'est souvent le cas quand on a plus de choses à dire sur la négation d'une assertion que sur l'assertion elle-même...

V.4 Raisonnement par contraposée

Démontrer l'implication "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$" est équivalent à démontrer sa **contraposée**, c'est à dire l'implication "non$\mathcal{Q} \Longrightarrow$ non$\mathcal{P}$".

Exemple 9

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair.

V.5 Raisonnement par analyse-synthèse

Ce raisonnement est parfois également appelé "raisonnement par condition nécessaire puis suffisante".

C'est un raisonnement souvent utilisé pour déterminer l'ensemble des éléments vérifiant une certaine propriété. En particulier, on le rencontre pour :

- résoudre des équations ou inéquations,
- montrer l'égalité de deux ensembles,
- justifier l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant une certaine propriété.

★**Subtile...**★
En fait, ces trois cas sont analogues : ils peuvent tous trois se formuler en égalité d'ensembles ou en équivalence d'énoncés mathématiques...

En pratique, la partie **analyse** consiste à trouver des *conditions nécessaires*, et donc à établir une liste de *candidats-solutions* ; alors que la **synthèse** se résume à examiner les *candidats* pour en extraire les (vraies) solutions (*les conditions nécessaires établies sont-elles suffisantes ?*).

Exemples 10

E1 **Déterminons tous les réels x tels que $\sqrt{x^2} - 2x = 3$.**

- **Analyse.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2} - 2x = 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2} = 2x + 3 \\
&\Longrightarrow \quad x^2 = (2x+3)^2 \\
&\quad ⚠ \\
&\Longrightarrow \quad 3x^2 + 12x + 9 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x^2 + 4x + 3 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

A ce stade, nous pouvons donc dire que les seules candidats-solutions à l'équation $\sqrt{x^2} - 2x = 3$ sont -1 et -3.

- **Synthèse.**
  - ◇ Puisque $\sqrt{(-1)^2} - 2 \times (-1) = 3$, -1 est bien solution de l'équation $\sqrt{x^2} - 2x = 3$.
  - ◇ Puisque $\sqrt{(-3)^2} - 2 \times (-3) = 9$, -3 n'est pas solution de l'équation $\sqrt{x^2} - 2x = 3$.

✍ **Rédaction**
Il serait également possible de rédiger ainsi : "Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x est solution de $\sqrt{x^2} - 2x = 3$, alors $\sqrt{x^2} = 2x + 3$, et donc... et donc $x = -1$ ou $x = -3$... Puis on vérifie dans la synthèse."

☞ **Rappel...**
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$:
• discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
◇ si $\Delta > 0$, deux solutions distinctes : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
◇ si $\Delta = 0$, une solution : $\frac{-b}{2a}$.
◇ si $\Delta < 0$: pas de solution réelle

Conclusion : l'équation $\sqrt{x^2}-2x=3$ possède une unique solution : -1.

Question : *pourquoi un raisonnement par équivalence directement sur $x\in\mathbb{R}$ est-il faux ?*

Réponse : *la réciproque de l'implication "$\sqrt{x^2}=2x+3 \Longrightarrow x^2=(2x+3)^2$" est fausse sur $\mathbb{R}$...On pourrait imposer dès la deuxième étape que $\sqrt{x^2}$ et $2x+3$ sont positifs, c'est à dire que $x\geq\frac{-3}{2}$ (ce qui est le cas, puisque $2x+3=\sqrt{x^2}\geq 0$) ; et dans ce cas, l'implication réciproque serait également vraie.*

PETITE REMARQUE

C'est plutôt ainsi que l'on procède quand on doit élever au carré dans des inéquations ; ce qui amène à distinguer des cas...

E2 Résolvons l'équation $9n^5-12n^4+6n-5=0$ d'inconnue $n\in\mathbb{Z}$.

- **Analyse.** Soit $n\in\mathbb{Z}$ tel que $9n^5-12n^4+6n-5=0$. On a ainsi :

$$n(9n^4-12n^3+6)=5$$

Mais puisque n est un entier, $9n^4-12n^3+6$ en est également un.
Par conséquent, l'égalité $n(9n^4-12n^3+6)=5$ implique que n est un diviseur de 5.
Les seuls diviseurs de 5 sont $-5,-1,1,5$, donc $n\in\{-5;-1;1;5\}$.

- **Synthèse.** On vérifie sans difficulté qu'aucun des nombres $-5;-1;1;5$ n'est solution de l'équation initiale.

Conclusion : l'équation $9n^5-12n^4+6n-5=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

E3 Déterminons toutes les fonctions affines f telles que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(f(x))=x$.

- **Analyse.** Soit f une fonction affine telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(f(x))=x$.
Il existe alors $a,b\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.
On a ainsi, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(ax+b)\\ &= a(ax+b)+b\\ &= a^2x+ab+b \end{aligned}$$

On cherche donc à déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ a^2x+ab+b=x$$

Comme ceci doit être valable pour tout réel x, en particulier :
  - pour $x=0$, on obtient $ab+b=0$, c'est à dire $b(a+1)=0$. Donc $b=0$ ou $a=-1$.
  - pour $x=1$, on obtient $a^2+ab+b=1$. Mais comme $ab+b=0$, il reste $a^2=1$. Donc $a=-1$ ou $a=1$.

Nos conditions nécessaires se résument ainsi : soit $a=1$ et donc $b=0$, soit $a=-1$ et b semble quelconque.

✘ ATTENTION !

A ce stade, rien ne nous prouve que le travail d'analyse n'est pas terminé et que nous avons découvert toutes les conditions...

- **Synthèse.**
  - La fonction $x\longmapsto x$ est clairement solution du problème.
  - Soit $b\in\mathbb{R}$. Considérons $f_b : x\longmapsto -x+b$. Elle est affine et on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_b(f_b(x)) &= f_b(-x+b)\\ &= -(-x+b)+b\\ &= x \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $b\in\mathbb{R}$, la fonction $x\longmapsto -x+b$ est solution du problème.

Conclusion : les fonctions affines f telles que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(f(x))=x$ sont $x\longmapsto x$ et toutes les fonctions $x\longmapsto -x+b$, avec b parcourant $\mathbb{R}$.

Annexe : sur les tables de vérité...

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. Affinons et complétons ce qui a été vu précédemment :

Définitions 3 - Implication, conjonction, disjonction

D1# L'**implication** "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$" est l'assertion qui est :
- vraie lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont simultanément vraies,
- vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse,
- fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie et $\mathcal{Q}$ fausse.

D2# La **conjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée "$\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$" est l'assertion qui est :
- vraie lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont simultanément vraies,
- fausse sinon.

D3# La **disjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée "$\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$" est l'assertion qui est :
- fausse lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont simultanément fausses,
- vraie sinon.

★Subtile...★
Et oui, le faux implique le vrai...

On résume parfois ces définitions à l'aide des tables de vérité suivantes :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

;

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

;

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples 11

Donnons les tables de vérité de : "NON$\mathcal{P}$" et "$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$".

Petite remarque
On retrouve bien que : "$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$" est vraie lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont même valeur de vérité.

Propriétés 1

P1# $\big(\text{NON}(\mathcal{P} \text{ ET } \mathcal{Q})\big) \Longleftrightarrow \big((\text{NON}\mathcal{P}) \text{ OU } (\text{NON}\mathcal{Q})\big)$; $\big(\text{NON}(\mathcal{P} \text{ ET } \mathcal{Q})\big) \Longleftrightarrow \big((\text{NON}\mathcal{P}) \text{ OU } (\text{NON}\mathcal{Q})\big)$ *(lois de Morgan)*

P2# $\big(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}\big) \Longleftrightarrow \big((\text{NON}\mathcal{P}) \text{ OU } \mathcal{Q}\big)$; $\text{NON}\big(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}\big) \Longleftrightarrow \big(\mathcal{P} \text{ ET } (\text{NON}\mathcal{Q})\big)$

★ Démonstration : Tout se démontre en établissant les tables de vérité et en utilisant le fait que deux assertions sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même table de vérité. ★