Exercices du chapitre 0
Les bases...

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Écriture mathématique

Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. A tout réel, on peut trouver un réel qui lui soit strictement inférieur.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \ / \ y < x$
2. Tout réel non nul est l'inverse d'un unique réel non nul.
   $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists ! y \in \mathbb{R}^* \ / \ x = \dfrac{1}{y}$
3. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas la fonction constante égale à 1.
   $\exists x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \neq 1$
4. Tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers naturels [1].
   $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} \ / \ n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
5. Pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$, d'inconnues x, y, z des entiers naturels non nuls, n'a aucune solution [2]
   $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geq 3 \Longrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{N}^*,\ x^n + y^n \neq z^n\right)$
   ou
   $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x, y, z \in \mathbb{N}^*,\ x^n + y^n \neq z^n$
6. Si un réel positif est inférieur ou égal à tout autre réel strictement positif, alors il est nul.
   $\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \left((\forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon) \Longrightarrow a = 0\right)$

> ☞ Pour info...
> La négation est : "la fonction f est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$", qui s'écrit "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1$".
> Au passage, la phrase "la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$" se traduit par : "$\exists C \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$".

> Petite remarque
> Voir l'exercice 14...

●○○○ Exercice 2 - Négation

Donner la négation de chacune des phrases ci-dessous.

1. Tous les élèves de cette classe sont des filles.
   Au moins un des élèves de cette classe n'est pas une fille.
2. Il a fait beau tous les jours de la semaine.
   Il y a eu au moins un jour de la semaine durant lequel il n'a pas fait beau.
3. Il existe une copie de dissertation de philosophie sans faute d'orthographe.
   Toutes les copies de dissertation de philosophie contiennent au moins une faute d'orthographe.

●○○○ Exercice 3 - Négation

Écrire la négation de chacune des assertions suivantes.

1. $x \in [-1; 2[$
   $x \notin [-1; 2[$, ou "$x < -2$ ou $x \geq 2$"
2. $\forall x \in E,\ x^2 \geq 5$
   $\exists x \in E \ / \ x^2 < 5$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$)
   $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \neq f(x)$
4. $\exists T \in \mathbb{R}_*^+ \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$)
   $\forall T \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x+T) \neq f(x)$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geq 10 \Longrightarrow u_n \geq 10^4\right)$ (où (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$)
   $\exists n \in \mathbb{N} \ / \ \left(n \geq 10 \text{ ET } u_n < 10^4\right)$
   ou
   $\exists n \in [\![10; +\infty[\![\ / \ u_n < 10^4$
6. $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ 4 \leq u_n \leq 5$ (où (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$)
   $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \ / \ \left(u_n < 4 \text{ OU } u_n > 5\right)$
7. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ -\varepsilon \leq u_n \leq \varepsilon$ (où (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$)
   $\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N, \ / \ \left(u_n < -\varepsilon \text{ OU } u_n > \varepsilon\right)$
8. $\exists \ell \in \mathbb{R} \ / \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(x \in [-\delta, \delta] \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon\right)$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$)
   $\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R} \ / \ \left(x \in [-\delta, \delta] \text{ ET } (f(x) < \ell - \varepsilon \text{ OU } f(x) > \ell + \varepsilon)\right)$
   ou
   $\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \delta > 0,\ \exists x \in [-\delta; \delta] \ / \ \left(f(x) < \ell - \varepsilon \text{ OU } f(x) > \ell + \varepsilon\right)$

> Petite remarque
> La phrase initiale peut également s'écrire :
> $\forall n \in [\![10; +\infty[\![,\ u_n \geq 10^4$

> ☞ Pour info...
> L'assertion initiale signifie que la fonction f possède une limite finie en 0.

1. Ce théorème a été conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638, français) en 1621, mais c'est Joseph-Louis Lagrange (1736-1813, né italien, naturalisé français) qui le démontra en 1770. Aujourd'hui il porte le nom de théorème des 4 carrés de Lagrange.

2. Bien que Pierre de Fermat (16..-1665, français) indiqua, dans la marge de lArithmetica de Diophante, en avoir trouvé "*une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir*", il a fallu attendre 1995 et les travaux dAndrew Wiles pour que cet énoncé soit prouvé.

●●○○ Exercice 4

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier n^2+n est pair.

- **Initialisation.** Pour $n=0$:
$0^2+0=0$, qui est un nombre pair. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "n^2+n est pair" et montrons que "$(n+1)^2+(n+1)$" est pair.
On a :
$$\begin{aligned}(n+1)^2+(n+1) &= n^2+2n+n+2\\ &= n^2+n+2n+2\end{aligned}$$
Or, par hypothèse de récurrence, n^2+n est pair. C'est également le cas de $2n+2$.
Ainsi, $(n+1)^2+(n+1)$ est pair, comme somme de deux nombres pairs : l'hérédité est établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier n^2+n est pair.

2. Proposer une autre démonstration de ce résultat.

Par disjonction de cas...
Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent :

- si n est pair.
Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k$. Et alors :
$$n^2+n=2(2k^2+k)$$
Puisque $2k^2+k \in \mathbb{N}$, l'entier n^2+n est bien un entier pair.
- si n est impair.
Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$. Et alors :
$$n^2+n=2(2k^2+3k+1)$$
Puisque $2k^2+3k+1 \in \mathbb{N}$, l'entier n^2+n est bien un entier pair.

Par conséquent, dans les deux cas, n^2+n est un entier pair.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier n^2+n est pair.

●●○○ Exercice 5 - Récurrence & terme général

1. Considérons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+2n+1 \end{cases}$$
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n=n^2+1$.

- **Initialisation.** Pour $n=0$:
$u_0=1$ et $0^2+1=1$. D'où : $u_0=0^2+1$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "$u_n=n^2+1$" et montrons que "$u_{n+1}=(n+1)^2+1$".
On a :
$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n+2n+1 \quad \text{hypothèse de récurrence}\\ &= n^2+1+2n+1\\ &= (n+1)^2+1\end{aligned}$$
L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n=n^2+1$.

2. Considérons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} u_1=0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+2 \end{cases}$$
Démontrons que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

- **Initialisation.** Pour $n=1$:
$u_1=0$ et $u_2=\frac{1}{2}u_1+2=2$.
Comme $0 \leq 0 \leq 2 \leq 4$, on a bien $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 4$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que "$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$" et montrons que "$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$". Par hypothèse de récurrence, on a :
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$
En multipliant par $\frac{1}{2}$ (positif) :
$$0 \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}u_{n+1} \leq 2$$
Puis en ajoutant 2 :
$$2 \leq \frac{1}{2}u_n+2 \leq \frac{1}{2}u_{n+1}+2 \leq 4$$
C'est à dire :
$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$
Par conséquent :
$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$
L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

3. Considérons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

Démontrons que pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1) \times 3^n$.
Puisque (u_n) est définie par une relation de récurrence d'ordre 2, nous allons procéder ici à une récurrence double.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$ et $n = 1$:
  $u_0 = 1$ et $(0+1) \times 3^0 = 1$;
  $u_1 = 6$ et $(1+1) \times 3^1 = 6$.
  L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "$u_n = (n+1)3^n$ ET $u_{n+1} = (n+2)3^{n+1}$" et montrons que "$u_{n+2} = (n+3)3^{n+2}$".
  On a :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+2} & = & 6u_{n+1} - 9u_n & \\ & = & 6(n+2)3^{n+1} - 9(n+1)3^n & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & 2(n+2)3^{n+2} - (n+1)3^{n+2} & \\ & = & 3^{n+2}\big(2(n+2) - (n+1)\big) & \\ & = & 3^{n+2}(n+3) & \end{array}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1) \times 3^n$.

♡ **Astuce du chef !** ♡
Dans l'hérédité d'une récurrence, il est souvent plus aisé de démarrer :
• d'un des membres du résultat à obtenir s'il s'agit d'une égalité ;
• de l'hypothèse de récurrence dans le cas d'une inégalité.

●●○○ Exercice 6 - Inégalité de Bernoulli [3]

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \forall x \in \mathbb{R}^+, \; (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \times x$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; (1+x)^n \geq 1 + nx$" et montrons que "$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$".
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$(1+x)^n \geq 1 + nx$$
  D'où, en multipliant par $1+x$ (positif car $x \in \mathbb{R}^+$) :
  $$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$
  C'est à dire :
  $$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$$
  Mais $n \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $nx^2 \geq 0$. Ainsi :
  $$1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x$$
  On en déduit donc :
  $$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathrm{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Petite remarque
Que ce soit dans l'initialisation ou dans l'hérédité, l'inégalité souhaitée doit être démontrée pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Autrement, comme l'ordre des quantifications en n et x peut ici être changé, on pourrait fixer un $x \in \mathbb{R}^+$ au départ, puis démontrer par récurrence le résultat.

●○○○ Exercice 7 - Disjonction de cas

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Distinguons 2 cas :

- Si n est pair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
  D'où :
  $$\begin{array}{rcl} \dfrac{n(n+1)}{2} & = & \dfrac{2k(2k+1)}{2} \\ & = & k(2k+1) \end{array}$$
  Puisque $k \in \mathbb{N}$, $k(2k+1)$ est un entier ; autrement dit, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
- Si n est impair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
  D'où :
  $$\begin{array}{rcl} \dfrac{n(n+1)}{2} & = & \dfrac{(2k+1)(2k+1+1)}{2} \\ & = & (2k+1)(k+1) \end{array}$$
  Puisque $k \in \mathbb{N}$, $(2k+1)(k+1)$ est un entier ; autrement dit, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

3. Lequel ? Ici, c'est Jakob Bernoulli (1654-1705, suisse). Il est le frère de Johann et l'oncle de Daniel, Nicolas I, Nicolas II et Johann II, grand-oncle de Johann III et Jakob II, tous des Bernoulli, tous mathématiciens ! Les réunions de famille devaient être productives...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

●●○○ Exercice 8 - Irrationalité de $\sqrt{2}$

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Cela signifie que $\sqrt{2}$ peut s'écrire comme une fraction de deux entiers. Si ces deux entiers ont des diviseurs communs, nous pouvons simplifier la fraction... Quitte donc à la simplifier, nous pouvons supposer cette fraction irréductible.
Supposons ainsi qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$, cette fraction étant irréductible.
On obtient alors : $2 = \dfrac{n^2}{m^2}$; c'est à dire $n^2 = 2m^2$.
n^2 est donc un entier pair. Et d'après l'exemple 7 du cours, n est alors également pair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
Mais dans ce cas : $n^2 = 4k^2$ et donc $4k^2 = 2m^2$, d'où $2k^2 = m^2$.
Par conséquent, m^2 est pair, et donc m également.
Au final, n et m sont tous deux pairs; ce qui contredit l'irréductibilité de la fraction $\dfrac{n}{m}$. L'hypothèse formulée est fausse. Il n'existe donc pas de fraction irréductible de $\sqrt{2}$.

Conclusion : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

●●○○ Exercice 9

Soient x_0, x_1, x_2 trois réels de l'intervalle $[0;1]$ tels que : $x_0 \leq x_1 \leq x_2$.
Montrer qu'au moins une des quantités $x_1 - x_0$ et $x_2 - x_1$ est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $x_1 - x_0 > \dfrac{1}{2}$ ainsi que $x_2 - x_1 > \dfrac{1}{2}$.
En sommant, on obtient :

$$(x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

C'est à dire :

$$x_2 - x_0 > 1$$

Or on sait que $x_0, x_2 \in [0;1]$. Donc $x_2 - x_0 \leq 1$: absurde.

Conclusion : au moins une des quantités $x_1 - x_0$ et $x_2 - x_1$ est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$.

> **Petite remarque**
> On peut aussi procéder par disjonction de cas selon que x_1 est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{2}$ ou non...

●●○○ Exercice 10 - Équations et inéquations

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 \geq 5$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 \geq 5 \iff \begin{cases} x \geq \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x \leq -\sqrt{5} \end{cases}$$

2. $-(x+3)^2 \geq -4$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} -(x+3)^2 \geq -4 &\iff (x+3)^2 \leq 4 \\ &\iff -2 \leq x+3 \leq 2 \\ &\iff -5 \leq x \leq -1 \end{aligned}$$

3. $x^2 > x$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x^2 > x &\iff x^2 - x > 0 \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{\iff} x(x-1) > 0 \end{aligned}$$

   Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   D'où :

$$x(x-1) > 0 \iff x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$$

   Conclusion : $x^2 > x \iff x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

4. $\dfrac{x+2}{-x+3} \geq 0$
   Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+2}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

   Conclusion : $\dfrac{x+2}{-x+3} \geq 0 \iff x \in [-2;3[$

5. $\dfrac{x+2}{x-3} \geq 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x-3} \geq 1 &\iff \frac{x+2}{x-3} - 1 \geq 0 \\
&\iff \frac{x+2-(x-3)}{x-3} \geq 0 \\
&\iff \frac{5}{x-3} \geq 0 \\
&\iff x-3 > 0 \\
&\iff x > 3
\end{aligned}$$

6. $\sqrt{x+2} = x$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2} = x &\underset{⚠}{\implies} x+2 = x^2 \\
&\implies x^2 - x - 2 = 0 \\
&\implies \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

On vérifie si les deux candidats sont des solutions... C'est le cas de 2, mais pas de -1.

Conclusion : $\sqrt{x+2} = x \iff x = 2$

> **✘ Attention !**
> De façon générale, élever au carré ne conserve pas l'équivalence !
> On a, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:
> $a = b \implies a^2 = b^2$
> et aussi :
> $a^2 = b^2 \iff \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b \end{cases}$.

7. $\sqrt{2x+3} = x - 6$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3} = x-6 &\underset{⚠}{\implies} 2x+3 = (x-6)^2 \\
&\implies x^2 - 14x + 33 = 0 \\
&\implies \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = 11 \end{cases}
\end{aligned}$$

On vérifie si les deux candidats sont des solutions... C'est le cas de 11, mais pas de 3.

Conclusion : $\sqrt{2x+3} = x - 6 \iff x = 11$

> **Petite remarque**
> En fait, ici comme dans la question précédente, on a procédé par analyse-synthèse (ou condition nécessaire puis condition suffisante) : "si x est solution de ..., alors nécessairement $x = ...$" ; puis on regarde s'il est suffisant que $x = ...$ pour être solution.

8. $\dfrac{-1}{2}x + 1 \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\sqrt{x^2-x-2}$ existe, c'est une quantité positive ; et on a : $\dfrac{-1}{2}x + 1 \leq 0 \iff x \geq 2$.

- Si $x \geq 2$, alors $\dfrac{-1}{2}x + 1 \leq 0$ et donc l'inégalité $\dfrac{-1}{2}x + 1 \leq \sqrt{x^2-x-2}$ est vraie, du moment que $\sqrt{x^2-x-2}$ existe.
  Or, $\sqrt{x^2-x-2}$ existe ssi $x^2 - x - 2 \geq 0$ ssi $x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$.
  Par conséquent, si $x \geq 2$, l'inégalité $\dfrac{-1}{2}x + 1 \leq \sqrt{x^2-x-2}$ est vraie.
- Si $x < 2$, alors $-\dfrac{1}{2}x + 1 > 0$ et on a ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{2}x + 1 \leq \sqrt{x^2-x-2} &\iff \left(\frac{-1}{2}x+1\right)^2 \leq x^2 - x - 2 \\
&\iff \frac{3}{4}x^2 - 3 \geq 0 \\
&\iff x^2 \geq 4 \\
&\iff \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{ou} \\ x \leq -2 \end{cases} \\
&\iff x \leq -2 \qquad \text{car } x < 2
\end{aligned}$$

Conclusion : $\dfrac{-1}{2}x + 1 \leq \sqrt{x^2-x-2} \iff \left(x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\right)$.

> **✘ Attention !**
> C'est différent ici, puisque $a \leq b$ n'implique pas nécessairement $a^2 \leq b^2$: il faut faire attention aux signes... En revanche, si a et b sont positifs, on a : $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

●●○○ Exercice 11

Démontrer :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+, \ \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. Transformons, par équivalences, le résultat à démontrer :

$$\begin{aligned}
\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} &\iff (\sqrt{a+b})^2 < (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 && \text{car } \sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{R}_*^+ \text{ et } x \longmapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_*^+ \\
&\iff a + b < a + 2\sqrt{ab} + b && \text{car } a, b \in \mathbb{R}_*^+ \\
&\iff 0 < \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Or $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, donc $\sqrt{ab} > 0$. Par conséquent, le résultat initial est également vrai.

Conclusion : $\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+, \ \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> Quand on n'est pas inspiré, on peut transformer, **à l'aide d'équivalences**, un résultat afin de le rendre plus simple à démontrer / infirmer.
> C'est une trivialisation du résultat.

●○○○ Exercice 12

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, \ a2^n + b3^n = a\right) \iff a = b = 0$$

Raisonnons par double-implication...

> **Petite remarque**
> Il n'est pas rare de démontrer une équivalence en procédant par double-implication ; surtout quand l'une est plus élémentaire que l'autre...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $a = b = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a2^n + b3^n = 0 + 0 = 0 = a$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a2^n + b3^n = a$.
En particulier :

- Pour $n = 0$, on obtient $a + b = a$. Donc $b = 0$.
- Pour $n = 1$, on obtient $2a + 3b = a$.

Comme on a obtenu $b = 0$ et $2a + 3b = a$, nous pouvons en déduire que $2a = a$ et donc $a = 0$.
Par conséquent : $a = b = 0$.

Conclusion : $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ a2^n + b3^n = a\right) \iff a = b = 0$.

●○○○ Exercice 13 - Équivalence ?

1. Démontrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b \text{ ET } c \leq d) \Longrightarrow a + c \leq b + d$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $(a \leq b \text{ ET } c \leq d)$.
Puisque $a \leq b$, en ajoutant c, on obtient :

$$a + c \leq b + c$$

Mais $c \leq d$, d'où, en ajoutant b :

$$b + c \leq b + d$$

On obtient ainsi :

$$a + c \leq b + c \leq b + d$$

Et donc :

$$a + c \leq b + d$$

2. L'implication réciproque est-elle également valable pour tous réels a, b, c, d ?

Non, il suffit de prendre $a = 3$, $c = 1$, $b = 2$ et $d = 7$... On a bien $a + c \leq b + d$, et pourtant, nous n'avons pas $(a \leq b \text{ ET } c \leq d)$, puisque a n'est pas inférieur ou égal à b.

3. Que penser de l'affirmation suivante : $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \left(a + c \leq b + d \Longrightarrow (a \leq b \text{ OU } c \leq d)\right)$.

Elle est vraie, et elle se prouve immédiatement par contraposée (sa contraposée est en fait quasiment la même que l'implication directe de la question 1).

●●●○ Exercice 14 - Nul ?

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\left(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon\right) \iff a = 0$$

Raisonnons par double-implication...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $a = 0$, alors a est inférieur ou égal à tout nombre strictement positif (il est même strictement inférieur à tout nombre strictement positif).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Nous voulons établir :

$$\left(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon\right) \Longrightarrow a = 0$$

Pour cela, raisonnons par contraposée et démontrons le résultat :

$$a \neq 0 \Longrightarrow \left(\exists \varepsilon > 0 \,/\, a > \varepsilon\right)$$

Supposons donc $a \neq 0$. Puisque $a \in \mathbb{R}^+$, on a $\frac{a}{2} > 0$. Posons ainsi $\varepsilon = \frac{a}{2}$.
Puisque $a > 0$, on a

$$a > \frac{a}{2}$$

C'est à dire

$$a > \varepsilon$$

La contraposée étant établie, on a bien :

$$\left(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon\right) \Longrightarrow a = 0$$

Conclusion : $\left(\forall \epsilon > 0,\ a \leq \epsilon\right) \iff a = 0$.

●●●○ Exercice 15 - Équation fonctionnelle

Démontrer que la fonction identité est la seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- pour tout réel x, $f(f(x)) = x$

Vocabulaire
La fonction identité est la fonction $x \longmapsto x$.

Il est déjà évident que la fonction identité convient. Pour montrer que c'est la seule, raisonnons pas l'absurde.
Supposons donc qu'il existe une fonction f, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, différente de l'identité, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x$$

Puisque f est différente de la fonction identité, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq x_0$.

- Si $f(x_0) < x_0$, alors en appliquant f, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient $f(f(x_0)) < f(x_0)$. Mais $f(f(x_0)) = x_0$ par hypothèse. On obtient ainsi $x_0 < f(x_0)$: absurde.
- De même si $f(x_0) > x_0$.

Conclusion : la seule fonction f, définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$, est la fonction identité.

●●●○ Exercice 16 - Équations fonctionnelles

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Petite remarque

Ne pas hésiter à mettre cet exercice temporairement de côté...

1. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

Par analyse-synthèse...

- **Analyse.** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

On a alors :

  - $f(0) + 0f(1) = 1 + 0$, d'où $f(0) = 1$
  - $f(1) + 1f(0) = 1 + 1$, et comme $f(0) = 1$, on obtient $f(1) = 1$
  - $f(1/2) + 1/2f(1/2) = 1 + 1/2$, ce qui donne également $f(1/2) = 1$

On peut alors penser que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$... Montrons-le.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a :

$$f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

Mais également, en substituant x par $1-x$:

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x$$

En multipliant la seconde égalité par x et en la soustrayant à la première, on obtient :

$$(1 - x + x^2)f(x) = 1 - x + x^2$$

Et comme $1 - x + x^2 \neq 0$ (discriminant négatif), on obtient, en divisant par $1 - x + x^2$:

$$f(x) = 1$$

La *candidate-solution* est la fonction constante égale à 1.

- **Synthèse.** Regardons si cette fonction convient.
Si $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x \times 1 = 1 + x$$

La fonction constante égale à 1 est bien solution du problème.

Conclusion : la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)+xf(1-x) = 1+x$, est la fonction constante égale à 1.

2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

Par analyse-synthèse...

- **Analyse.** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

On a alors :

  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = f(x)$, $f(0) = 2 - x - f(x)$, c'est à dire $f(x) = 2 - f(0) - x$.
  f est donc une fonction affine...
  - Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - f(0) - x$, on obtient en particulier $f(0) = 2 - f(0) - 0$, d'où $f(0) = 1$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$.
La *candidate-solution* est la fonction $x \longmapsto 1 - x$.

- **Synthèse.** Regardons si cette fonction convient.
Si $f(x) = 1 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = f(y - (1-x)) = f(y - 1 + x) = 1 - (y - 1 + x) = 2 - x - y$$

La fonction $x \longmapsto 1 - x$ est bien solution du problème.

Conclusion : la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y-f(x)) = 2-x-y$, est la fonction $x \longmapsto 1-x$.

3. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Par analyse-synthèse...

- **Analyse.** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

On a alors :

  - En prenant $x = y = 0$: $f(0)^2 - f(0) = 0$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
  - En prenant $x = 1$ et $y = 0$, on obtient $f(1)f(0) - f(0) = 1$, c'est à dire $f(0)(f(1) - 1) = 1$. Donc nécessairement, $f(0) \neq 0$. Par conséquent, $f(0) = 1$.
  - Avec x quelconque et $y = 0$, on obtient $f(x)f(0) - f(0) = x$, ce qui implique, puisque $f(0) = 1$: $f(x) = 1 + x$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x$.
La *candidate-solution* est la fonction $x \longmapsto 1 + x$.

- **Synthèse.** Regardons si cette fonction convient.
  Si $f(x) = 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on obtient :

  $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = (1+x)(1+y) - (1+xy) = 1 + x + y + xy - 1 - xy = x + y$$

  La fonction $x \longmapsto 1 + x$ est bien solution du problème.

Conclusion : la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$, est la fonction $x \longmapsto 1 + x$.