Exercices du chapitre 0
Les bases...

●○○○ Exercice 1 - Écriture mathématique
Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. A tout réel, on peut trouver un réel qui lui soit strictement inférieur.
2. Tout réel non nul est l'inverse d'un unique réel non nul.
3. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas la fonction constante égale à 1.
4. Tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers naturels [1].
5. Pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$, d'inconnues x, y, z des entiers naturels non nuls, n'a aucune solution [2]
6. Si un réel positif est inférieur ou égal à tout autre réel strictement positif, alors il est nul.

●○○○ Exercice 2 - Négation
Donner la négation de chacune des phrases ci-dessous.

1. Tous les élèves de cette classe sont des filles.
2. Il a fait beau tous les jours de la semaine.
3. Il existe une copie de dissertation de philosophie sans faute d'orthographe.

●○○○ Exercice 3 - Négation
Écrire la négation de chacune des assertions suivantes.

1. $x \in [-1;2[$
2. $\forall x \in \mathrm{E},\ x^2 \geq 5$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$)
4. $\exists \mathrm{T} \in \mathbb{R}_*^+ \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\mathrm{T}) = f(x)$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$)
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geq 10 \Longrightarrow u_n \geq 10^4\right)$ (où (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$)
6. $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq \mathrm{N},\ 4 \leq u_n \leq 5$ (où (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$)
7. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq \mathrm{N},\ -\varepsilon \leq u_n \leq \varepsilon$ (où (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$)
8. $\exists \ell \in \mathbb{R} \ /\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(x \in [-\delta, \delta] \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon\right)$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$)

●●○○ Exercice 4

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 + n$ est pair.
2. Proposer une autre démonstration de ce résultat.

●●○○ Exercice 5 - Récurrence & terme général

1. Considérons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$$
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 1$.
2. Considérons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$$
Démontrons que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
3. Considérons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1,\quad u_1 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$
Démontrons que pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1) \times 3^n$.

1. Ce théorème a été conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638, français) en 1621, mais c'est Joseph-Louis Lagrange (1736-1813, né italien, naturalisé français) qui le démontra en 1770. Aujourd'hui il porte le nom de théorème des 4 carrés de Lagrange.
2. Bien que Pierre de Fermat (16..-1665, français) indiqua, dans la marge de l'Arithmetica de Diophante, en avoir trouvé "*une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir*", il a fallu attendre 1995 et les travaux d'Andrew Wiles pour que cet énoncé soit prouvé.

●●○○ **Exercice 6 - Inégalité de Bernoulli**[3]

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^n \geq 1+nx$$

●○○○ **Exercice 7 - Disjonction de cas**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

●●○○ **Exercice 8 - Irrationalité de $\sqrt{2}$**

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

●●○○ **Exercice 9**

Soient x_0, x_1, x_2 trois réels de l'intervalle $[0;1]$ tels que : $x_0 \leq x_1 \leq x_2$.

Montrer qu'au moins une des quantités $x_1 - x_0$ et $x_2 - x_1$ est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$.

●●○○ **Exercice 10 - Équations et inéquations**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 \geq 5$
2. $-(x+3)^2 \geq -4$
3. $x^2 > x$
4. $\dfrac{x+2}{-x+3} \geq 0$
5. $\dfrac{x+2}{x-3} \geq 1$
6. $\sqrt{x+2} = x$
7. $\sqrt{2x+3} = x-6$
8. $\dfrac{-1}{2}x + 1 \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$

●●○○ **Exercice 11**

Démontrer :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+,\ \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

●○○○ **Exercice 12**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ a2^n + b3^n = a\right) \iff a = b = 0$$

●○○○ **Exercice 13 - Équivalence ?**

1. Démontrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b \ \text{ et } \ c \leq d) \Longrightarrow a + c \leq b + d$.
2. L'implication réciproque est-elle également valable pour tous réels a, b, c, d ?
3. Que penser de l'affirmation suivante : $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \big(a + c \leq b + d \Longrightarrow (a \leq b \text{ ou } c \leq d)\big)$.

●●●○ **Exercice 14 - Nul ?**

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\left(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon\right) \iff a = 0$$

●●●○ **Exercice 15 - Équation fonctionnelle**

Démontrer que la fonction identité est la seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- pour tout réel x, $f(f(x)) = x$

●●●○ **Exercice 16 - Équations fonctionnelles**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$
2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y$$
3. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

3. Lequel ? Ici, c'est Jakob Bernoulli (1654-1705, suisse). Il est le frère de Johann et l'oncle de Daniel, Nicolas I, Nicolas II et Johann II, grand-oncle de Johann III et Jakob II, tous des Bernoulli, tous mathématiciens...