Exercices du chapitre 1
Fonctions : généralités & fonctions usuelles

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Ensemble de définition

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

On se contentera ici de donner les réponses, sans détailler.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$
   L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2x-3}$
   L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$.
3. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x-3}$
   L'ensemble de définition de f est $]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$.
4. $f : x \longmapsto \ln(x^2-5x-6)$
   L'ensemble de définition de f est $]-\infty;-1[\cup]6;+\infty[$.
5. $f : x \longmapsto \ln(x+3)-\ln(2x+1)$
   L'ensemble de définition de f est $]-1/2;+\infty[$.
6. $f : x \longmapsto \sqrt{x^3+x^2+x}$
   L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^+$.
7. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{2x+1}{-x+4}}$
   L'ensemble de définition de f est $[-1/2;4[$.
8. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)-1}$
   L'ensemble de définition de f est $]0;e[\cup]e;+\infty[$.
9. $f : x \longmapsto \ln(e^x-1)$
   L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_*^+$.
10. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x+1)}$
    L'ensemble de définition de f est $]-1;e-1[\cup]e-1;+\infty[$.

●○○○ Exercice 2 - Positions relatives

Étudier les positions relatives des courbes des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$x^2 - x = x(x-1)$$
$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$$

D'où les tableaux de signes :

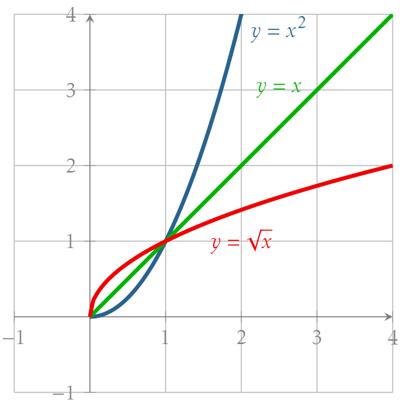
x	0		1		$+\infty$
x^2-x	0	$-$	0	$+$	

Et :

x	0		1		$+\infty$
$x-\sqrt{x}$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : La courbe de la fonction carrée est au-dessus de la courbe de l'identité sur $[1;+\infty[$ et au-dessous sur $[0;1]$.
La courbe de l'identité est au-dessus de la courbe de la fonction racinée carrée sur $[1;+\infty[$ et au-dessous sur $[0;1]$.
Ces trois courbes se rencontrent en les points de coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$.

Graphiquement :



●○○○ Exercice 3 - Optimisation & régionnement du plan

Un glacier fabrique deux types de glace au chocolat pour lesquelles les quantités d'ingrédients nécessaires à la fabrication d'un kg de glace sont données dans le tableau ci-dessous.

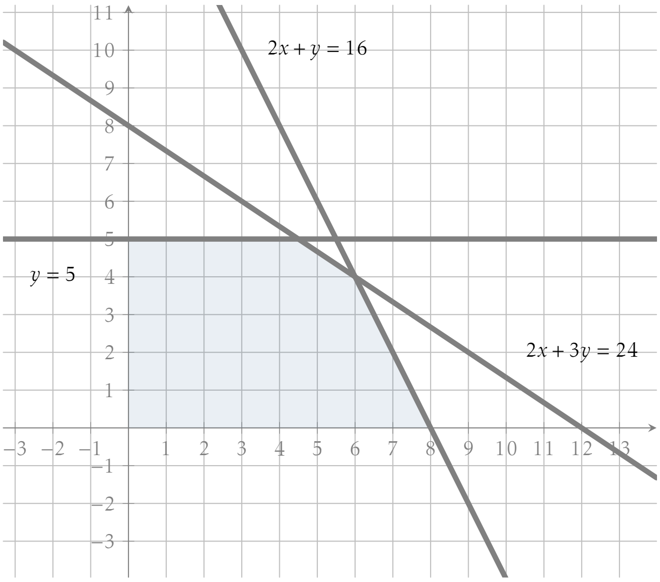
	glace 1	glace 2
doses de chocolat noir	2	1
doses de lait	2	3
doses de sucre	0	1

Le stock du glacier est constitué de : 16 doses de chocolat, 24 doses de lait et 5 doses de sucre.

1. A l'aide d'un régionnement du plan, représenter l'ensemble des quantités x de glace 1 et y de glace 2 que le glacier peut produire.
   Notons x la quantité, en kg, de glace 1 produite ; et y celle de glace 2.
   L'énoncé permet d'obtenir les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 16 \\ 2x + 3y \leq 24 y \leq 5 \end{cases}$$

   La zone coloriée ci-dessous correspond à l'ensemble des couples (x, y) possibles :



2. Le bénéfice pour la vente d'un kg de glace 1 est de 3€, alors qu'il est de 4€ pour celui de glace 2. Quelle quantité de chaque glace le glacier doit-il produire pour maximiser son bénéfice ?
   Le bénéfice, noté B, produit par la vente de x kg de glace 1 et y kg de glace 2 est ainsi exprimé par $B = 3x + 4y$.
   Or :

$$3x + 4y = B \iff y = \frac{-3}{4}x + \frac{B}{4}$$

   Il s'agit donc de déterminer la plus grande valeur possible B, ainsi que les valeurs de x et y correspondantes, de sorte que la droite d'équation $y = \frac{-3}{4}x + \frac{B}{4}$ intersecte tout de même la zone valide...
   Puisque la pente de la droite d'équation $y = \frac{-3}{4}x + \frac{B}{4}$ est $\frac{-3}{4}$, comprise entre les pentes des droites d'équations $y = -2x + 16$ et $y = \frac{-2}{3}x + 8$, alors la droite recherchée est celle passant par le point de coordonnées $(6, 4)$.
   Or, si $x = 6$ et $y = 4$, l'équation $B = 3x + 4y$ donne $B = 34$.

   Conclusion : le bénéfice maximal possible est de 34€, obtenu en vendant 6 kg de glace 1 et 4 kg de glace 2.

●○○○ Exercice 4 - Parité / imparité

1. Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction f.

   1.a. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^4 + 1}$

   f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0 ; et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{(-x)^4 + 1} \\ &= -\frac{x}{x^4 + 1} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

   Conclusion : f est impaire.

   1.b. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

   f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0 ; et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{x^2}{x^2 + 1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : f est paire.

1.c. $f : x \longmapsto e^{x^2}$

f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0 ; et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{(-x)^2} \\ &= e^{x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : f est paire.

1.d. $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$

f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0 ; mais :

$$f(1) = 0 \;\; ; \;\; f(-1) = -1$$

Puisque $f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas paire.
Puisque $f(-1) \neq -f(1)$, la fonction f n'est pas impaire.

Conclusion : f n'est ni paire ni impaire.

1.e. $f : x \longmapsto e^x - e^{-x}$

f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0 ; et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-x} - e^{x} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : f est impaire.

1.f. $f : x \longmapsto x^2 \ln(x)$

f est définie sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction f ne peut donc pas être paire, ni impaire.

Conclusion : f n'est ni paire ni impaire.

1.g. $f : x \longmapsto x^3 + \dfrac{1}{x}$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0 ; et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \\ &= \frac{1}{-x} \\ &= -x^3 - \frac{1}{x} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : f est impaire.

2. Que dire de la somme de deux fonctions paires ? Deux fonctions impaires ? D'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Mêmes questions avec le produit de deux fonctions.

- **La somme de deux fonctions paires est paire.**
  Soient f et g deux fonctions paires définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. La fonction $f+g$ est ainsi définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
  - Puisque f et g sont paires, les ensembles $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ sont symétriques par rapport à 0. C'est donc également le cas de $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. En effet, si $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, alors $x \in \mathcal{D}_f$ ET $x \in \mathcal{D}_g$; et donc $-x \in \mathcal{D}_f$ ET $-x \in \mathcal{D}_g$, c'est à dire $-x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
  - Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

  $$\begin{aligned} (f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= f(x) + g(x) \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont paires} \\ &= (f+g)(x) \end{aligned}$$

  Par conséquent, $f+g$ est paire.

  Conclusion : si f et g sont paires, alors $f+g$ est paire.

De même :

- **La somme de deux fonctions impaires est impaire.**
- **Le produit de deux fonctions paires est pair.**
- **La somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire n'est, en général, ni paire ni impaire.**
  - Pour cela, des contre-exemples suffisent : $f : x \longmapsto x^2$ est paire, $g : x \longmapsto x$ est impaire et pourtant, $f+g$ n'est ni paire ni impaire.
  - Allons-plus loin, et cherchons à quelles conditions sur f et g (f étant paire et$g$ impaire), la fonction $f+g$ serait paire (ou impaire).
    Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$; supposons que f est paire et g impaire. La fonction $f+g$ est ainsi définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0... et :

    $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ (f+g)(-x) = (f+g)(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) \quad \text{car } f \text{ est paire} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = g(x) \quad \text{car } g \text{ est impaire} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -g(x) = g(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0 \end{aligned}$$

    Autrement dit :

$$f+g \text{ est paire si, et seulement si, } g \text{ est la fonction constante nulle.}$$

De même, on obtient :

$$f+g \text{ est impaire si, et seulement si, } f \text{ est la fonction constante nulle.}$$

- **Le produit de deux fonctions impaires est pair.**
- **Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est impair.**

3. Démontrer qu'une fonction polynômiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées est paire.

   VRAI

   Soit f une fonction polynômiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées, notées α et $-\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe alors un réel non nul a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x+\alpha)(x-\alpha) = a(x^2 - \alpha^2)$.

   Par conséquent, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ (symétrique par rapport à 0), est paire.

   Conclusion : une fonction polynômiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées est paire.

●○○○ Exercice 5 - Vrai ou faux sur la parité

Dans chaque cas, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si $f(1) = f(-1)$, alors f est paire.

   FAUX

   Par exemple, si $f : x \longmapsto x(x-1)(x+1)$, alors $f(1) = f(-1) = 0$ et pourtant $f(-2) \neq f(2)$: f n'est pas paire (en revanche, elle est impaire).

2. Si f est impaire, alors $f(2) \neq f(-2)$.

   FAUX

   La fonction $f : x \longmapsto x(x-2)(x+2)$ est impaire (car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 4x...$) et pourtant $f(2) = f(-2) = 0$.

3. Si f est paire, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(-x)$.

   VRAI

   Si f est paire, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$... donc il en existe bien au moins un...

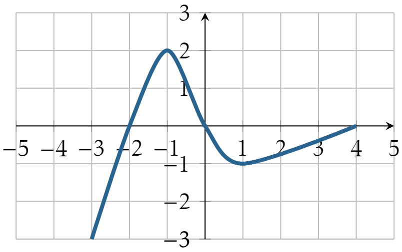
4. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = -f(x)$, alors f ne peut pas être paire.

   FAUX

   Posons $f : x \longmapsto (x+1)(x-1)$. Pour $x = 1$, on obtient $f(-x) = -f(x)$ (puisque $f(-1) = 0$ et $f(1) = 0$) et pourtant f est paire ($\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$).

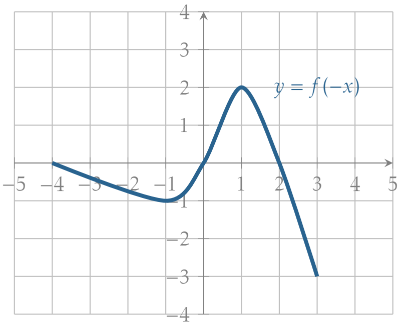
●○○○ Exercice 6 - Autour des courbes...

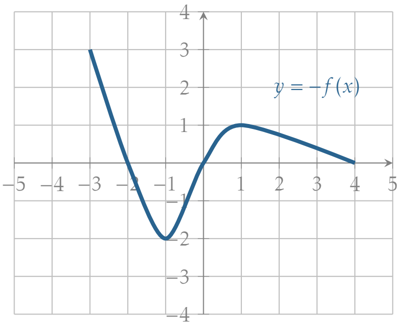
Considérons f la fonction définie sur $[-3;4]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

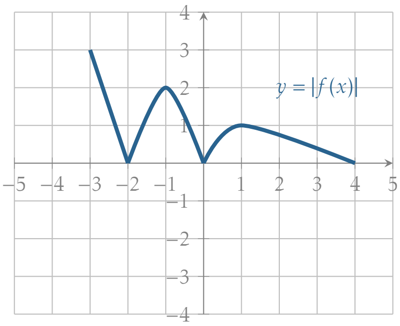


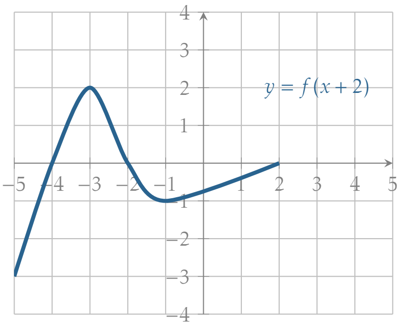
Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous et représenter sa courbe sur le même graphique.

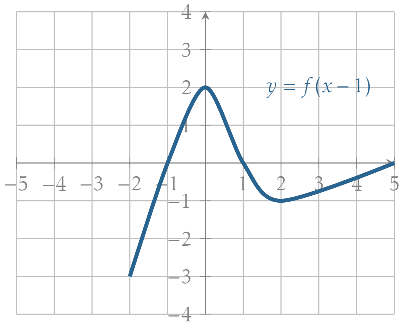
- $g : x \longmapsto f(-x)$
- $h : x \longmapsto -f(x)$
- $i : x \longmapsto |f(x)|$
- $j : x \longmapsto f(x+2)$
- $k : x \longmapsto f(x-1)$











●●○○ Exercice 7 - Variations et équivalence...

1. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I. Établir : $\forall a, b \in \mathrm{I}, \big(f(a) = f(b) \iff a = b\big)$.

Soient $a, b \in \mathrm{I}$. Par double implication :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Rien à faire (on applique f !).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Montrons que $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$.
Pour cela, raisonnons par contraposée ; c'est à dire prouvons : $a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$.
Quitte à échanger a et b, on peut supposer que $a < b$. En appliquant f, est strictement croissante sur I, à cette inégalité, on obtient :
$$f(a) < f(b)$$
En particulier :
$$f(a) \neq f(b)$$
La contraposée de l'implication voulue étant vraie, elle l'est également et on a ainsi établi :
$$\forall a, b \in \mathrm{I}, \big(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b\big)$$

Conclusion : si f est strictement croissante, alors : $\forall a, b \in \mathrm{I}, \big(a < b \iff f(a) < f(b)\big)$.

Petite remarque
On adapte dans le cas d'une fonction strictement décroissante...

2. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I. Établir : $\forall a, b \in \mathrm{I}, \big(f(a) < f(b) \iff a < b\big)$.

Soient $a, b \in \mathrm{I}$. Par double implication :

$\boxed{\Longleftarrow}$ C'est la définition d'une fonction strictement croissante sur I.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Montrons que $f(a) < f(b) \Longrightarrow a < b$.
Pour cela, raisonnons par contraposée ; c'est à dire prouvons : $a \geq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$.
Supposons alors que $a \geq b$.
En appliquant f, est strictement croissante sur I, à cette inégalité, on obtient :
$$f(a) \geq f(b)$$
La contraposée de l'implication voulue étant vraie, elle l'est également et on a ainsi établi :
$$\forall a, b \in \mathrm{I}, \big(f(a) < f(b) \Longrightarrow a < b\big)$$

Conclusion : si f est strictement croissante, alors : $\forall a, b \in \mathrm{I}, \big(a < b \iff f(a) < f(b)\big)$.

Petite remarque
On adapte dans le cas d'une fonction strictement décroissante...

3. Soit f une fonction croissante sur un intervalle I. La proposition "$\forall a, b \in \mathrm{I}, \big(f(a) \leq f(b) \iff a < b\big)$" est-elle vraie ?

L'implication réciproque est vraie, puisqu'il s'agit de la définition de fonction croissante...
En revanche, l'implication directe est fausse. Pour le justifier, considérons :

- la fonction $f : x \longmapsto 43$
- $a = 2$
- $b = 1$

On a $f(a) = f(b)$, donc $f(a) \leq f(b)$, et pourtant, a n'est pas strictement inférieur à b.

En gros...
Pour résumer ce que l'on a vu dans cet exercice : on peut "désappliquer" une fonction strictement monotone à une égalité ou une inégalité (stricte ou large)...

●○○○ Exercice 8 - Propriétés sur exp et ln

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$: $\ln(8)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln(6) - \ln(3)$; $\ln(2e^2)$.

$$\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$$
$$\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$$
$$\ln(6) - \ln(3) = \ln\left(\frac{6}{3}\right) = \ln(2)$$
$$\ln(2e^2) = \ln(2) + \ln(e^2) = \ln(2) + 2$$

2. Simplifier (x désigne un réel quelconque) :

2.a. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{2x}} = e^{x^2 - 2x}$

2.b. $\dfrac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}} = e^{-1}$

2.c. $e^{2\ln x} = x^2$

2.d. $-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\ln(2)$

2.e. $\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 0$

2.f. $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e}) = \dfrac{5}{2}$

2.g. $\ln(e^2\sqrt{e}) + \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{3}{2}$

2.h. $\dfrac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)} = \dfrac{5}{3}$

2.i. $\sqrt{e^{2x}}e^{-x} = 1$

2.j. $\dfrac{e^{x^2-2x} \times (e^x)^2}{(e^{2x})^3} = e^{x^2-6x}$

●●○○ Exercice 9 - Irrationnel !

Démontrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un irrationnel.

Par l'absurde, supposons que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est rationnel ; c'est à dire supposons qu'il existe $n, m \in \mathbb{Z}$, avec $m \neq 0$, tels que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = \dfrac{n}{m}$.

On obtient ainsi : $m\ln(2) = n\ln(3)$; puis, en appliquant l'exponentielle :

$$2^m = 3^n$$

Ce qui implique nécessairement $n = 0$ et $m = 0$: absurde.

Conclusion : $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un irrationnel.

●●○○ Exercice 10 - Résolution d'équations avec les fonctions usuelles

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Petite remarque

A chaque fois, je me suis posé la question de l'ensemble de définition de l'équation... Comme nous l'évoquions ensemble, ce n'est pas nécessaire. Par exemple, je ne l'ai pas fait dans l'exercice suivant.

1. $\ln(1+e^x) = 2$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(1+e^x) = 2 &\iff 1+e^x = e^2 \quad \text{par stricte croissance de l'exponentielle sur } \mathbb{R} \\ &\iff e^x = e^2 - 1 \\ &\iff x = \ln(e^2-1) \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+, \text{ car } e^2-1>0 \end{aligned}$$

2. $(1+\ln(x))^2 = 4$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\begin{aligned} (1+\ln(x))^2 = 4 &\underset{\text{Réflexe !}}{\iff} \begin{cases} 1+\ln(x) = 2 \\ \text{ou} \\ 1+\ln(x) = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ln(x) = 1 \\ \text{ou} \\ \ln(x) = -3 \end{cases} \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} x = e \\ \text{ou} \\ x = e^{-3} \end{cases} \end{aligned}$$

✘ Attention !

Pour résoudre une équation du type $X^2 = 4$, inutile d'appliquer la fonction racine carrée : c'est du cours !! On rappelle au passage que pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\sqrt{X^2} = |X|$. Au pire, tu t'aides de la courbe de la fonction carrée...

3. $\sqrt{1-\ln(x)} = 5$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\ln(x)} = 5 &\iff 1-\ln(x) = 25 \quad \text{par stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+ \\ &\iff \ln(x) = -24 \\ &\iff x = e^{-24} \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. $|\ln(x)| = 1$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\begin{aligned} |\ln(x)| = 1 &\iff \begin{cases} \ln(x) = 1 \\ \text{ou} \\ \ln(x) = -1 \end{cases} \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} x = e \\ \text{ou} \\ x = e^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

5. $|e^x| = 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |e^x = 1| &\iff \begin{cases} e^x = 1 \\ \text{ou} \\ e^x = -1 : \text{impossible} \end{cases} \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

6. $|x+3| = -1$
L'équation $|x+3| = -1$ n'a pas de solution, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x+3| \geq 0$.

7. $|x+5| = |2x-7|$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|x+3| = |2x-7| \iff \begin{cases} x+3 = 2x-7 \\ \text{OU} \\ x+3 = -(2x-7) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 12 \\ \text{OU} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

8. $\lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$
L'équation $\lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est un entier.

9. $\lfloor x^2 \rfloor = 9$
Soit $x_i n\mathbb{R}$. On a :

$$\lfloor x^2 \rfloor = 9 \iff 9 \leq x^2 < 10 \iff x \in]-\sqrt{10};-3] \cup [3;\sqrt{10}[$$

10. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$2x^4 + x^2 - 1 = 0 \iff \begin{cases} X = x^2 \\ 2X^2 + X - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = x^2 \\ X = -1 \text{ OU } X = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -1 : \text{impossible} \\ \text{OU} \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{1}{2}} \\ \text{OU} \\ x = -\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

11. $(\ln(x))^2 - 3\ln x + 2 = 0$
Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$(\ln(x))^2 - 3\ln x + 2 = 0 \iff \begin{cases} X = \ln(x) \\ X^2 - 3X + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = \ln(x) \\ X = 1 \text{ OU } X = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) = 1 \\ \text{OU} \\ \ln(x) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = e \\ \text{OU} \\ x = e^{-2} \end{cases}$$

12. $e^{2x} = 2e^x - 1$
Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$e^{2x} = 2e^x - 1 \iff (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2X + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = e^x \\ X = 1 \end{cases} \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

13. $e^x + e^{-x} = 2$
Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$e^x + e^{-x} = 2 \iff e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = 0 \iff \frac{(e^x)^2 + 1 - 2e^x}{e^x} = 0 \quad \text{car } e^x \neq 0$$
$$\iff (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \quad \text{comme la question précédente} \iff x = 0$$

●●○○ Exercice 11 - Résolution d'inéquations avec les fonctions usuelles

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x+5| < 3$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|x+5| < 3 \iff -3 < x+5 < 3 \iff -8 < x < -2$$

☞ Rappel...
Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}$:
$$|X| = |Y| \iff \begin{cases} X = Y \\ \text{OU} \\ X = -Y \end{cases}$$

✘ Attention !
On évite les abominations de calculs... $e^{2x} = (e^x)^2$: règle de calculs sur les puissance, bien connue depuis le collège tout de même !!

➠ Réflexe !
T'es coincé et tu vois e^{-x}... alors tu utilises $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et tu fais du calcul...

♡ Astuce du chef ! ♡
Tu t'aides de la représentation graphique de la fonction valeur absolue... Et si résoudre graphiquement une inéquation pose souci : réfléchis un peu !

2. $|x-2| \leq 0$ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |x-2| \leq 0 &\iff x-2=0 \\ &\iff x=2 \end{aligned}$$

3. $|2x-1| \geq 4$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |2x-1| \geq 4 &\iff \left\{\begin{array}{l} 2x-1 \geq 4 \\ \text{ou} \\ 2x-1 \leq -4 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x \geq \dfrac{5}{2} \\ \text{ou} \\ x \leq \dfrac{-3}{2} \end{array}\right. \\ &\iff x \in \left]-\infty; \frac{-3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[\end{aligned}$$

♡ **Astuce du chef !** ♡
Tu t'aides de la représentation graphique de la fonction valeur absolue... Et si résoudre graphiquement une inéquation pose souci : réfléchis un peu !

4. $|9-x^2| \geq -2$
L'inéquation $|9-x^2| \geq -2$ est vérifiée pour tout réel x.

5. $5-x^2 < 0$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 5-x^2 < 0 &\iff x^2 > 5 \\ &\iff x \in]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[\end{aligned}$$

♡ **Astuce du chef !** ♡
Tu t'aides de la représentation graphique de la fonction valeur absolue... Et si résoudre graphiquement une inéquation pose souci : réfléchis un peu !

6. $\ln\left(10-x^2\right) > 0$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \ln\left(10-x^2\right) > 0 &\iff 10-x^2 > 1 \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff x^2 < 9 \\ &\iff x \in]-3;3[\end{aligned}$$

7. $0,5^x < 0,1$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 0.5^x < 0.1 &\iff \ln(0.5^x) < \ln(0.1) \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff x\ln(0.5) < \ln(0.1) \quad \text{car } \ln(0.5) < 0 \\ &\iff x > \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.5)} \\ &\iff x > \frac{-\ln(10)}{-\ln(2)} \\ &\iff x > \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

8. $e^{2x-1} \geq 1$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} e^{2x-1} \geq 1 &\iff 2x-1 \geq 0 \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9. $\dfrac{1}{e^x+1} < 2$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x+1} < 2 &\iff e^x+1 > \frac{1}{2} \quad \text{par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff e^x > \frac{-1}{2} : \text{toujours vrai} \end{aligned}$$

10. $2^x \leq 3$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 2^x \leq 3 &\iff \ln(2^x) \leq \ln(3) \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff x\ln(2) \leq \ln(3) \quad \text{car } \ln(2) > 0 \\ &\iff x \leq \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

●●○○ Exercice 12 - Fonction partie fractionnaire

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
Puisque $x \in Z$, on a :

$$\lfloor x \rfloor = x$$

et donc :

$$f(x) = 0$$

2. Calculer $f(2,5)$ et $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$.
$f(2,5) = 2,5-2 = 0,5$ et $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3}$

3. Pour $x \in [0;1[$, simplifier l'expression de $f(x)$.
Soit $x \in [0;1[$. On a ainsi $\lfloor x \rfloor = 0$, et donc $f(x) = x$.

4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x+1) = x+1-\lfloor x+1 \rfloor$$

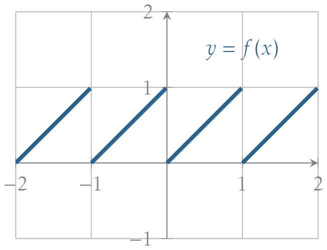
Or, on sait que $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. D'où :

$$f(x+1) = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$ (la fonction f est 1-périodique).

5. En déduire la courbe représentative de f.

Puisque $f(x) = x$ sur $[0;1[$ et que f est 1-période, on obtient :



●○○○ Exercice 13 - Calculs de dérivées

Justifier que chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle donné et déterminer sa dérivée.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

Posons $u : x \longmapsto x^2$ de sorte que $f = \dfrac{1}{u}$.

u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

♡ Astuce du chef ! ♡

On écrit $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ et on dérive sous cette forme...

2. $f : x \longmapsto \dfrac{5}{x^7}$ sur $]0;+\infty[$

Posons $u : x \longmapsto x^7$ de sorte que $f = \dfrac{5}{u}$.

u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-35}{x^8}$$

3. $f : x \longmapsto x\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$

Posons $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \ln(x)$ de sorte que $f = uv$.

u et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$

Posons $u : x \longmapsto x^2$ de sorte que $f = \dfrac{u}{\exp}$.

u et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} \\ &= \frac{1-x}{e^x} \end{aligned}$$

5. $f : x \longmapsto \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$

Posons $u : x \longmapsto 1+x^2$ de sorte que $f = \ln \circ u$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

6. $f : x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Posons $u : x \longmapsto 1+x^2$ de sorte que $f = \sqrt{.} \circ u$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

☞ Rappel...

La fonction $\sqrt{.}$ n'est pas dérivable en 0 !!

7. $f : x \longmapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$
Posons $u : x \longmapsto -x^2$ de sorte que $f = \exp \circ u$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

8. $f : x \longmapsto \sqrt{x}e^x$ sur $]0;+\infty[$
$\sqrt{.}$ et exp sont dérivables sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}e^x \\ &= e^x\left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

9. $f : x \longmapsto \left(\ln(1+x)\right)^4$ sur $\mathbb{R}^+$
Posons $u : x \longmapsto 1+x$ de sorte que $f = \left(\ln \circ u\right)^4$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = 4\frac{1}{1+x}\ln(1+x)^3$$

☞ Rappel...
$\left(w^n\right)' = nw'w^{n-1}$

10. $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$
Posons $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto -x^2$ de sorte que $f = u \exp \circ v$.
v est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\exp \circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; et comme u est également dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}(1-2x^2) \end{aligned}$$

Petite remarque
Pour des sommes et des produits simples, on pourra se contenter de phrases du type "f est dérivable sur I comme somme / produit de fonctions dérivables sur I". Dans les autres cas (quotients, composées), on détaille !!

●●○○ Exercice 14 - Étude de fonctions

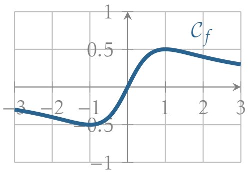
Pour chaque fonction ci-dessous :

- déterminer son ensemble de définition,
- étudier sa parité,
- déterminer sa dérivée,
- dresser son tableau de variations,
- représenter l'allure de sa courbe.

Pas de détails pour les questions faciles, je donnerai seulement les résultats.

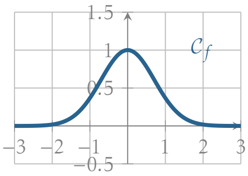
1. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
f est définie sur $\mathbb{R}$
f est impaire
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	



2. $f : x \longmapsto e^{-x^2}$
f est définie sur $\mathbb{R}$
f est paire
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2xe^{-x^2}$

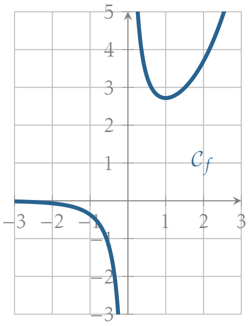
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	1	↘	



3. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$
f n'est ni paire, ni impaire
$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

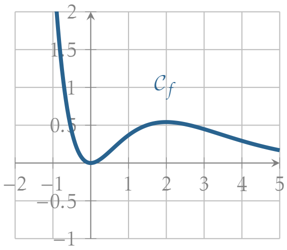
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	e	$\nearrow$	



4. $f : x \longmapsto x^2e^{-x}$

f est définie sur $\mathbb{R}$
f n'est ni paire, ni impaire
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x(2-x)e^{-x}$

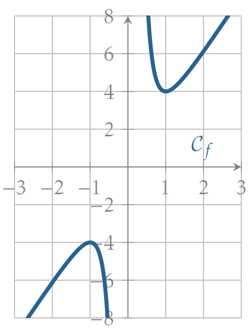
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\exp(-2)$	$\searrow$	



5. $f : x \longmapsto 3x + \dfrac{1}{x^3}$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$
f est impaire
$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{3(x^4-1)}{x^4}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-4	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

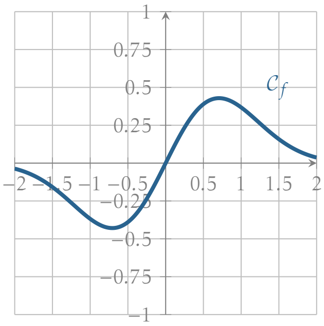


6. $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$

f est définie sur $\mathbb{R}$
f est impaire

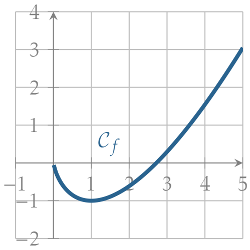
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$-\sqrt{2}\frac{\exp(-\frac{1}{2})}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}\frac{\exp(-\frac{1}{2})}{2}$	$\searrow$	



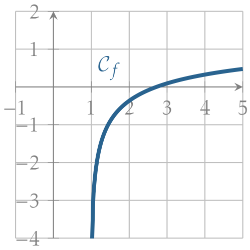
7. $f : x \longmapsto x\ln(x) - x$
f est définie sur $\mathbb{R}_*^+$
f n'est ni paire ni impaire
$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f'(x) = \ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	



8. $f : x \longmapsto \ln(\ln(x))$
f est définie sur $]1;+\infty[$
f n'est ni paire ni impaire
$\forall x \in]1;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
f	$\|$	$\nearrow$	

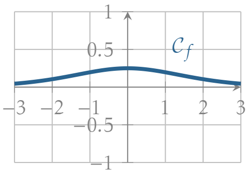


9. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$
f est définie sur $\mathbb{R}$
f est paire, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{-x} \times (e^x)^2}{(1+e^{-x})^2 \times (e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	



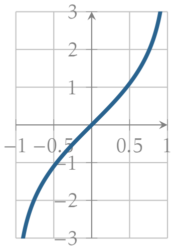
10. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

f est définie sur $]-1;1[$
f est impaire, en effet, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)(1+x)}$

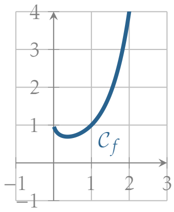
x	-1		1
$f'(x)$	‖	$+$	‖
f	‖	$\nearrow$	‖



11. $f : x \longmapsto x^x$

$f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}_*^+$
f n'est ni paire ni impaire
$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f'(x) = (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$

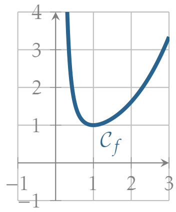
x	0		$\exp(-1)$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	$\exp(-\exp(-1))$	$\nearrow$	



12. $f : x \longmapsto x^{\ln(x)}$

$f(x) = x^{\ln(x)} = e^{\ln(x)^2}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}_*^+$
f n'est ni paire ni impaire
$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}e^{\ln(x)^2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	



●●○○ Exercice 15 - Étude de deux fonctions

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + x\ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x) - x + 1$$

1. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_*^+$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x} - 1 \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{1-x}{x} \end{aligned}$$

D'où :

x	0	1	$+\infty$
signe de $g'(x)$	‖ $+$	0	$-$
variations de g	‖ ↗	0	↘

2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = g(x)$.

$f = u + v \times \ln$, où $u : x \longmapsto \frac{-1}{2}x^2$ et $v : x \longmapsto x$.

Puisque v et ln sont dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, $v \times \ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$; et puisque u l'est également, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x + \ln(x) + x\frac{1}{x} \\ &= \ln(x) - x + 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = g(x)$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$.

La question 1 permet d'obtenir le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_*^+$: son maximum est 0 (atteint en 0), donc : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $g'(x) \leq 0$.

Et comme $f' = g$, on en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$.

x	0	1	$+\infty$
signe de $f'(x) = g(x)$	‖ $-$	0	$-$
variations de f	‖ ↘	$-0,5$	↘

●●○○ Exercice 16 - Étude de deux fonctions

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

> **✘ Attention !**
> Il est faux de dire : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(-x) \neq f(x)$ (car $f(-0) = f(0)$...) ! La négation de "f est paire" est : "$\exists x \in \mathcal{D}_f \ / \ f(-x) \neq f(x)$".

1. Étudier la parité de f.

Puisque l'ensemble de définition de f, qui est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction f n'est ni paire ni impaire.

2. Déterminer la dérivée de f.

Posons $u : x \longmapsto x^3 + 4$ et $v : x \longmapsto x - 1$ de sorte que $f = \frac{u}{v}$.

Puisque u et v sont dérivables sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ et que v ne s'annule pas sur ces intervalles, la fonction f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$; et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - (x^3+4)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 4}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

3. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

3.a. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, étudions le signe de la dérivée de g.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x^2 - 6x \\ &= 6x(x-1) \end{aligned}$$

On en déduit :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $6x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signe de $x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de g		$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	

3.b. Calculer $g(2)$ puis en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Sans difficulté : $g(2) = 0$.Ensuite :

- Le maximum de g sur $]-\infty;1[$ est -4, donc : $\forall x \in]-\infty;1[,\ g'(x) < 0$.
- g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et $g(2) = 0$, donc : $\forall x \in]1;+\infty[,\ g'(x) > 0$.

Petite remarque
Nul besoin de mentionner les variations ici : on prend l'argument le plus simple !

Pour résumer :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

4. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Les limites de f ne sont pas demandées.*

Il suffit de remarquer que :

$$\forall x \neq 1,\ f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

D'après le résultat de la question précédente, on obtient ainsi :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	||	$\searrow$	12	$\nearrow$	

5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$.
Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.

- $\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$, autrement dit, $\mathcal{T}_0$ a pour équation réduite $y = -4x - 4$.
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - (-4x-4) &= \frac{x^3+4}{x-1} + 4(x+1) \\ &= \frac{x^3+4+4(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \frac{x^3+4+4x^2-4}{x-1} \\ &= \frac{x^2(x+4)}{x-1} \end{aligned}$$

Or :

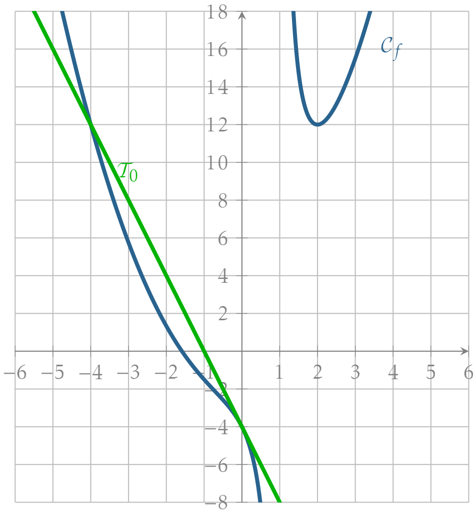
x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^2(x+4)}{x-1}$		$+$	0	$-$	0	$-$	||	$+$	

Ainsi :

$$\forall x \in]-\infty;-4[,\ f(x) > -4x-4$$
$$\forall x \in]-4;1[,\ f(x) \leq -4x-4$$
$$\forall x \in]1;+\infty[,\ f(x) > -4x-4$$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}_0$ sur $]-\infty;-4[$ et $]1;+\infty[$;
$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{T}_0$ sur $]-4;1[$;
$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}_0$ se rencontrent en les points de coordonnées $(-4;12)$ et $(0;-4)$.

6. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi.



●●○○ Exercice 17 - Manipuler les inégalités

1. Démontrer : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$.

   Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$.
   Puisque $n \geq 0$, on a :
   $$n^2+n \geq n^2 \geq n^2-n$$
   C'est à dire :
   $$n(n+1) \geq n^2 \geq n(n-1)$$
   Mais comme $n \geq 2$, on a $n(n-1) > 0$ (et donc n^2 et $n(n+1)$ sont également strictement positifs). On applique alors la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, d'où :
   $$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

   Conclusion : $\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$

2. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{\dfrac{3}{x+2}} \geq \sqrt{\dfrac{3}{x+5}}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :
   $$x+2 \leq x+5$$
   Mais comme $x \geq 0$, on a $x+2>0$. On applique alors la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, d'où :
   $$\frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{x+5}$$
   En multipliant par 3, strictement positif, on obtient :
   $$\frac{3}{x+2} \geq \frac{3}{x+5}$$
   Puis en appliquant la fonction racine carrée, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :
   $$\sqrt{\frac{3}{x+2}} \geq \sqrt{\frac{3}{x+5}}$$

   Conclusion : $\forall x \geq 0,\ \sqrt{\dfrac{3}{x+2}} \geq \sqrt{\dfrac{3}{x+5}}$.

3. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{aligned} e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2} &\iff 2x+1 \leq (x+1)^2 \qquad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff 2x+1 \leq x^2+2x+1 \\ &\iff 0 \leq x^2 \end{aligned}$$
   Cette dernière inégalité est vraie. Étant équivalente à la première, on en déduit que l'inégalité $e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$ est également vraie.

   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.

> **Petite remarque**
> Dans l'éventualité où le point de départ de notre démonstration ne nous apparaît pas clairement, il est possible de raisonner par équivalences pour transformer l'inégalité (ou plus généralement l'encadrement, ou l'égalité) en une inégalité plus élémentaire à vérifier.

4. Démontrer : $\forall x \in [0;1],\ 0 < e^{-x}+x \leq 2$.

   Soit $x \in [0;1]$. On a :
   $$0 \leq x \leq 1$$
   D'où, en multipliant par -1, négatif :
   $$0 \geq -x \geq -1$$
   Puis, en appliquant l'exponentielle, strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
   $$e^0 \geq e^{-x} \geq e^{-1}$$

Et ainsi :
$$1 \geq e^{-x} > 0$$
En ajoutant x :
$$1 + x \geq e^{-x} + x > x$$
Et comme $x \in [0;1]$, on obtient finalement (par transitivité) :
$$2 \geq e^{-x} + x > 0$$

Conclusion : $\forall x \in [0;1],\ 0 < e^{-x} + x \leq 2$.

5. Encadrer les expressions suivantes sur les intervalles donnés :

5.a. x^2 sur $[-3;1]$

Pour tout $x \in [-3;1]$: $0 \leq x^2 \leq 9$.

5.b. $e^{(1-x)^2}$ sur $[2;4]$

Soient $x \in [2;4]$. On a ainsi :
$$-2 \geq -x \geq -4$$
D'où :
$$-1 \geq 1 - x \geq -3$$
Et par stricte décroissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^-$:
$$1 \leq (1-x)^2 \leq 16$$
Enfin, par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:
$$e^1 \leq e^{(1-x)^2} \leq e^{16}$$

Conclusion : pour tout $x \in [2;4]$, $e \leq e^{(1-x)^2} \leq e^{16}$.

Petite remarque
La connaissance des variations de f permet également très facilement d'encadrer $f(x)$ sur un intervalle donné !

●●○○ Exercice 18 - Des inégalités classiques

1. **1.a.** En étudiant la fonction $x \longmapsto e^x - x$, démontrer que pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$.

La fonction $f : x \longmapsto e^x - x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = e^x - 1$$
De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} e^x - 1 \geq 0 &\iff e^x \geq 1 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$
par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$

D'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
variaitons de f	$\searrow$	1	$\nearrow$

On remarque que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$, égal à 1, et atteint en $x = 0$.
Par conséquent :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - x \geq 1$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$.

1.b. En déduire que pour tout réel positif x : $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

Posons $g : x \longmapsto e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x - 1 - x$$
Or, la question précédente implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \geq 0$. D'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	0	$+$
variations de f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

On remarque que g possède un minimum sur $\mathbb{R}^+$, égal à 0, et atteint en $x = 0$.
Par conséquent :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \geq 0$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ et $g : x \longmapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.
Les fonctions f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & \dfrac{1}{1+x} - 1 + x \\ & = & \dfrac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} \\ & = & \dfrac{x^2}{1+x} \end{array}$$

D'où :

x	0 $\quad +\infty$
signe de $f'(x)$	0 $\quad -$
variations de f	0 $\searrow$

;

x	0 $\quad +\infty$
signe de $g'(x)$	0 $\quad +$
variations de g	0 $\nearrow$

On en déduit donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) \leq 0 \ \ ; \ \ g(x) \geq 0$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \ln(1+x) \leq x \ \ ; \ \ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

●●●○ Exercice 19 - Démonstrations sur la fonction exponentielle...

Dans cet exercice, on suppose inconnues les fonctions exponentielle et logarithme népérien.
On admet qu'il existe au moins une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$(1) \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ \ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Dans toute la suite, f désignera donc une telle fonction.
Le but de l'exercice est d'établir un certain nombre de propriétés sur cette fonction f.

1. **1.a.** Démontrer que la fonction $x \longmapsto f(x) \times f(-x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.
Soit F : $x \longmapsto f(x) \times f(-x)$. Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(-x)$ l'est également ; par conséquent, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} F'(x) & = & f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ & = & f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ & = & 0 \end{array} \quad \text{car } f' = f$$

La fonction F est donc constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $F(0) = f(0)f(-0) = 1$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) = 1$.

1.b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$, on en déduit le résultat voulu.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

1.c. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il un réel x_0 tel que $f(x_0) \leq 0$.
D'après la question précédente, $f(x_0) \neq 0$; donc $f(x_0) < 0$.
On a ainsi :
- $f(x_0) < 0$
- $f(0) = 1 > 0$
- f est continue sur $\mathbb{R}$, car dérivable sur $\mathbb{R}$

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois entre x_0 et 1 : ce qui contredit le résultat précédent.
L'hypothèse faite est donc fausse : il n'existe pas de réel x_0 tel que $f(x_0) \leq 0$.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

2. *Le but de cette question est d'établir l'unicité d'une fonction vérifiant les conditions (1).*
On suppose qu'il existe une fonction g vérifiant les conditions (1). La question 1.b. permet de définir la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{g(x)}{f(x)}$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que h est constante sur $\mathbb{R}$ puis conclure.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} h'(x) & = & \dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2} \\ & = & \dfrac{g(x)g(x) - g(x)f(x)}{f(x)^2} \\ & = & 0 \end{array} \quad \text{car } f' = f \text{ et } g' = g$$

La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$.
Et comme $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = 1$$

C'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = f(x)$$

Conclusion : il existe une unique fonction vérifiant les conditions (1).

On peut donc maintenant énoncer la définition suivante :

Définition 1 - Fonction exponentielle

La seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions (1) est appelée **fonction exponentielle**, notée exp.

3. **Étude de la fonction exp.**

3.a. Étudier les variations de exp sur $\mathbb{R}$.

Puisque $\exp' = \exp$ et que, d'après la question 1(c), $\exp'(x) > 0$ pour tout réel x, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de exp au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de $\mathcal{C}_{\exp}$ par rapport à cette tangente.

- Notons $\mathcal{T}_0$ cette tangente. On a : $\mathcal{T}_0 : y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$, c'est à dire $\mathcal{T}_0 : y = x+1$.
- Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_{\exp}$ par rapport à $\mathcal{T}_0$, étudions le signe de $\exp(x) - (x+1)$ sur $\mathbb{R}$.
  Posons ainsi $g : x \longmapsto \exp(x) - x - 1$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp'(x) - 1 \\ &= \exp(x) - 1 \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \exp(x) - 1 \geq 0 &\iff \exp(x) \geq 1 \\ &\iff \exp(x) \geq \exp(0) \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	−	0	+
variations de g	$\searrow$	0	$\nearrow$

g admet alors un minimum, égal à 0, atteint en 0.
Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geq x + 1$$

Conclusion : $\mathcal{C}_{\exp}$ est partout au dessus de $\mathcal{T}_0$ (et elle rencontre $\mathcal{T}_0$ seulement au point de tangence, de coordonnées $(0;1)$).

4. **Relation fonctionnelle.**

4.a. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Puisque pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$, on peut considérer la fonction g_y, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_y(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$$

Démontrer que la fonction g_y est constante sur $\mathbb{R}$.

La fonction g_y est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g_y'(x) &= \frac{\exp'(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp'(x)}{\exp(x)^2} \quad \text{car } \exp' = \exp \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : g_y est constante sur $\mathbb{R}$.

4.b. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

D'après la question précédente, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_y(x) = g_y(0) = \exp(y)$$

Autrement dit :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$$

Conclusion : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

4.c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

- Sur $\mathbb{N}$: par récurrence immédiate, en utilisant le résultat précédent.
- Sur $\mathbb{Z}_*^-$.
  Soit $n \in \mathbb{Z}_*^-$. Il existe ainsi $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = -m$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \exp(nx) &= \exp(-mx) \quad \text{d'après la question 1.b.} \\ &= \frac{1}{\exp(mx)} \quad \text{d'après la première partie de cette question, puisque } m \in \mathbb{N}^* \\ &= \frac{1}{\exp(x)^m} \\ &= \exp(x)^{-m} \\ &= \exp(x)^n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

Exercice 20 - Maximum sur les entiers

Justifier l'existence et calculer la valeur de $\max\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sqrt[n]{n}\right)$.

On se demande un peu ce que vient faire cet exercice ici... Cela sous-entend que l'on doit travailler sur une certaine fonction. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$; nous allons donc étudier la fonction $f : x \longmapsto e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ puis justifier l'existence et déterminer $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^*}\big(f(x)\big)$.

- $f = \exp \circ g$, avec $g : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$; par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:
  $$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)e^{g(x)} \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2}e^{g(x)} \end{aligned}$$
- **Variations de f :**
  Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :
  $$x^2 > 0 \;\; ; \;\; e^{g(x)} > 0$$
  Et :
  $$\begin{aligned} 1-\ln(x) \geq 0 &\iff 1 \geq \ln(x) \\ &\iff e \geq x \end{aligned} \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R}$$
  D'où :

x	0	e	$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖ +	0	$-$
variations de f	‖ $\nearrow$	$e^{e^{-1}}$	$\searrow$

- Par conséquent, la fonction f admet un maximum en e, ce maximum valant $e^{e^{-1}}$.
  En ne considérant donc $f(n)$ que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque donc que $\max\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\big(f(n)\big)$ existe et qu'il est atteint pour $n = 2$ ou $n = 3$.
  Or : $f(2) = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$ et $f(3) = \sqrt[3]{3}$. D'où : $f(2)^3 = 2\sqrt{2}$ et $f(3)^3 = 3$. Or $\sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$ (car $2 < 9/4$), donc $2\sqrt{2} < 3$.
  Autrement dit : $f(2)^3 < f(3)^3$.
  Et par stricte croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$, on obtient alors : $f(2) < f(3)$.
  Sur $\mathbb{N}^*$, le maximum de f est $\sqrt[3]{3}$, atteint en 3.

Conclusion : $\max\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sqrt[n]{n}\right) = \sqrt[3]{3}$.

Exercice 21 - Logarithme et moyenne...

Démontrer que pour tous $x, y > 0$:
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$

Soit $y \in \mathbb{R}_*^+$. Posons $f_y : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - \dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$.
La fonction f_y est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:
$$\begin{aligned} f_y'(x) &= \frac{1}{x+y} - \frac{1}{2x} \\ &= \frac{x-y}{2x(x+y)} \end{aligned}$$
D'où :

x	0	y	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
f	‖ $\searrow$	0	$\nearrow$

Le minimum de f_y sur $\mathbb{R}_*^+$ est 0, ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\; f_y(x) \geq 0$$

Conclusion : pour tous $x, y > 0$: $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$.

Exercice 22 - Décomposition d'une fonction...

Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Procédons par analyse synthèse pour montrer qu'il existe deux uniques fonctions g, h, définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

- $f = g + h$
- g est paire
- h est impaire

- **Analyse.** Supposons qu'il existe deux fonctions g, h, définies sur $\mathbb{R}$ telles que :
  - $f = g + h$
  - g est paire
  - h est impaire

  Si nous arrivons à exprimer g et h en fonction de f, l'unicité sera prouvée. On a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(-x) + h(-x)$$
  Mais g est paire et h est impaire ; d'où :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x) - h(x)$$
  On obtient donc le système d'équations suivant :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$
  Par conséquent :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$
  Qu'avons-nous prouvé ? Nous avons montré que si deux telles fonctions g et h existent, alors elles sont nécessairement exprimées ainsi en fonction de f : ce qui prouve l'unicité (sous réserve d'existence).

  Conclusion : les seules candidats-solutions sont les fonctions $g : x \longmapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

- **Synthèse.** Il ne reste qu'à prouver l'existence, autrement dit, que les fonctions $g : x \longmapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ sont bien solution du problème.

  On vérifie aisément les trois points suivants :
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$
  - g est paire
  - h est impaire

  Conclusion : les fonctions $g : x \longmapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ sont bien solution du problème.

Conclusion : toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ; la fonction paire étant $x \longmapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et la fonction impaire $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Remarque

> Démonstration identique si f est définie sur un intervalle I (autre que $\mathbb{R}$) symétrique par rapport à 0.