# Exercices du chapitre 1

## Fonctions : généralités & fonctions usuelles

### ●○○○ Exercice 1 - Ensemble de définition

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2x-3}$
3. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x-3}$
4. $f : x \longmapsto \ln(x^2-5x-6)$
5. $f : x \longmapsto \ln(x+3)-\ln(2x+1)$
6. $f : x \longmapsto \sqrt{x^3+x^2+x}$
7. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{2x+1}{-x+4}}$
8. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)-1}$
9. $f : x \longmapsto \ln(e^x-1)$
10. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x+1)}$

### ●○○○ Exercice 2 - Positions relatives

Étudier les positions relatives des courbes des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

### ●○○○ Exercice 3 - Optimisation & régionnement du plan

Un glacier fabrique deux types de glace au chocolat pour lesquelles les quantités d'ingrédients nécessaires à la fabrication d'un kg de glace sont données dans le tableau ci-dessous.

| | glace 1 | glace 2 |
|---|---|---|
| doses de chocolat noir | 2 | 1 |
| doses de lait | 2 | 3 |
| doses de sucre | 0 | 1 |

Le stock du glacier est constitué de : 16 doses de chocolat, 24 doses de lait et 5 doses de sucre.

1. A l'aide d'un régionnement du plan, représenter l'ensemble des quantités $x$ de glace 1 et $y$ de glace 2 que le glacier peut produire.
2. Le bénéfice pour la vente d'un kg de glace 1 est de 3€, alors qu'il est de 4€ pour celui de glace 2. Quelle quantité de chaque glace le glacier doit-il produire pour maximiser son bénéfice ?

### ●○○○ Exercice 4 - Parité / imparité

1. Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction $f$.

   1.a. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^4+1}$

   1.b. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$

   1.c. $f : x \longmapsto e^{x^2}$

   1.d. $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$

   1.e. $f : x \longmapsto e^x - e^{-x}$

   1.f. $f : x \longmapsto x^2\ln(x)$

   1.g. $f : x \longmapsto x^3 + \dfrac{1}{x}$

2. Que dire de la somme de deux fonctions paires ? Deux fonctions impaires ? D'une fonction paire et d'une fonction impaire ? Mêmes questions avec le produit de deux fonctions.
3. Démontrer qu'une fonction polynômiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées est paire.

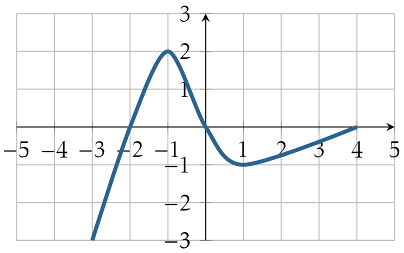
### ●○○○ Exercice 5 - Vrai ou faux sur la parité

Dans chaque cas, $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si $f(1) = f(-1)$, alors $f$ est paire.
2. Si $f$ est impaire, alors $f(2) \neq f(-2)$.
3. Si $f$ est paire, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(-x)$.
4. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = -f(x)$, alors $f$ ne peut pas être paire.

### ●○○○ Exercice 6 - Autour des courbes...

Considérons $f$ la fonction définie sur $[-3;4]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.




Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous et représenter sa courbe sur le même graphique.

- $g : x \longmapsto f(-x)$
- $h : x \longmapsto -f(x)$
- $i : x \longmapsto |f(x)|$
- $j : x \longmapsto f(x+2)$
- $k : x \longmapsto f(x-1)$

## ●●○○ Exercice 7 - Variations et équivalence...

1. Soit $f$ une fonction strictement croissante sur un intervalle I. Établir : $\forall a, b \in \mathrm{I}, \Big(f(a) = f(b) \iff a = b\Big)$.
2. Soit $f$ une fonction strictement croissante sur un intervalle I. Établir : $\forall a, b \in \mathrm{I}, \Big(f(a) \leq f(b) \iff a \leq b\Big)$.
3. Le résultat précédent est-il encore vrai si la croissance de $f$ n'est pas stricte ?

## ●○○○ Exercice 8 - Propriétés sur exp et ln

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$ : $\ln(8)$ ; $\ln(\sqrt{2})$ ; $\ln(6) - \ln(3)$ ; $\ln(2e^2)$.
2. Simplifier ($x$ désigne un réel quelconque) :

2.a. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{2x}}$

2.b. $\dfrac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$

2.c. $e^{2\ln x}$

2.d. $-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

2.e. $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2.f. $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$

2.g. $\ln(e^2\sqrt{e}) + \ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$

2.h. $\dfrac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)}$

2.i. $\sqrt{e^{2x}}e^{-x}$

2.j. $\dfrac{e^{x^2-2x} \times (e^x)^2}{(e^{2x})^3}$

## ●●○○ Exercice 9 - Irrationnel !

Démontrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un irrationnel.

## ●●○○ Exercice 10 - Résolution d'équations avec les fonctions usuelles

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\ln(1 + e^x) = 2$
2. $(1 + \ln(x))^2 = 4$
3. $\sqrt{1 - \ln(x)} = 5$
4. $|\ln(x)| = 1$
5. $|e^x| = 1$
6. $|x + 3| = -1$
7. $|x + 5| = |2x - 7|$
8. $\lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$
9. $\lfloor x^2 \rfloor = 9$
10. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$
11. $(\ln(x))^2 - 3\ln x + 2 = 0$
12. $e^{2x} = 2e^x - 1$
13. $e^x + e^{-x} = 2$

## ●●○○ Exercice 11 - Résolution d'inéquations avec les fonctions usuelles

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x + 5| < 3$
2. $|x - 2| \leq 0$
3. $|2x - 1| \geq 4$
4. $|9 - x^2| \geq -2$
5. $5 - x^2 < 0$
6. $\ln\left(10 - x^2\right) > 0$
7. $0,5^x < 0,1$
8. $e^{2x-1} \geq 1$
9. $\dfrac{1}{e^x + 1} < 2$
10. $2^x \leq 3$

## ●●○○ Exercice 12 - Fonction partie fractionnaire

Notons $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
2. Calculer $f(2,5)$ et $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0;1[$, simplifier l'expression de $f(x)$.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de $f$.

## ●○○○ Exercice 13 - Calculs de dérivées

Justifier que chaque fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle donné et déterminer sa dérivée.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{5}{x^7}$ sur $]0;+\infty[$
3. $f : x \longmapsto x\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f : x \longmapsto \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$
6. $f : x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
7. $f : x \longmapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$
8. $f : x \longmapsto \sqrt{x}e^x$ sur $]0;+\infty[$
9. $f : x \longmapsto \left(\ln(1+x)\right)^4$ sur $\mathbb{R}^+$
10. $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

## ●●○○ Exercice 14 - Étude de fonctions

Pour chaque fonction ci-dessous :

- déterminer son ensemble de définition,
- étudier sa parité,
- déterminer sa dérivée,
- dresser son tableau de variations,
- représenter l'allure de sa courbe.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
2. $f : x \longmapsto e^{-x^2}$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$
4. $f : x \longmapsto x^2e^{-x}$
5. $f : x \longmapsto 3x + \dfrac{1}{x^3}$
6. $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$
7. $f : x \longmapsto x\ln(x) - x$
8. $f : x \longmapsto \ln(\ln(x))$
9. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$
10. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
11. $f : x \longmapsto x^x$
12. $f : x \longmapsto x^{\ln(x)}$

## ●●○○ Exercice 15 - Étude de deux fonctions

Notons $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + x\ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x) - x + 1$$

1. Dresser le tableau de variations de $g$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = g(x)$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

## ●●○○ Exercice 16 - Étude de deux fonctions

Notons $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de $f$.
2. Déterminer la dérivée de $f$.
3. On considère maintenant la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$.
   - 3.a. Dresser le tableau de variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.
   - 3.b. Calculer $g(2)$ puis en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. *Les limites de $f$ ne sont pas demandées.*
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$.
   Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.
6. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi.

## ●●○○ Exercice 17 - Manipuler les inégalités

1. Démontrer : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $\dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$.
2. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{\dfrac{3}{x+2}} \geq \sqrt{\dfrac{3}{x+5}}$.
3. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.
4. Démontrer : $\forall x \in [0;1]$, $0 < e^{-x} + x \leq 2$.
5. Encadrer les expressions suivantes sur les intervalles donnés :
   - 5.a. $x^2$ sur $[-3;1]$
   - 5.b. $e^{(1-x)^2}$ sur $[2;4]$

## ●●○○ Exercice 18 - Des inégalités classiques

1. **1.a.** En étudiant la fonction $x \longmapsto e^x - x$, démontrer que pour tout réel $x$ : $e^x \geq x+1$.

   **1.b.** En déduire que pour tout réel positif $x$ : $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$ : $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

## ●●●○ Exercice 19 - Démonstrations sur la fonction exponentielle...

*Dans cet exercice, on suppose inconnues les fonctions exponentielle et logarithme népérien.*
On admet qu'il existe au moins une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$$

Dans toute la suite, $f$ désignera donc une telle fonction.
*Le but de l'exercice est d'établir un certain nombre de propriétés sur cette fonction $f$.*

1. **1.a.** Démontrer que la fonction $x \longmapsto f(x) \times f(-x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.

   **1.b.** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

   **1.c.** A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

2. *Le but de cette question est d'établir l'unicité d'une fonction vérifiant les conditions (1).*
   On suppose qu'il existe une fonction $g$ vérifiant les conditions (1). La question 1.b. permet de définir la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{g(x)}{f(x)}$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $h$ est constante sur $\mathbb{R}$ puis conclure.

*On peut donc maintenant énoncer la définition suivante :*

**Définition 1 - Fonction exponentielle**

La seule fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions (1) est appelée **fonction exponentielle**, notée exp.

3. **Étude de la fonction exp.**

   **3.a.** Étudier les variations de exp sur $\mathbb{R}$.

   **3.b.** Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de exp au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de $\mathcal{C}_{\exp}$ par rapport à cette tangente.

4. **Relation fonctionnelle.**

   **4.a.** Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Puisque pour tout réel $x$, $\exp(x) \neq 0$, on peut considérer la fonction $g_y$, définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g_y(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$$

   Démontrer que la fonction $g_y$ est constante sur $\mathbb{R}$.

   **4.b.** En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

   **4.c.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

## ●●●○ Exercice 20 - Maximum sur les entiers

Justifier l'existence et calculer la valeur de $\max\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{n}\right)$.

## ●●●○ Exercice 21 - Logarithme et moyenne...

Démontrer que pour tous $x, y > 0$ :

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}$$

## ●●●● Exercice 22 - Décomposition d'une fonction...

Montrer que toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.