Les Chartreux

2

Calcul

Sommes & produits

Introduction...

L'addition et la multiplication, telles que nous les connaissons actuellement, ont maintenant une origine assez lointaine. En revanche, ce n'est qu'en 1755 qu'Euler utilise pour la première fois la lettre grecque Σ (sigma majuscule, la lettre correspondant à notre "s", la minuscule étant σ) pour désigner une somme. Il faudra attendre 1822 et Augustin Louis Cauchy (1789-1857, français) pour qu'il soit utilisé comme nous allons le voir dans ce cours, avec des bornes. Plus tard dans l'année, nous en verrons une extension dans le cas de sommes infinies...

Pour bien démarrer...

1 # Compléter : "la multiplication est à l'addition ce que .... est à la multiplication".

2 # Remise en place, si nécessaire, du vocabulaire :

Opération :		
Résultat :		
Quantités en jeu :		

3 # Que sont l'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication ?

4 # Rappeler la règle de factorisation par un facteur commun à chaque terme d'une somme :

5 # Si tous les facteurs d'un produit sont eux-même des produits ayant un même facteur en commun, que faire ?

6 # Rappeler les identités remarquables.

I Symboles $\sum$ et $\prod$

La première idée est d'avoir une écriture compactée de la somme : $0+1+4+9+16+25+....+100$. Pour cela, remarquons que :

Vocabulaire
Dans ces notations k est l'**indice** de la somme, a_k est le **terme général**.
k une *variable muette* qui peut donc être remplacée par n'importe quelle autre lettre n'étant pas déjà utilisée sans changer le sens ni la valeur de la somme ou du produit considéré.

Soient n un entier naturel et a_0, a_1, ..., a_n des nombres réels. On note :

$$a_0 + a_1 + ... + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad a_0 \times a_1 \times ... \times a_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$$

Petite remarque
Les sommes & produits ne commencent pas forcément de façon naturelle à l'indice 0... Même s'il est toujours possible de s'y ramener ; nous verrons ça un peu après.

Exemples 1

E1 $\sum_{k=0}^{10} k = 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

E2 $2+2^2+2^3+...+2^n = \sum_{k=1}^{n} 2^k$

E3 $\prod_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$

E4 $\left(1+\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1+\frac{1}{4}\right) \times ... \times \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$

Écrivons les sommes & produits suivants avec des pointillés :

E5 $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} =$

E6 $\prod_{k=1}^{5} k =$

Écrivons les sommes & produits suivants avec les symboles $\sum$ et $\prod$:

E7 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{50} =$

E8 $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + ... + \frac{8}{256} =$

E9 $n! =$

II Calculs sur $\sum$ et $\prod$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_0,...,a_n$ et $b_0,..,b_n$ des réels. Voici quelques techniques que l'on rencontre souvent :

- **séparer/regrouper des sommes/produits de même indice :**

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \text{...} \quad ; \quad \prod_{k=0}^{n} (a_k \times b_k) = \text{...}$$

- **factoriser/distribuer une constante** (indépendante de l'indice) :

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda \times a_k) = \text{...}$$

- **regrouper une puissance** (indépendante de l'indice) :

$$\prod_{k=0}^{n} (\lambda \times a_k) = \text{...}$$

- **séparer les indices** (relation de Chasles) :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \text{...}$$

En gros...
$\sum_{k=0}^{n} a_k$ est une somme... Elle a donc toutes les propriétés habituelles d'une somme : elle se comporte bien avec l'addition donc, et la multiplication se distribue sur elle.
Il en est de même pour $\prod_{k=0}^{n} a_k$, qui se comporte bien avec la multiplication, et la puissance se distribue sur elle.

✘ Attention !
On se souvient que la somme se comporte très mal avec la multiplication/division :
$\sum_{k=0}^{n} (a_k \times b_k) \neq \sum_{k=0}^{n} a_k \times \sum_{k=0}^{n} b_k$

- **renommer l'indice :**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j = \dots$$

- **sommer des égalités/inégalités :**

$$\left(\forall k \in [\![0;n]\!],\ a_k = b_k\right) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$\left(\forall k \in [\![0;n]\!],\ a_k \leq b_k\right) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$$

> ✘ ATTENTION !
> Les réciproques de ces deux propriétés sont fausses !

III Sommes usuelles

Propriétés 1 - Sommes de référence ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

P1# $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

P2# $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

P3# $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

P4# $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

> Petite remarque
> Les trois dernières sommes ont un premier terme nul... Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; et même chose pour les deux suivantes.

★ Démonstration :

P1# Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

> ☞ Pour info...
> On vient de faire ce que l'on appelle un **télescopage**.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

P2# Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + \dots + n$.

> Petite remarque
> Cette formule se démontre également très bien par récurrence.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

P3#

P4# Se démontre également par récurrence sur n.

$\star$

Exemples 2

Calculons les sommes suivantes, dans lesquelles $n \in \mathbb{N}^*$:

E1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) =$

E3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{k+1} =$

E2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k+1) =$

E4 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+3}} =$

IV Changement d'indice

Exemples 3

Dans chaque cas, écrivons la somme/produit avec des pointillés puis réécrivons-la avec le symbole $\sum$ / $\prod$ dont l'indice commence à 0.

E1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1) =$

E2 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}3^k =$

E3 $\displaystyle\prod_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} =$

Un changement d'indice est une réécriture de la somme avec un nouvel indice obtenu par *décalage* ou *interversion* des indices. Il sera donc toujours de la forme : $i = k \pm nb$ ou $i = nb \pm k$ où nb désigne un entier.

> **Petite remarque**
> Un décalage revient à sommer *dans le même sens*, alors qu'un interversion revient à sommer *dans l'autre sens*.

Attention, les changements $i = k^2$, $i = 2k$... ne sont donc pas des changements d'indice possibles !

> **Pourquoi ?**
> Si k va de 1 à 10 et que $i = k^2$, alors i ne parcourt pas tous les entiers de 1 à 100 ! Ainsi, les deux sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{100}$ ne sont pas égales (elles n'ont même pas le même nombre de termes).

En pratique, on rédigera cela sous la forme suivante :

Exemple 4

On effectue le changement d'indice $i = k+3$ dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{k+3}$:

k	0	n
$i = k+3$	3	$n+3$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{k+3} = \sum_{i=3}^{n+3}2^i$.

> **Petite remarque**
> On peut ensuite repasser avec l'indice k si on préfère cette lettre...

V Sommes & produits télescopiques

Commençons par un exemple pour illustrer la situation :

Exemple 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

On a (par linéarité de la somme) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$.

On repasse éventuellement à l'écriture avec les pointillés. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{par télescopage} \\ &= \;= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

> **★ Classique ! ★**
> Exemple très classique, qui débute parfois par la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ avec l'indication de montrer que :
> $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$...

> **✍ Rédaction**
> On peut également rédiger le télescopage en effectuant un changement d'indice... Mais ce n'est pas nécessaire.

> **Important !**
> Le télescopage de sommes se fait avec la soustraction ; celui de produits se fait avec la division.

Pour résumer :

> ♣ **Méthode 1** ♣ **Pour calculer une somme, on a essentiellement trois cas de figure :**
> 1. **On utilise les sommes de référence.** Auquel cas, on a peut-être besoin, au préalable, de séparer la somme, de factoriser par des constantes, d'utiliser la relation de Chasles, d'effectuer un changement d'indice, ou même de dériver !
> 2. **On procède à un télescopage,** quand on a une différence de sommes contenant des indices identiques à décalage près (k et $k+1$, k et $k-2$, $k+1$ et $k-1$,...).
> 3. **On se laisse guider par l'énoncé !**