

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ EXERCICE 1 - TRANSFORMER LES ÉCRITURES

1. Écrire les sommes & produits suivants avec des pointillés :

$$1.a. \sum_{k=0}^{10} 2^k = 1 + 2 + 4 + \dots + 1024$$

$$1.b. \sum_{k=0}^n 3 = \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{n+1 \text{ termes}} = 3(n+1)$$

$$1.c. \prod_{k=0}^7 x^k = 1 \times x \times \dots \times x^7$$

$$1.d. \prod_{k=1}^n 2 = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$$

✗ ATTENTION !
De 0 à n inclus, il y a n + 1 entiers !

2. Écrire les sommes & produits suivants avec les symboles \sum et \prod :

$$2.a. 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 100 = \sum_{k=1}^{100} (-1)^{k+1} k$$

$$2.b. 3 + 5 + 9 + 17 + 33 + \dots + 1025 = \sum_{k=1}^{10} (2^k + 1)$$

$$2.c. 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{17} = \sum_{k=0}^{17} (-x)^k$$

$$2.d. 1 + 4 + 7 + \dots + 100 = \sum_{k=0}^{33} (3k + 1)$$

$$2.e. \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{1023}{1024} = \prod_{k=1}^{10} \frac{2^k - 1}{2^k}$$

●○○○ EXERCICE 2 - CALCUL DE SOMMES

Calculer les sommes et produits suivants :

$$1. \sum_{k=1}^{20} 3 = 60$$

$$2. \sum_{k=0}^n 1, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$$

$$3. \sum_{k=0}^{100} (-1)^k k = 0 + \underbrace{(-1) + 2}_{=1} + \underbrace{(-3) + 4}_{=1} + \dots + \underbrace{(-99) + 100}_{=1} = 50 \times 1 = 50$$

Ou bien :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{100} (-1)^k k &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{100} -k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{100} -k \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ 48}}^{49} (-(2n+1) + (2n+2)) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ 48}}^1 1 \\ &= 50 \end{aligned}$$

$$4. \sum_{k=1}^{15} \frac{2k+5}{3} \underset{\text{linéarité}}{=} \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{15} k + 15 \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \frac{15 \times 16}{2} + 5 \times 5 = 5 \times 16 + 25 = 105$$

→ RÉFLEXE !
On simplifie toujours AVANT de calculer !

5. $\sum_{k=3}^n (2k+4)$, pour $n \geq 3$
 Pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n (2k+4) &= 2 \sum_{k=3}^n 2k - \sum_{k=3}^n 4 \\ &= 2 \left(\sum_{k=0}^n k - (0+1+2) \right) - (n-2) \times 4 \\ &= 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 3 \right) + 4(n-2) \\ &= n(n+5) - 14 \end{aligned}$$

À RETENIR...
 De a à b inclus, il y a $b - a + 1$ entiers.

6. $\sum_{k=0}^n 3^{k+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 3^{k+1} &= 3 \sum_{k=0}^n 3^k \\ &= 3 \frac{1-3^{n+1}}{1-3} \\ &= \frac{3}{2} (3^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

7. $\sum_{k=0}^n 2^{3k+2}$, pour $n \in \mathbb{N}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2^{3k+2} &= 2^2 \sum_{k=0}^n 8^k \\ &= 4 \frac{1-8^{n+1}}{1-8} \\ &= \frac{4}{7} (8^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

8. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{3k+2}}$, pour $n \in \mathbb{N}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{3k+2}} &= \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{8}\right)^k \\ &= \frac{1}{4} \frac{1-(1/8)^{n+1}}{1-1/8} \\ &= \frac{2}{7} \left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

9. $\sum_{k=2}^n \frac{-1}{3^k}$, pour $n \geq 2$
 Pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{-1}{3^k} &= - \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} - 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= - \frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{3}{2} \left((1/3)^{n+1} - 1 \right) + \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{1}{9} \end{aligned}$$

10. $\sum_{k=0}^{2n} 5^{n+k}$, pour $n \in \mathbb{N}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} 5^{n+k} &= 5^n \sum_{k=0}^{2n} 5^k = 5^n \frac{1-5^{2n+1}}{1-5} \\ &= \frac{5^n (5^{2n+1} - 1)}{4} \end{aligned}$$

11. $\sum_{k=0}^n k(k+1)(k-1)$, pour $n \in \mathbb{N}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k+1)(k-1) &= \sum_{k=0}^n k^3 - k = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{(n-1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} \end{aligned}$$

12. $\sum_{k=1}^n \ln(k)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln(k) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n k\right) \\ &= \ln(n!) \end{aligned}$$

13. $\prod_{k=0}^n 2^k$, pour $n \in \mathbb{N}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n 2^k &= 2^{\sum_{k=0}^n k} \\ &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

14. $\sum_{k=p}^n q^k$, pour $q \neq 1$ et $n \geq p$
 Pour tous $q \neq 1$ et $n \in \llbracket p; +\infty \llbracket$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n q^k &= \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^{p-1} q^k \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \frac{1 - q^p}{1 - q} \\ &= \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

•••• EXERCICE 3 - CHANGEMENT D'INDICE

Dans chaque somme ou produit, effectuer le changement d'indice donné.

1. $\sum_{k=0}^n 3^{k+1}$; changement $i = k + 1$

$$\sum_{k=0}^n 3^{k+1} = \sum_{i=1}^{n+1} 3^i$$

2. $\prod_{k=3}^{n+2} (k-2)$; changement $i = k - 2$

$$\prod_{k=3}^{n+2} (k-2) = \prod_{i=1}^n i = n!$$

3. $\sum_{k=4}^{19} (k-4)^2$; changement $i = k - 4$

$$\sum_{k=4}^{19} (k-4)^2 = \sum_{i=0}^{15} i^2 = \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = 5 \times 8 \times 31 = 1240$$

4. $\sum_{k=0}^n k\sqrt{n-k}$; changement $i = n - k$

$$\sum_{k=0}^n k\sqrt{n-k} = \sum_{i=0}^n (i+n)\sqrt{i}$$

•••• EXERCICE 4 - SOMMES & PRODUITS TÉLESCOPIQUES

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$. En déduire $\sum_{k=0}^{98} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Sans difficulté, en partant du membre de droite, on obtient :

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

Ou alors, en partant du membre de gauche :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &\stackrel{\text{Astuce!}}{=} \frac{(k+2) - (k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+2}{(k+1)(k+2)} - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

• Ensuite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{98} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{98} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^{98}} \right\} \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=0}^{98} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{98} \frac{1}{k+2} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^{98}} \right\} \text{télescopage} \\ &= 1 - \frac{1}{100} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \right)$.

Par télescopage (multiplicatif), on a directement :

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \right) = \ln(n+1)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n k \times k!$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \times k! &= \sum_{k=0}^n (k+1-1) \times k! \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^n} \right\} \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)! - \sum_{k=0}^n k! \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^n} \right\} \text{télescopage} \\ &= (n+1)! - 0! \\ &= (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

4. Soit $n \geq 2$. Calculer $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$.

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2-1}{k^2} \right) \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \frac{k+1}{k} \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \quad \left. \vphantom{\prod_{k=2}^n} \right\} \text{télescopages} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

5. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$. En déduire

une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

• Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \left(\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} \right) &\iff \left(\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \right) \\ &\iff \left(\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)} \right) \\ &\iff \left(\forall k \in \mathbb{N}^*, 1 = (a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a \right) \quad \left. \vphantom{\forall k \in \mathbb{N}^*} \right\} \text{"par identification"} \\ &\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{2} + b + c = 0 \\ \frac{3}{2} + 2b + c = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{2} + b + c = 0 \\ 1 + b = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$; et par conséquent : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}$.

IMPORTANT !
Le " $\forall k \in \mathbb{N}^*$ " doit être réécrit à chaque fois, car il fait partie de l'assertion pour avoir l'équivalence ! Pour l'identification, on reprendra l'exercice 12 du chapitre 0 afin de comprendre le raisonnement qui se cache derrière...

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} && \hookrightarrow \text{par linéarité de la somme} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \right) && \hookrightarrow \text{par télescopes} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \end{aligned}$$

••• EXERCICE 5 - GRAND CLASSIQUE...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .
 f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur \mathbb{R} .
2. En exprimant de deux façons différentes la dérivée de f , établir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

- Par linéarité de la somme, on a déjà :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

- Mais également, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

En dérivant f sous cette expression, on obtient :

$$\forall x \neq 1, f'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

PETITE REMARQUE

Dans $f'(x)$, la somme commence à $k = 1$, puisque $\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \dots$ et donc $f'(x) = 0 + 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}$.

••• EXERCICE 6 - IDENTITÉ REMARQUABLE!

Soient a et b deux réels.

Conjecturer et démontrer une formule de factorisation de $a^n - b^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut conjecturer une formule avec les cas particuliers $n = 2, n = 4, \dots$. Cette conjecture peut ensuite aisément être démontrée par récurrence ; ou en développant l'expression factorisée (puis télescopage)...

On peut aussi procéder autrement :

- Si $a = 0$: l'expression est déjà factorisée...
- Si $a \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= a^n \left(1 - \left(\frac{b}{a} \right)^n \right) && \hookrightarrow (1-q) \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 - q^n \\ &= a^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^k \times \left(1 - \frac{b}{a} \right) \\ &= a^{n-1} (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^k \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k} \end{aligned}$$

PETITE REMARQUE

Avec le changement d'indice $i = n - 1 - k$, on obtient : $a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$.