Exercices du chapitre 2
Sommes & produits

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Transformer les écritures

1. Écrire les sommes & produits suivants avec des pointillés :

   1.a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = 1+2+4+\ldots+1024$

   1.b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3 = \underbrace{3+3+\ldots+3}_{n+1 \text{ termes}} = 3(n+1)$

   ✘ Attention ! De 0 à n inclus, il y a $n+1$ entiers !

   1.c. $\displaystyle\prod_{k=0}^{7} x^k = 1\times x \times \ldots \times x^7$

   1.d. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2 = \underbrace{2\times 2\times\ldots\times 2}_{n \text{ facteurs}} = 2^n$

2. Écrire les sommes & produits suivants avec les symboles $\sum$ et $\prod$:

   2.a. $1-2+3-4+\ldots.-100 = \displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k+1}k$

   2.b. $3+5+9+17+33+\ldots+1025 = \displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2^k+1)$

   2.c. $1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{17} = \displaystyle\sum_{k=0}^{17}(-x)^k$

   2.d. $1+4+7+\ldots.+100 = \displaystyle\sum_{k=0}^{33}(3k+1)$

   2.e. $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{7}{8}\times\ldots\times\dfrac{1023}{1024} = \displaystyle\prod_{k=1}^{10}\dfrac{2^k-1}{2^k}$

●○○○ Exercice 2 - Calcul de sommes

Calculer les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} 3 = 60$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$, pour $n\in\mathbb{N}$

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}(-1)^k k = 0+\underbrace{(-1)+2}_{=1}+\underbrace{(-3)+4}_{=1}+\ldots+\underbrace{(-99)+100}_{=1} = 50\times 1 = 50$

   Ou bien :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{100}(-1)^k k &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{100} -k + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{100} -k \\
&= \sum_{n=0}^{49}(-(2n+1)+(2n+2)) \\
&= \sum_{n=0}^{48} 1 \\
&= 50
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{2k+5}{3} \underset{\text{linéarité}}{=} \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{15}k + 15\times\frac{5}{3} = \frac{2}{3}\,\frac{15\times 16}{2}+5\times 5 = 5\times 16+25 = 105$

   ➠ Réflexe ! On simplifie toujours AVANT de calculer !

5. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(2k+4)$, pour $n \geq 3$

Pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}(2k+4) &= 2\sum_{k=3}^{n}2k-\sum_{k=3}^{n}4\\ &= 2\left(\sum_{k=0}^{n}k-(0+1+2)\right)-(n-2)\times 4\\ &= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}-3\right)+4(n-2)\\ &= n(n+5)-14\end{aligned}$$

À retenir...
De a à b inclus, il y a $b-a+1$ entiers.

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3^{k+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}3^{k+1} &= 3\sum_{k=0}^{n}3^k\\ &= 3\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\\ &= \frac{3}{2}(3^{n+1}-1)\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{3k+2}$, pour $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}2^{3k+2} &= 2^2\sum_{k=0}^{n}8^k\\ &= 4\frac{1-8^{n+1}}{1-8}\\ &= \frac{4}{7}(8^{n+1}-1)\end{aligned}$$

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{3k+2}}$, pour $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{3k+2}} &= \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{8}\right)^k\\ &= \frac{1}{4}\frac{1-(1/8)^{n+1}}{1-1/8}\\ &= \frac{2}{7}\left(1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right)\end{aligned}$$

9. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{-1}{3^k}$, pour $n \geq 2$

Pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{-1}{3^k} &= -\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3}^k-1-\frac{1}{3}\right)\\ &= -\frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3}+\frac{4}{3}\\ &= \frac{3}{2}((1/3)^{n+1}-1)+\frac{4}{3}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{9}\end{aligned}$$

10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}5^{n+k}$, pour $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}5^{n+k} &= 5^n\sum_{k=0}^{2n}5^k = 5^n\frac{1-5^{2n+1}}{1-5}\\ &= \frac{5^n(5^{2n+1}-1)}{4}\end{aligned}$$

11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k+1)(k-1)$, pour $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(k+1)(k-1) &= \sum_{k=0}^{n}k^3-k = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{(n-1)(n+2)}{2}\\ &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}\end{aligned}$$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln(k) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \\ &= \ln(n!)\end{aligned}$$

13. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^k$, pour $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} 2^k &= 2^{\sum_{k=0}^{n} k} \\ &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

14. $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$, pour $q \neq 1$ et $n \geq p$

Pour tous $q \neq 1$ et $n \in [\![p;+\infty[\![$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{p-1} q^k \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^p}{1-q} \\ &= \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} \\ &= q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\end{aligned}$$

●○○○ Exercice 3 - Changement d'indice

Dans chaque somme ou produit, effectuer le changement d'indice donné.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k+1}$; changement $i = k+1$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k+1} = \sum_{i=1}^{n+1} 3^i$

2. $\displaystyle\prod_{k=3}^{n+2} (k-2)$; changement $i = k-2$

$\displaystyle\prod_{k=3}^{n+2} (k-2) = \prod_{i=1}^{n} i = n!$

3. $\displaystyle\sum_{k=4}^{19} (k-4)^2$; changement $i = k-4$

$\displaystyle\sum_{k=4}^{19} (k-4)^2 = \sum_{k=0}^{15} i^2 = \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = 5 \times 8 \times 31 = 1240$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\sqrt{n-k}$; changement $i = n-k$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\sqrt{n-k} = \sum_{i=0}^{n} (i+n)\sqrt{i}$

●●○○ Exercice 4 - Sommes & produits télescopiques

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{98} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

   - Soit $k \in \mathbb{N}$. Sans difficulté, en partant du membre de droite, on obtient :

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

Ou alors, en partant du membre de gauche :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)(k+2)} &\underset{\text{Astuce !}}{=} \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+2}{(k+1)(k+2)} - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\end{aligned}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{98} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{98}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \sum_{k=0}^{98} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{98} \frac{1}{k+2} && \text{télescopage}\\
&= 1 - \frac{1}{100}
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right)$.

   Par télescopage (multiplicatif), on a directement :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \times k! &\underset{\text{Astuce !}}{=} \sum_{k=0}^{n} ((k+1-1) \times k!) && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)! - \sum_{k=0}^{n} k! && \text{télescopage}\\
&= (n+1)! - 0!\\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$

4. Soit $n \geq 2$. Calculer $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\
&= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\,\frac{k+1}{k}\\
&= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} && \text{télescopages}\\
&= \frac{1}{n}\,\frac{n+1}{2}\\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

5. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$. En déduire une expression simplifier de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}\right) &\iff \left(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}\right)\\
&\iff \left(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}\right)\\
&\iff \left(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 1 = (a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a\right)\\
&\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} && \text{"par identificatio}\\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{2} + b + c = 0 \\ \frac{3}{2} + 2b + c = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}\\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{2} + b + c = 0 \\ 1 + b = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Important !

Le "$\forall k \in \mathbb{N}^*$" doit être réécrit à chaque fois, car il fait partie de l'assertion pour avoir l'équivalence ! Pour l'identification, on reprendra l'exercice 12 du chapitre 0 afin de comprendre le raisonnement qui se cache derrière...

Conclusion : $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$; et par conséquent : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} \right) && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \right) && \text{par télescopages} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)
\end{aligned}$$

●●○○ Exercice 5 - Grand classique...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. En exprimant de deux façons différentes la dérivée de f, établir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(1-x)^2}$$

- Par linéarité de la somme, on a déjà :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

Petite remarque

Dans $f'(x)$, la somme commence à $k = 1$, puisque $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + ... + x^n$... et donc $f'(x) = 0 + 1 + 2x + ... + nx^{n-1}$.

- Mais également, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

En dérivant f sous cette expression, on obtient :

$$\forall x \neq 1,\ f'(x) = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(1-x)^2}$.

●●●○ Exercice 6 - Identité remarquable !

Soient a et b deux réels.

Conjecturer et démontrer une formule de factorisation de $a^n - b^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut conjecturer une formule avec les cas particuliers $n = 2$, $n = 4$... Cette conjecture peut ensuite aisément être démontrée par récurrence ; ou en développant l'expression factorisée (puis télescopage)...

On peut aussi procéder autrement :

- Si $a = 0$: l'expression est déjà factorisée...
- Si $a \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= a^n \left(1 - \left(\frac{b}{a} \right)^n \right) && (1-q) \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 - q^n \\
&= a^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^k \times \left(1 - \frac{b}{a} \right) \\
&= a^{n-1} (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^k \\
&= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k}
\end{aligned}$$

Petite remarque

Avec le changement d'indice $i = n - 1 - k$, on obtient : $a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$.