3

Suites

Généralités & suites usuelles

Introduction...

Difficile d'être précis sur l'origine des suites en mathématiques, qui sont très utilisées en arithmétique et en analyse. En revanche, Leonardo Da Pisa ($\simeq 1180-1250$, italien, plus connu sous le nom de Leonardo Fibonacci) avait déjà introduit, en 1202, la célèbre suite qui porte son nom via le problème suivant : "*Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance*.".
En notant (F_n) le nombre de couples de lapins en début du $n^{\text{ème}}$ mois, on obtient :

- $F_1 = 1$ (initialement, 1 couple de jeunes lapins)
- $F_2 = 1$ (le couple n'a pas encore procréé, ils ne peuvent que dans le second mois après leur naissance)
- $F_3 = 2$ (le couple initial, plus le nouveau couple engendré en un mois)
- $F_4 = 3$ (seul le couple initial a engendré un couple supplémentaire, l'autre étant trop jeune)
- $F_4 = 5$ (les 3 couples du mois précédents + un couple par couple capable de procréer : il y en a 2, le couple initial, et celui né il y a 2 mois)
- $F_5 = 8$...

On obtient ainsi la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, sans oublier les conditions initiales $F_1 = F_2 = 1$. Un des objectifs de ce chapitre est de déterminer une expression explicite de F_n en fonction de n.
Pour finir, quelques mots sur Fibonacci... Il est un des rares mathématiciens de son époque et son travail a porté à la fois sur la géométrie et sur la résolution des équations du premier et second degré, mais aussi sur le calcul de racine carrée et cubique. Son influence a également été importante dans l'introduction des chiffres arabes en Occident.

Pour bien démarrer...

1 # Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n^2 + 3^{2n}$, que vaut $f(n+1)$?

2 # Rappeler les règles de calculs sur les puissances.

3 # Factoriser l'expression $x^{n+1} - x^n$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$).

4 # Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $x = ax + b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

I Suites numériques : premières définitions

Définitions 1 - Suite

D1# Une **suite numérique** u est une fonction :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array} \right.$$

On notera u ou (u_n), ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite.

D2# u_n est appelé **terme de rang n** (ou terme d'indice n).

D3# Le premier terme de la suite (souvent u_0 ou u_1) est appelé **terme initial**.

Vocabulaire

Le **terme général** de (u_n) est l'expression explicite donnant u_n en fonction de n.

✓ Rigueur !

u_n désigne un terme de la suite, donc un nombre... Alors que **(u_n) désigne la suite** ; comme pour les fonctions : f est une fonction, alors que $f(x)$ est un nombre !

Remarque

> Dans tout ce chapitre, nous ferons comme si toutes les suites (u_n) étaient définies sur $\mathbb{N}$ tout entier. En pratique, ça ne sera pas toujours le cas... Les énoncés du cours contenant un "pour tout $n \in \mathbb{N}$" seront alors à modifier.

Au fil de l'année, nous allons étudier différentes suites, qui pourront être définies ainsi :

- **explicitement :** on donne u_n en fonction de n (c'est à dire par la donnée du terme général de (u_n)) ;
- **par une relation de récurrence :** un ou plusieurs premiers termes puis une expression d'un terme en fonction d'un ou de plusieurs termes précédents ;
- **implicitement** ;
- on peut aussi définir plusieurs **suites imbriquées**.

Exemples 1

E1 Suites définies par leur terme général :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 3n + \dfrac{1}{3}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n = \dfrac{1}{n} + 2^n$
- $\forall n \geq 2,\ \ w_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$

E2 Suites définies par une relation de récurrence :

- $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 3u_n + 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1} \end{cases}$
- $\begin{cases} F_0 = 1 \text{ et } F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$

☞ Pour info...

La suite (F_n) définie par : $\begin{cases} F_0 = 1 \text{ et } F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$ est la suite de Fibonacci.

E3 Suites définies implicitement :

- On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^{-nx} - x = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, on note α_n cette unique solution. On définit ainsi une suite (α_n) dont on peut d'ailleurs dire que : $\alpha_0 = ...$
- On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, β_n le nombre de solutions de l'équation $x^n - nx + 1 = 0$. On définit ainsi une suite (β_n) dont on peut d'ailleurs dire que : $\beta_1 = ...$ et $\beta_2 = ...$

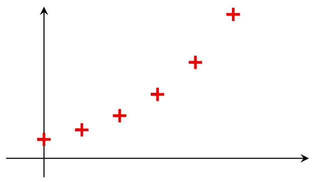
E4 Suites imbriquées : On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = -u_n + v_n$$

Comme pour les fonctions, il est naturel de définir de nouvelles suites par opérations ($\lambda \in \mathbb{R}$) : (λu_n), $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$...

II Représentation graphique d'une suite

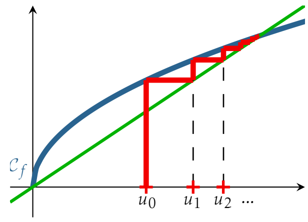
Deux cas :



1. **Représentation point par point :** la représentation de (u_n) est alors l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ dans un repère du plan.
   Cela revient à représenter une suite comme une fonction... On peut faire cela pour toutes les suites, à condition de calculer un certain nombre de termes.

2. **Pour les suites définies par une relation de récurrence d'ordre 1 :** il existe une représentation graphique qui permet aussi de déterminer graphiquement les valeurs des termes de la suite...

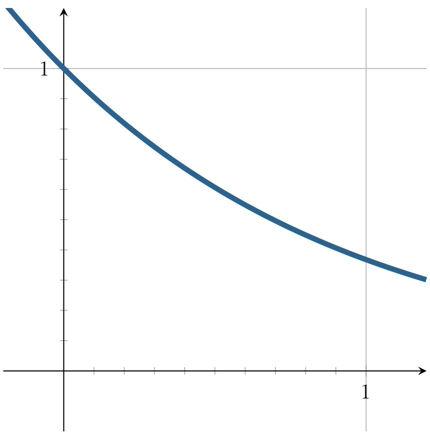
> ♣ **Méthode 1** ♣ Si (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction connue :
> - Tracer la droite d'équation $y = x$ (**première bissectrice**) ainsi que la courbe de la fonction f.
> - Placer la valeur de u_0 sur l'axe des abscisses.
> - Obtenir u_1 en remarquant que $u_1 = f(u_0)$; c'est à dire que u_1 est l'image de u_0 par f.
> - *Reporter* sur l'axe des abscisses la valeur de u_1 en utilisant la première bissectrice.
> - Réitérer jusqu'à en avoir marre...



Exemple 2

Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Représentons les premiers termes de la suite (u_n) et faisons quelques conjectures.



III Variations des suites

Définitions 2 - Suite strictement croissante / décroissante

D1# (u_n) est **strictement croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$

D2# (u_n) est **strictement décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$

D3# (u_n) est **constante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$

Petite remarque
Les inégalités sont larges si on ne souhaite pas de *stricte* monotonie.

Vocabulaire
Les suites **monotones** sont les suites qui ne changent pas de variations.

Dans tous les cas, il faudra comparer u_n et u_{n+1} pour toutes les valeurs de n... Voici LA méthode :

> ♣ **Méthode 2** ♣ **Pour étudier les variations d'une suite**, on étudie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Petite remarque
On pourrait aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1... faut-il encore s'assurer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est différent de 0 et de signe constant...

Exemples 3

Dans chaque cas, étudions les variations de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

E1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$:

Conclusion : la suite (u_n) est

E2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$:

Conclusion : la suite (u_n) est

E3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$:

Conclusion : la suite (u_n) est

IV Majoration & minoration

Définitions 3 - Suite majorée / minorée / bornée

D1# (u_n) est **majorée** lorsque : $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \mathrm{M}$.
Un tel M est *un* **majorant** de (u_n).

D2# (u_n) est **minorée** lorsque : $\exists m \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \mathrm{M}$.
Un tel m est *un* **minorant** de (u_n).

D3# (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

✓ **Rigueur !**
On dit *un* majorant/minorant, car s'il existe un majorant, il y en a une infinité...

✘ **Attention !**
Quand pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, on dira souvent que la suite (v_n) majore la suite (u_n)... Mais cela ne signifie pas que la suite (u_n) est majorée !

Exemples 4

E1 Une suite décroissante est majorée par son premier terme ; alors qu'une suite croissante est minorée par son premier terme.

E2 La suite de terme général est majorée par 2.

E3 La suite de terme général est bornée par -1 et 1.

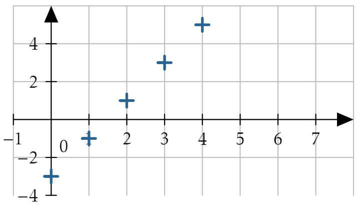
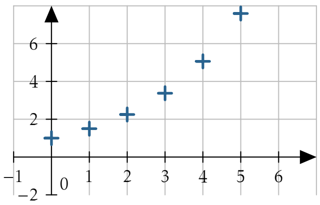
E4 Considérons la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$.
Montrons par récurrence que (u_n) est bornée par 0 et 2.

☞ **Rappels...**
• Ne change pas le sens des inégalités : additionner/soustraire, multiplier/diviser par un positif et appliquer une fonction croissante.
• Change le sens des inégalités : multiplier/diviser par un négatif et appliquer une fonction décroissante.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2$.
Autrement dit, (u_n) est bornée par 0 et 2.

V Suites usuelles

V.1 Suites arithmétiques & suites géométriques

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition	il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$	il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général à partir de u_0 Terme général à partir de u_1 Terme général à partir de u_p		
Graphiquement...	Suite arithmétique de raison 2 et de 1^{er} terme -3 :  $\rightsquigarrow$ **Croissance linéaire** (points alignés)	Suite géométrique de raison $1,5$ et de 1^{er} terme 1 :  $\rightsquigarrow$ **Croissance exponentielle**
Somme de termes consécutifs	$= \text{nb de termes} \times \dfrac{1^{\text{er}} + \text{dernier terme}}{2}$	$= 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1-\text{raison}}$ (si raison$\neq 1$) $= 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \text{nb de termes}$ (si raison$= 1$)

★ Démonstration :

- Aucune difficulté pour l'expression des termes généraux, que l'on démontre proprement par récurrence.
- **Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :**
  Soient r un réel et (u_n) une suite arithmétique de raison r. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![p;+\infty[\![$.

- **Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :**
  Soient q un réel et (u_n) une suite géométrique de raison q. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![p;+\infty[\![$.
  - Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante, et donc :

  - Si $q \neq 1$:

★

Exemples 5

E1 Notons (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 3$.

Son terme général est :

De plus, $\sum_{k=0}^{10} u_k =$

E2 Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.

Son terme général est :

De plus, $\sum_{k=1}^{8} u_k =$

♣ **Méthode 3** ♣ **Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique (resp. géométrique)**, on cherche généralement à établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + qqch$ (resp. $u_{n+1} = u_n \times qqch$). Et pour cela, on part du membre de gauche pour retrouver le membre de droite.

Question : La suite nulle est-elle arithmétique ? Géométrique ?

Exemples 6

E1 Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 7$ pour $n \in \mathbb{N}$. On reconnaît le terme général d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 3.

E2 Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2 \end{cases}$
et $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = u_{n+1} - u_n$.
Démontrons que la suite (v_n) est arithmétique. En déduire son terme général ainsi que celui de (u_n).

Conclusion :

♣ **Méthode 4** ♣ **Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique (resp. géométrique)**, la donnée de trois termes consécutifs suffit !

Exemple 7

Montrons que la suite (u_n), définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 2n + 3^n$, n'est ni arithmétique ni géométrique.

V.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 4 - Suite arithmético-géométrique

Une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \times u_n + b$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } a = 0\text{, alors la suite } (u_n) \text{ est constante.}\\ \text{Si } b = 0\text{, alors la suite } (u_n) \text{ est géométrique.}\\ \text{Si } a = 1\text{, alors la suite } (u_n) \text{ est arithmétique.}\end{array}\right\} \text{Nous exclurons ces cas-là dans la suite de notre étude.}$$

✘ Attention !
Hormis ces trois cas, une suite arithmético-géométrique n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Ne perdons pas de vue l'objectif : déterminer du terme général des suites arithmético-géométriques...

A l'aide d'observations graphiques, on voit que le point d'intersection entre la droite d'équation $y = ax + b$ et la première bissectrice a un rôle important... Et puisque $a \neq 1$, l'équation $x = ax + b$ admet une unique solution $\dfrac{b}{1-a}$ (on parle de **point fixe** de la fonction $x \longmapsto ax + b$), que nous notons α. Nous avons donc deux informations à ce niveau-là :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \\ \alpha = a\alpha + b \end{cases}$$

Ce qui donne, en soustrayant ces deux égalités membre à membre :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$$

Ainsi, la suite $(u_n - \alpha)$ est géométrique ; on peut donc déterminer son terme général et en déduire celui de (u_n)...

Ce qu'il faut retenir :

♣ Méthode 5 ♣ Pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique :

- Résoudre l'équation $x = ax + b$ (on note α la solution ici).
- Poser la suite auxiliaire (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \alpha$; et vérifier qu'elle est géométrique.
- En déduire le terme général de (v_n) puis celui de (u_n) (on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \alpha$).

Exemple 8

Déterminons le terme général de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

V.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définitions 5 - Suite récurrente linéaire d'ordre 2

D1# Une suite (u_n) est **récurrente linéaire d'ordre 2** lorsqu'il existe deux réels a, b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

D2# L'équation $x^2 - ax - b = 0$ est alors appelée **équation caractéristique** de la suite (u_n).

Si $b = 0$, alors la suite (u_n) est géométrique à partir du rang 1.
Si $a = b = 0$, alors la suite (u_n) est constante nulle à partir du rang 2.
} Nous savons déjà traiter ces deux cas.

Le théorème suivant va fournir les expressions possibles pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

Théorème 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$; et soit Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$.

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 et :

$$\exists! \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une seule solution x_0 et :

$$\exists! \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) x_0^n$$

☞ Pour info... Le cas $\Delta < 0$ n'est pas au programme ; il fait intervenir les très fameux *nombres complexes*, que nous n'étudierons pas !

★ Démonstration : En exercice. ★

Pour compléter :

♣ Méthode 6 ♣ Pour déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

- Poser et résoudre l'équation caractéristique associée.
- Déterminer λ et μ en utilisant les conditions initiales de (u_n) (qui sont souvent les valeurs de u_0 et u_1) : il faudra résoudre un petit système.

♡ Astuce du chef ! ♡ Les expressions des termes généraux sont identiques si la suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang : les valeurs de λ et μ s'en trouveront juste changées...

Exemples 9

E1 La suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$.

E2 **Déterminons le terme général de la suite (u_n) définie par :** $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$.

V.4 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

C'est un cas très courant dont nous avons déjà rencontré des cas particuliers : les suites arithmético-géométriques. En effet, si (u_n) est une SAG, elle vérifie une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f une fonction affine.

Nous avons déjà vu comment représenter la suite (u_n) (voir méthode 1) ; mais son étude sera en général plus sophistiquée. Nous ne verrons pas de généralités, mais il est bon de retenir que :

♣ **Méthode 7** ♣ **Pour étudier une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$:**

- il faut connaître le mieux possible la fonction f et essayer d'en utiliser les caractéristiques
- il va falloir très certainement raisonner par récurrence (pour justifier que u_n existe bien pour tout n, pour étudier les variations de (u_n), ou pour montrer qu'elle est minorée/bornée...)

☞ Pour info...

Cette étude sera complétée et revue régulièrement durant l'année.

Exemple 10

Considérons la fonction $f : x \longmapsto xe^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- **Tableau de variations de f.**

- **Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$.**

Petite remarque

On aurait aussi pu démontrer directement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

- **Variations de (u_n).**

Petite remarque

On a ainsi montré que (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car bornée entre 0 et 1). Nous verrons dans un prochain chapitre comment utiliser ces résultats pour poursuivre l'étude de la suite (u_n)...