Exercices du chapitre 3
Suites : généralités & suites usuelles

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Variations de suites

Dans chaque cas, déterminer les variations de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

1. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = 5 \times 0,2^n + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
4. $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. $u_n = \dfrac{3}{7^n} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
6. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

●●○○ Exercice 2 - Vrai ou faux sur les minorations et majorations

1. La suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, est majorée par 2.
2. La suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n + n + 1$, est minorée.
3. La suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{3^n}$, est bornée.
4. La suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n + 1$, est majorée.
5. Toute suite est nécessairement soit minorée soit majorée.

●○○○ Exercice 3 - SA, SG

Dans chaque cas, déterminer si la suite (u_n) dont on donne le terme général est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

1. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = 3n - 7$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = \dfrac{n+1}{3}$ pour $n \in \mathbb{N}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
5. $u_n = \dfrac{2}{3^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$
6. $u_n = 2^n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

●○○○ Exercice 4 - Vrai ou faux sur les SA et SG

1. La somme de deux suites arithmétiques est arithmétique.
2. Le produit de deux suites arithmétiques est arithmétique.
3. La somme de deux suites géométriques est géométrique.
4. Le produit de deux suites géométriques est géométrique.
5. Si (u_n) est géométrique de raison q, alors $(-u_n)$ est géométrique de raison $-q$.

●○○○ Exercice 5 - Avec une suite auxiliaire

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. En déduire le terme général de (u_n).

●●○○ Exercice 6 - Avec une suite auxiliaire

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Soit alors (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   - 2.a. Calculer v_0, v_1 et v_2. Que peut-on conjecturer ?
   - 2.b. Démontrer cette conjecture puis en déduire le terme général de (u_n).

●●○○ Exercice 7 - Avec une suite auxiliaire

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $\begin{cases} u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n} \end{cases}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln(u_n)$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 4$.
   Démontrons par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 4$.

> ✘ **Attention !**
> Le phrase "la suite (u_n) est bien définie" ne dépend pas de n, puisque n est muet dans l'écriture (u_n). Il est alors nécessaire de reformuler ce que l'on souhaite établir en une assertion dépendant bien de n : "u_n existe".

- **Initialisation.** Pour $n=0$: u_0 existe et $u_0=4$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n\geq 4$" et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1}\geq 4$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n\geq 4$. En particulier, $u_n\geq 0$. Donc $\sqrt{u_n}$ existe. Par conséquent : u_{n+1} existe.
  - Par hypothèse de récurrence, on a encore :
$$u_n\geq 4$$
D'où, par croissance de $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}^+$ (en particulier sur $[4;+\infty[$), on obtient :
$$\sqrt{u_n}\geq 2$$
Or $u_n\geq 0$, d'où :
$$u_n\sqrt{u_n}\geq 2u_n$$
Mais comme $u_n\geq 4$, on a aussi $2u_n\geq 8\geq 4$. Ainsi, par transitivité :
$$u_n\sqrt{u_n}\geq 4$$
Autrement dit :
$$u_{n+1}\geq 4$$
Hérédité établie.

Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n\geq 4$.

Important ! Quand une suite (u_n) est définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$, la question de l'existence de chaque terme de la suite se pose à chaque fois que la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
Ici, il faut s'assurer que $\mathbb{R}^+$ **(sur lequel la fonction f : $x\longmapsto x\sqrt{x}$ est définie) est stable par f.**

2. Étudier les variations de (u_n).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= u_n\sqrt{u_n}-u_n\\ &= u_n(\sqrt{u_n}-1)\end{aligned}$$
Or, d'après la question précédente :
$$u_n\geq 4>0$$
Et de plus, puisque $u_n\geq 4$, par croissance de $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a :
$$\sqrt{u_n}\geq 2$$
Par conséquent :
$$u_n(\sqrt{u_n}-1)>0$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

3. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie sur $\mathbb{N}^*$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question **1.**, $u_n>0$.
Ainsi, $\ln(u_n)$ existe.

Conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie sur $\mathbb{N}^*$.

Petite remarque
Pour trouver le terme général d'une suite, sans indication comme c'est le cas ici, deux cas se présentent :
• c'est une suite usuelle (SA, SG, SAG, SRL2)
• on calcule les premiers termes, on conjecture, on démontre par récurrence...

4. Déterminer le terme général de (v_n) puis celui de (u_n).

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \ln(u_{n+1})\\ &= \ln(u_n\sqrt{u_n})\\ &= \ln(u_n)+\ln(\sqrt{u_n}) \quad \text{car } u_n>0 \text{ et } \sqrt{u_n}>0\\ &= \ln(u_n)+\frac{1}{2}\ln(u_n)\\ &= \frac{3}{2}\ln(u_n)\\ &= \frac{3}{2}v_n\end{aligned}$$
Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_1=\ln(4)$.
D'où :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\ln(4)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
$$v_n=\ln(u_n)$$
D'où :
$$\begin{aligned}u_n &= \exp(v_n)\\ &= \exp\left(\ln(4)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)\\ &= 4^{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=4^{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$.

✓ Rigueur ! La relation $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$ n'est valable que si x et y sont strictement positifs !
Peut-on l'ajuster pour qu'elle soit valable si $x,y<0$?

●●○○ Exercice 8

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un site de vidéo à la demande. En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement, le 1er janvier 2021 est 100 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante :

chaque mois, 4 % des clients se désabonnent et 1 % des non abonnés s'abonnent

On suppose qu'un client qui s'est désabonné est susceptible de se réabonner par la suite.
Pour tout entier naturel n, on note a_n l'estimation du nombre d'abonnés, en milliers, n mois après l'ouverture, on a ainsi $a_0=100$. La population cible globale est constituée de 20 000 000 d'individus.

1. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Selon cette modélisation, quel nombre maximal d'abonnés le site peut-il espérer ?
3. Écrire un programme `Python` qui permet d'obtenir le mois à partir duquel le site comptabilisera plus de 2 millions d'abonnés. Retrouver ce résultat par le calcul.
   Donnée : $\dfrac{\ln(2000) - \ln(3900)}{\ln(0,95)} \simeq 13,02$.

●●○○ Exercice 9 - SAG

Dans chaque cas, déterminer le terme général de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ puis exprimer simplement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n + 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

●●○○ Exercice 10 - Avec une suite auxiliaire

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

1. Démontrer que la suite (v_n), définie par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$, est une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite (u_n) puis calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

●●●○ Exercice 11 - Démonstration sur les SRL2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie par la donnée de u_0 et u_1 ainsi que la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
Notons Δ le discriminant de l'équation $x^2 - ax - b = 0$ et supposons que $\Delta \geq 0$. Notons également x_1 et x_2 les deux solutions (éventuellement égales) de cette équation.

1. Exprimer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ en fonction de a et b.
2. Considérons la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - x_1 u_n$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, puis en déduire son terme général.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}(u_{k+1} - x_1 u_k)$.
4. Déduire des questions précédentes, en distinguant les cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$, le terme général de (u_n).

●●○○ Exercice 12 - SRL2

Dans chaque cas, déterminer le terme général de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

1. $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1\ ;\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1\ ;\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4}\ ;\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$

●●○○ Exercice 13 - Fibonacci et les escaliers

Pour $n \geq 1$, on dispose d'un escalier à n marches et on suppose que l'on est capable de monter les marches soit une par une, soit par deux. On note u_n le nombre de façons de monter cet escalier.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
3. En déduire le terme général de (u_n).
4. Préciser $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

●○○○ Exercice 14 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

1. Créer une fonction `Python` qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie u_n en sortie.

2. Conjecturer le terme général de (u_n) puis démontrer cette conjecture.
3. On considère le programme suivant, écrit en Python :

```python
n=0
u=1/2
while u>10**(-4) :
    u=u/(u+1)
    n=n+1
print(n)
```

Quelle sera la valeur affichée par l'algorithme ?

4. Transformer le programme précédent en une fonction `seuil(a)` qui renvoie le plus petit entier naturel n_0 tel que :
$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq a$.

●○○○ Exercice 15 - Suite récurrente d'ordre 1

On considère la suite (u_n), définie par : $\begin{cases} u_0 = e \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n) \end{cases}$.

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel non nul n en argument d'entrée et renvoie la valeur de u_n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq e$.

●●○○ Exercice 16 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x + 2$ ainsi que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tout $x \in]1;2[$, $1 < f(x) < 2$.
3. Démontrer alors, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
4. **4.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$.
   4.b. Conclure quant aux variations de la suite (u_n).

●●○○ Exercice 17 - Trouver le terme général

Dans chaque cas, déterminer le terme général de la suite (u_n) donnée.

1. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = n \times u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2^n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 0\ ;\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1 - n \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$

●●○○ Exercice 18 - Suites imbriquées

Considérons les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

1. Écrire une fonction Python prenant un entier naturel n en argument d'entrée et renvoyant les valeurs de a_n et b_n en sortie.
2. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.
3. **Méthode 1 :**
   3.a. Déterminer la nature de la suite (s_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = a_n + b_n$.
   3.b. Déterminer la nature de la suite (d_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = a_n - b_n$.
   3.c. En déduire le terme général des suites (a_n) et (b_n).
4. **Méthode 2 :**
   4.a. Démontrer que (a_n) est une suite récurrente linaire d'ordre 2.
   4.b. En déduire le terme général de (a_n) puis celui de (b_n).

●●●○ Exercice 19 - Suites imbriquées

On étudie l'évolution de deux fourmilières A et B. Chaque mois, 20% des fourmis de la population A passent en B et 30% des fourmis de la population B passent en A. On note a_n et b_n le nombre de milliers de fourmis, le mois n, respectivement dans les fourmilières A et B. Initialement, on a : $a_0 = 320$

et $b_0 = 180$; et on définit ainsi les suites (a_n) et (b_n) sur $\mathbb{N}$.
Déterminer les termes généraux des suites (a_n) et (b_n).

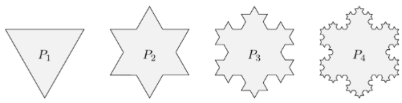
●●●○ Exercice 20 - Suite homographique

Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$ ainsi que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{5x-4}{x+1}$.

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   On note α l'unique solution réelle de cette équation.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $u_n > \alpha$.
4. Soit maintenant (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$, où α est le réel déterminé à la question précédente.
   - 4.a. Calculer les premiers termes de la suite (v_n). Que peut-on conjecturer ?
   - 4.b. Démontrer cette conjecture.
   - 4.c. En déduire le terme général de (v_n) puis celui de (u_n).

●●●○ Exercice 21 - Flocon de Von Koch

Considérons un triangle équilatéral, noté P_1, de côté 1. Chaque côté est ensuite divisé en trois parties égales et on construit à partir du segment situé au milieu de chaque côté un nouveau triangle équilatéral à l'extérieur de P_1. On obtient ainsi un polygone P_2. En procédant de la même façon à partir de P_2, on trouve un polygone P_3, puis en itérant le processus, on construit une suite de polygones réguliers, notée (P_n).



Notons, pour tout entier non nul n :

- c_n le nombre de côtés du polygone P_n,
- l_n la longueur d'un côté du polygone P_n,
- p_n le périmètre de P_n,
- $\mathcal{A}_n$ l'aire de P_n.

1. Montrer que la suite (c_n) est géométrique puis en déduire son terme général.
   - 1.a. Déterminer le terme général de (l_n) puis en déduire celui de (p_n).
   - 1.b. Que dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$?
2. - 2.a. Démontrer que $\mathcal{A}_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ puis que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
   - 2.b. En déduire que pour tout $n \geq 1$: $\mathcal{A}_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$.
   - 2.c. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$.

●●●○ Exercice 22 - L'équation des crédits !

Considérons un crédit immobilier à taux fixe dont le taux mensuel est noté t, la mensualité (constante) est notée M, la durée (en mois) est notée N et le capital emprunté (en euros) est noté C.
L'objectif est de déterminer une équation reliant ces quatre variables.
Pour $n \geq 0$, notons C_n le capital restant à rembourser à la banque à l'issue du n-ième mois de sorte que $C_0 = C$, et I_n l'intérêt remboursé durant le n-ième mois.
On rappelle que l'intérêt à rembourser sur un mois est calculé à partir du capital restant à rembourser à la banque au début de ce mois.

1. Exprimer C_1 en fonction de t, M et C.
2. Pour $k \in [\![1;N]\!]$, exprimer C_k en fonction de C, M, t et k.
3. Que dire de C_N ? En déduire une équation reliant C, N, t et M.
4. On note I le montant total des intérêts versés par le client suite au remboursement intégral du crédit. Exprimer I en fonction de N, M et C.
   Retrouver ce résultat en utilisant le fait que $I = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} I_k$.
5. *Quelques applications numériques...*