4

Calcul

Systèmes linéaires

Introduction...

La notion de système d'équations est ancienne, mais l'interprétation et l'utilisation des systèmes linéaires dans des problèmes de géométrie sont quant à elles plus récentes, et dues à René Descartes (1596-1650, français). On lui doit en effet l'algébrisation de la géométrie grâce à l'utilisation des coordonnées cartésiennes.
Carl Friedriech Gauss (1777-1855, allemand) et Wilhelm Jordan (1845-1899, allemand) fourniront ensuite un algorithme de résolution des systèmes linéaires dans le cas général ; algorithme qui porte aujourd'hui leurs noms.

Notons tout de même que la méthode était connue et utilisée en Chine bien avant le XIXème siècle : il semblerait que des écrits évoquent cette méthode au IIème siècle avant JC...

Pour bien démarrer…

1 # Une trivialité… Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a = b$ et $c = d$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda a + \mu c =$ ....

2 # Considérons l'équation $2x + y = 0$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$.

- Qu'est-ce qu'une solution de cette équation ? En déterminer une.
- Combien cette équation possède-t-elle de solutions ? Les déterminer.
- Que dire de la somme de deux solutions de cette équation ?
- Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de cette équation.

DÉFINITIONS 1 - $\mathbb{R}^n$ ET n-UPLETS

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

D1# On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,/\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\right\}$. On appelle ***n*-uplet** un élément de $\mathbb{R}^n$.

D2# On définit les opérations suivantes :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \lambda (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

CAS PARTICULIERS :

$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels,
$\mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets de réels,
$\mathbb{R}^4$ l'ensemble des quadruplets de réels...

☞ POUR INFO...

De la même façon, si E est un ensemble quelconque, on définit $\mathrm{E}^n = \left\{(e_1, e_2, \dots, e_n) \,/\, e_1, \dots, e_n \in \mathrm{E}\right\}$.

I SYSTÈMES LINÉAIRES : DÉFINITIONS & PREMIERS EXEMPLES

DÉFINITIONS 2 - SYSTÈME LINÉAIRE, SOLUTION

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

D1# On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** un système d'équations de la forme :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 & (\mathrm{L}_2) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & (\mathrm{L}_i) \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n & (\mathrm{L}_n) \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ et b_i sont des réels fixés (les $a_{i,j}$ sont appelés **coefficients** du système et les b_i constituent le **second membre** du système) et les réels $x_1, x_2, \dots, x_p$ désignent les inconnues.

D2# Lorsque pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ $b_i = 0$, on dit que (S) est un système **homogène** (ou **sans second membre**).

D3# **Une solution** de (S) est un p-*uplet* $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie **toutes** les équations de (S).

D4# **Résoudre** (S), c'est trouver *tous* les p-uplets de réels qui sont solutions.

D5# Un système qui n'admet qu'une unique solution est appelé **système de Cramer**.

PETITE REMARQUE

Tout système linéaire homogène a au moins une solution :

EXEMPLES 1

E1 $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$ est un système linéaire homogène de 2 équations à 3 inconnues.

Les triplets .... en sont des solutions.

E2 $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 5 \end{array} \right.$ est un système linéaire non homogène de 4 équations à 3 inconnues. Il n'a aucune solution.

PETITE REMARQUE

Il y a un implicite sur l'ordre du triplet (qui a toute son importance !) : on considère que c'est l'ordre alphabétique ou l'ordre d'indexation des inconnues.

DE L'IMPORTANCE DES SYSTÈMES LINÉAIRES HOMOGÈNES

Considérons un système linéaire à n équations et p inconnues, noté (S), dont on suppose connaître une solution particulière, notée $(x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{pp})$. On note (S_0) le système homogène associé à (S).

Soient $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. On a :

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ est solution de (S)} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & a_{1,1}x_{1p} + a_{1,2}x_{2p} + \cdots + a_{1,p}x_{pp} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & a_{2,1}x_{1p} + a_{2,2}x_{2p} + \cdots + a_{2,p}x_{pp} \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & a_{n,1}x_{1p} + a_{n,2}x_{2p} + \cdots + a_{n,p}x_{pp} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}(x_1 - x_{1p}) + a_{1,2}(x_2 - x_{2p}) + \cdots + a_{1,p}(x_p - x_{pp}) & = & 0 \\ a_{2,1}(x_1 - x_{1p}) + a_{2,2}(x_2 - x_{2p}) + \cdots + a_{2,p}(x_p - x_{pp}) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}(x_1 - x_{1p}) + a_{n,2}(x_2 - x_{2p}) + \cdots + a_{n,p}(x_p - x_{pp}) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left(x_1 - x_{1p}, x_2 - x_{2p}, \dots, x_p - x_{pp}\right) \text{ est solution de } (\mathrm{S}_0)$$

$$\iff (x_1, \dots, x_p) - (x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{pp}) \text{ est solution de } (\mathrm{S}_0)$$

Nous venons donc d'établir le résultat suivant :

Théorème 1 - Ensemble des solutions

Soient (S) un système linéaire de n équations à p inconnues possédant au moins une solution et (S_0) le système linéaire homogène associé.
Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de (S) et $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des solutions de (S_0). Si X_p désigne un p-uplet solution particulière de (S), alors :

$$\mathcal{E} = \left\{X_p + X_0 \;/\; X_0 \in \mathcal{E}_0\right\}$$

Autrement dit : les solutions de (S) sont les p-uplets obtenus en faisant la somme d'*une* solution particulière de (S) et de *toutes* les solutions de (S_0).

solution générale du système = solution particulière + solution générale du système homogène

> ☞ **Pour info...** Nous verrons un résultat analogue dans le chapitre sur les équations différentielles. Ce résultat est en fait adaptable à toutes les équations linéaires et il sera moins lourd de le démontrer après avoir introduit les matrices...

Ce théorème justifie l'enjeu du système homogène associé à un système linéaire : l'ensemble des solutions de (S_0) fournit quasiment, ou en tout cas, fournit la structure de l'ensemble des solutions de (S).
Précisons donc un peu l'ensemble des solutions des systèmes linéaires homogènes avec le théorème suivant :

Théorème 2 - Structure des solutions d'un système linéaire homogène

Soient (S_0) un système linéaire homogène et $\mathcal{E}_0$ l'ensemble de ses solutions.

1. Si X et X′ sont des solutions de (S_0), alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu X'$ est encore une solution. Autrement dit :
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\quad \forall X, X' \in \mathcal{E}_0,\quad \lambda X + \mu X' \in \mathcal{E}_0$$
2. (S_0) a soit une unique solution soit une infinité.

> **Vocabulaire** On dit que $\lambda X + \mu X'$ est une **combinaison linéaire** de X et X′ ; et que $\mathcal{E}_0$ est **stable par combinaisons linéaires**.

★ Démonstration :

1. Aucune difficulté, il suffit d'écrire les choses (un peu lourd à écrire, certes).
2. Découle immédiatement du point précédent :
   - Soit le p-uplet $(0, 0, \dots 0)$ est seule solution du système ;
   - Soit on considère $X \neq (0, 0, \dots, 0)$ une autre solution. Dans ce cas, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le p-uplet λX est encore solution : d'où l'infinité.

★

Et le corollaire immédiat des deux théorèmes précédents :

Théorème 3 - Nombre de solutions d'un système linéaire

Un système linéaire a soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

II En route vers la résolution !

Définition 3 - Systèmes équivalents

On dit que deux systèmes (S) et (S′) sont **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

> ✎ **Notation** On écrira alors $(S) \iff (S')$.

Voyons déjà un cas simple que nous sommes déjà en mesure de traiter :

Définition 4 - Système échelonné

Soit (S) un système dont $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$ sont les coefficients.
On dit que le système (S) est **échelonné** (ou triangulaire) lorsque : $\forall i > j,\ \ a_{i,j} = 0$.

Exemples 2

E1 Le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & 5 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$ est échelonné. **Résolvons-le :**

E2 Le système $\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ \phantom{x +{}} y + 2z \phantom{{}+t} = 0 \end{cases}$ est échelonné. **Résolvons-le :**

> **Vocabulaire**
> On dit parfois que z et t sont alors des inconnues **secondaires** ou **auxiliaires**.

On voit donc l'intérêt des systèmes échelonnés : ils se résolvent très facilement. L'objectif est donc, quand on a un système linéaire, de savoir si l'on peut le transformer en un système échelonné qui lui soit équivalent et si oui, comment faire !

II.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Propriété 1 - Opérations élémentaires

On passe d'un système à un système équivalent en effectuant les *opérations élémentaires* suivantes :

- échanger les lignes i et j : $\mathrm{L}_i \longleftrightarrow \mathrm{L}_j$
- multiplier la ligne i par un réel a **non nul** : $\mathrm{L}_i \longleftarrow a\mathrm{L}_i$
- ajouter b fois la ligne j à la ligne i : $\mathrm{L}_i \longleftarrow \mathrm{L}_i + b\mathrm{L}_j$

> **Petite remarque**
> Il est dont possible d'effectuer l'opération $\mathrm{L}_i \longleftarrow a\mathrm{L}_i + b\mathrm{L}_j$ à condition que $a \neq 0$.

★ Démonstration : Les démonstrations ne sont pas très compliquées. L'idée est de raisonner par double inclusion pour démontrer l'égalité des ensembles de solutions...

- $\subset$ Si X est solution du système initial, alors il est solution du système obtenu après telle opération élémentaire.
- $\supset$ Si X est solution du système obtenu après telle opération élémentaire, alors il est solution du système initial.

★

II.2 Méthode de résolution

La **méthode (du pivot) de Gauss** consiste à utiliser les opérations élémentaires sur les lignes pour trouver un système échelonné qui soit équivalent au système initial. La fin de la résolution sera alors immédiate... Mettons-la en œuvre sur des exemples avant de la voir dans le cas général.

Exemples 3

E1 **Échelonnons le système :** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ -3x + 3y + z = 6 \end{cases}$

> **✍ Rédaction**
> On pense à indiquer les opérations sur les lignes effectuées à chaque étape.

E2 **Échelonnons le système :** $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 7 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

Il est possible de formaliser la méthode que nous avons employée sur les exemples précédents. Même si, dans des cas particuliers, il peut-être plus aisé de résoudre "à la main" un système, le cas général a l'avantage de fournir un *algorithme* qui fonctionne toujours et qui est programmable.

Voyons donc ce cas général. Soit (S) un système dont $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$ sont les coefficients. Voici **l'algorithme du pivot de Gauss**, dont le processus se déroule en trois étapes :

1. On choisit le premier **pivot**, c'est à dire un coefficient non nul associé à l'inconnue x_1 :
   - Si $a_{1,1} \neq 0$, on le choisit comme premier pivot.
   - Si $a_{1,1} = 0$, alors on parcourt les autres coefficients de x_1, c'est à dire les $a_{1,j}$ pour $j \in [\![2;n]\!]$ (de haut en bas) jusqu'à en trouver un qui soit non nul. Une fois ce j trouvé [1], on effectue l'opération $\mathrm{L}_i \longleftrightarrow \mathrm{L}_j$.
     Dans le nouveau système (S′) obtenu, le coefficient $a'_{1,1}$ est non nul : on le choisit comme pivot.
2. On effectue l'opération : $\mathrm{L}_1 \longleftarrow \dfrac{1}{a'_{1,1}}\mathrm{L}_1$.
3. Pour tout $j \in [\![2;n]\!]$, on effectue l'opération $\mathrm{L}_j \longleftarrow \mathrm{L}_j - a'_{j,1}\mathrm{L}_1$ qui permet d'obtenir un coefficient nul devant x_1 sur la ligne numéro j.

[1] Il y a forcément au moins un j qui convient, sinon l'inconnue x_1 n'apparaitrait pas dans le système !

✓ Rigueur !
La première étape était donc nécessaire !

On obtient ainsi un système équivalent au système initial de la forme :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} a'_{1,1}x_1 & + & \dfrac{a'_{1,2}}{a'_{1,1}}x_2 & + & \ldots & + & \dfrac{a'_{1,p}}{a'_{1,1}}x_p & = & \dfrac{b'_1}{a'_{1,1}} & (\mathrm{L}_1) \\ 0 & + & \left(a'_{2,2} - \dfrac{a'_{2,1}a'_{1,2}}{a'_{1,1}}\right)x_2 & + & \ldots & + & \left(a'_{2,p} - \dfrac{a'_{2,1}a'_{1,p}}{a'_{1,1}}\right)x_p & = & b'_2 - \dfrac{a'_{2,1}b'_1}{a'_{1,1}} & (\mathrm{L}_2) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & + & \left(a'_{n,2} - \dfrac{a'_{n,1}a'_{1,2}}{a'_{1,1}}\right)x_2 & + & \ldots & + & \left(a'_{n,p} - \dfrac{a'_{n,1}a'_{1,p}}{a'_{1,1}}\right)x_p & = & b'_n - \dfrac{a'_{n,1}b'_1}{a'_{1,1}} & (\mathrm{L}_n) \end{array}\right.$$

Petite remarque
A ce stade, il est tout à fait possible que tous les coefficients d'une des lignes L_2 à L_n du système obtenu soient nuls...

Il suffit maintenant de réitérer le processus sur le *sous-système* suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \left(a'_{2,2} - \dfrac{a'_{2,1}a'_{1,2}}{a'_{1,1}}\right)x_2 & + & \ldots & + & \left(a'_{2,p} - \dfrac{a'_{2,1}a'_{1,p}}{a'_{1,1}}\right)x_p & = & b'_2 - \dfrac{a'_{2,1}b'_1}{a'_{1,1}} & (\mathrm{L}_2) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \left(a'_{n,2} - \dfrac{a'_{n,1}a'_{1,2}}{a'_{1,1}}\right)x_2 & + & \ldots & + & \left(a'_{n,p} - \dfrac{a'_{n,1}a'_{1,p}}{a'_{1,1}}\right)x_p & = & b'_n - \dfrac{a'_{n,1}b'_1}{a'_{1,1}} & (\mathrm{L}_n) \end{array}\right.$$

puis on réitère à nouveau... jusqu'à arriver à un des deux cas suivants :

- tous les coefficients du sous-système obtenu sont nuls, il est donc impossible de trouver un pivot non nul ;
- le sous-système obtenu est vide, c'est à dire qu'il n'y a plus d'équations et donc que le processus a déjà été répété n fois.

Dans les deux cas, le système obtenu à la fin est échelonné.

★Subtile...★
En fait, si on arrive à ce cas, l'étape 3 du processus n'aura pas pu être réalisée, mais ce n'est pas grave... et nécessairement $n = p$.

La validité de cet algorithme fournit une démonstration aux deux résultats suivants :

Théorème 4

1. Tout système linéaire de n équations à p inconnues est équivalent à un système échelonné de n équations à p inconnues.
2. Un système linéaire de n équations à n inconnues est un système de Cramer si, et seulement si, l'algorithme du pivot de Gauss a exhibé n pivots (non nuls).

☞ Pour info...
Le système échelonné étant éventuellement constitué de lignes "0 = 0"...

Remarques

R 1. L'algorithme peut être partiel (on s'arrête une fois le système échelonné, puis on remonte en réinjectant les inconnues trouvées) ou total (une fois le système échelonné, et les éventuelles inconnues secondaires isolées sur le membre de droite, on continue l'algorithme pour résoudre le système).

R 2. On peut aisément montrer que la résolution d'un système linéaire à n équations et p inconnues nécessite au plus $n(n-1)$ opérations élémentaires.
En particulier, si $n = 3$: 6 étapes au maximum !

R 3. De façon générale, nous exécuterons cet algorithme sur les systèmes que nous aurons à résoudre ; l'avantage est qu'une résolution de système ne demandera donc aucune réflexion !
On évitera ainsi tous les ajustements "pratiques" consistant à intervertir des lignes afin d'obtenir un pivot plus simple. En effet, même si cela simplifie légèrement un calcul, il n'est aucunement dit qu'il simplifiera le reste de la résolution. Nous évitons alors, en faisant de trop nombreux échanges, des erreurs de recopie, et nous gagnons également du temps !

R 4. La manipulation de fractions étant pénible, nous effectuerons par exemple l'opération $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ plutôt que $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$, dont l'objectif est le même.

Exemples 4

E1 **Résolvons le système :** $\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$

$\boxed{\text{E2}}$ **Résolvons le système :** $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

$\boxed{\text{E3}}$ **Résolvons le système :** $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -3x & - & 3y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$