5

Calcul

Polynômes

Introduction...

Ah... les équations ! Impossible de faire des mathématiques sans parler d'équation. Équation diophantienne, équation différentielle, équation aux dérivées partielles,... Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux équations algébriques, dont vous connaissez déjà des cas particuliers : les équations du premier et du second degré.

Les équations étudiées seront donc de la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, où les a_i sont des réels connus (coefficients) et l'inconnu est un réel x.

Nous retrouverons bien entendue la méthode vue pour les équations du second degré... En revanche, c'est plus subtile pour les degrés supérieurs.

- Degré 3 : Tartaglia (Niccolo Fontana, 1499-1557, italien) a donné une méthode dans des cas particuliers ; sa méthode a été volée et étendue au cas général par Girolama Cardano (1501-1576, italien) qui en a profité pour *inventer* les **nombres complexes**...
- Degré 4 : nous devons la méthode à Ludovico Ferrari (1522-1565, italien)
- Degrés supérieurs ou égaux à 5 : Niels Abel (1802-1829, norvégien) a publié en 1824 un article démontrant qu'**il n'existe pas de méthode générale** pour déterminer et exprimer sous forme de radicaux les racines d'une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 5. Peu après, Evariste Galois (1811-1832, français) a donné un moyen de savoir quelles équations algébriques de degré supérieur ou égal à 5 sont résolubles par radicaux. On doit à Galois une vision toute nouvelle de la recherche des racines d'une fonction polynomiale à l'aide de sa très belle et fameuse **théorie de Galois**.
  Que de frustration ! D'autant plus que l'on sait, d'après le théorème fondamental de l'algèbre, que *tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe* (la démonstration de ce théorème est due aux efforts conjoints de bon nombre de mathématiciens : Lagrange, Cauchy, D'Alembert, Gauss... entre la fin du XVIIIème et le début du XIXème siècle).

Bref : plus de 10 siècles de recherches pour aboutir aux résultats complets sur la résolubilité par radicaux des équations algébriques...

I Définitions

Définitions 1 - Fonctions polynomiale

D1# Soit $n \in \mathbb{N}$. La **fonction puissance n** est la fonction :

$$.^n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}} \end{array} \right.$$

D2# Une **fonction polynomiale** est une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Les réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés **coefficients** de P.

D3# La **fonction polynomiale nulle** est la fonction polynomiale dont tous les coefficients sont nuls (fonction constante égale à 0).

D4# **Degré d'une fonction polynomiale, noté $\deg(\mathrm{P})$:**

- Si P est la fonction constante égale à 0, on dit, par convention, que $\deg(\mathrm{P}) = -\infty$;
- sinon, $\deg(\mathrm{P})$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

D5# Si $\deg(\mathrm{P}) = n$, alors le **coefficient dominant** de P est le coefficient a_n.

Important !
Par convention :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^0 = 1$$

et l'on pourra ainsi écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Les opérations sur les fonctions (somme, multiplication par un réel, produit...) sont également possibles sur les fonctions polynomiales.

Petite remarque
En France, nous avons l'habitude (mauvaise ?) d'écrire les polynômes selon les puissances décroissantes...

Exemples 1

E1 Si $a \neq 0$, la fonction $\mathrm{P} : x \longmapsto ax^3 - x + 3$ est polynomiale de degré 3 ; en revanche, si $a = 0$, elle est de degré 1.

E2 Soient P et Q deux fonctions polynomiales de degré 2. Que dire de $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$?

E3 Soient P et Q deux fonctions polynomiales telles que $\deg(\mathrm{P}) = 3$ et $\deg(\mathrm{Q}) = 2$. Que dire de $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$?

E4 Soient P et Q deux fonctions polynomiales tels que $\deg(\mathrm{P}) = 3$ et $\deg(\mathrm{Q}) = 2$. Que dire de $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$?

E5 Soit P une fonction polynomiale de degré 4. Que dire de P' ?

E6 $\mathbb{R}_1[x] =$

E7 $\mathbb{R}_2[x] =$

✎ Notation
On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels de **degré inférieur ou égal à n** ; et $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynomiales à coefficients réels.

Voici les propriétés sur les degrés mises en évidence dans les exemples précédents :

Propriétés 1

Soient P et Q deux fonctions polynomiales.

P1# P + Q est une fonction polynomiale et $\deg(P+Q) \leq \max\Big(\deg(P), \deg(Q)\Big)$.

P2# P × Q est une fonction polynomiale et $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

P3# Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, P^m est une fonction polynomiale et $\deg(P^m) = m\deg(P)$.

P4# Si P est constante, alors $P' = 0$; sinon, P' n'est pas nulle et $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

★ Démonstration :

P1#
- Si l'une des fonctions est nulle, alors le résultat est évident.
- Sinon, les deux fonctions polynomiales P et Q ne sont pas nulles, et il existe alors des réels $a_0, a_1, ..., a_{\deg(P)}$ (avec $a_{\deg(P)} \neq 0$) et $b_0, b_1, ..., b_{\deg(Q)}$ (avec $b_{\deg(Q)} \neq 0$) tels que $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k x^k$ et $Q : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\deg(Q)} b_k x^k$.

  On pose $d = \max\Big(\deg(P), \deg(Q)\Big)$. Ainsi, on peut écrire :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \quad ; \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{d} b_k x^k$$

  avec éventuellement : $\forall k \in [\![\deg(P)+1 ; d]\!]$, $a_k = 0$ ou $\forall k \in [\![\deg(Q)+1 ; d]\!]$, $b_k = 0$.
  D'où :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ (P+Q)(x) = \sum_{k=0}^{d} (a_k + b_k) x^k$$

  Conclusion : par définition, P+Q est bien une fonction polynomiale et son degré est soit $-\infty$ (si pour tout $k \in [\![0 ; d]\!]$, $a_k + b_k = 0$) soit le plus grand entier k tel que $(a_k + b_k) \neq 0$: dans les deux cas, il est inférieur ou égal à d.

P2# Un peu plus pénible à écrire...

P3# Par récurrence immédiate (à faire) en utilisant le point précédent.

P4#
- Évident.
- Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \neq 0$ et $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ une fonction polynomiale non constante de degré n. Par conséquent, $n \in \mathbb{N}^*$.
  P est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

  $$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1}$$

  P' est donc une fonction polynomiale. De plus $\deg(P) = n$, donc $a_n \neq 0$. Et comme $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n a_n \neq 0$.
  Conclusion : $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

★

II Racines d'une fonction polynomiale et factorisation...

Définition 2 - Racine d'une fonction polynomiale

Soient P une fonction polynomiale et α un réel.
On dit que α est **racine de P** lorsque $P(\alpha) = 0$.

Pour les fonctions polynomiales de degré 1 (qui sont des fonctions affines), la recherche de racine ne pose plus de souci depuis bien longtemps... Pour celles de degré 2 non plus, mais faisons tout de même des rappels et quelques compléments.

II.1 Racines d'une fonction polynomiale de degré 2

Théorème 1 - Racines d'une fonction polynomiale de degré 2 & factorisation.

Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ et $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré 2.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine réelle et il ne peut se factoriser en produit de fonctions polynomiales de degré 1.
2. Si $\Delta = 0$, alors le réel x_0 défini par $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ est la seule racine de P ; et de plus :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a(x - x_0)^2$$

3. Si $\Delta > 0$, alors les réels x_1 et x_2 définis par $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ sont *les* racines de P ; et de plus :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Un peu d'Histoire

La méthode de résolution des équations de degré 2 est due à Muhammad Ibn Musa al-Khuwarizmi, qui l'a publiée au IXème siècle.

Vocabulaire

- Δ est appelé **discriminant de P**...
- On dit que x_1 et x_2 sont **racines simples** ou **racine de multiplicité 1** de P ; et que x_0 est **racine double** ou **racine de multiplicité 2**...

★ **Démonstration** : Le début est calculatoire et commun aux trois cas. Il se résume à établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) && \text{car } a \neq 0\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

Explication
Dans $x^2+\frac{b}{a}x$, on reconnaît le début du développement de l'identité remarquable $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$... Sauf que le terme sans x n'était pas présent, il faut donc le soustraire !

Ensuite :

1. Si $\Delta < 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

Par conséquent, pour tout réel x, ax^2+bx+c est différent de 0 et du même signe que a.
Or, si cette expression pouvait se factoriser en produit de deux fonctions polynomiales de degré, alors on en trouverait au moins une racine (tout fonction polynomiale de degré 1 a exactement une racine) : contradiction.
Conclusion : si $\Delta < 0$, alors la fonction polynomiale P n'a pas de racine réelle et il ne peut se factoriser en produit de polynômes de degré 1 ; il est alors de signe constant (signe de a) sur $\mathbb{R}$.

2. Si $\Delta = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= a(x-x_0)^2 && \text{en posant } x_0=\frac{-b}{2a}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi que pour tout réel x, ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$ (et nul en x_0).
Conclusion : cela fournit l'unique racine, la forme factorisée et le signe de P dans le cas $\Delta = 0$.

Petite remarque
Au passage, ce cas pourrait très bien être traité avec le suivant...

3. Si $\Delta > 0$, alors $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)\\
&= a(x-x_1)(x-x_2) && \text{identité remarquable, en posant } x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

Un rapide tableau de signe donnerait que ax^2+bx+c est du *signe de a à l'extérieur des racines*.
Conclusion : cela fournit les racines, la forme factorisée et le signe de P dans le cas $\Delta > 0$.

★

En conséquence de ce théorème et des formes factorisées obtenues, on a immédiatement :

Propriétés 2 - Relations coefficients / racines

Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ et $\mathrm{P} : x \longmapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynomiale de degré 2.

P1# Le produit des racines *comptées avec leurs multiplicités* de P est égal à $\frac{c}{a}$.

P2# La somme des racines *comptées avec leurs multiplicités* de P est égale à $\frac{-b}{a}$.

Important !
L'expression *comptées avec leurs multiplicités* permet de regrouper les cas $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$.

Exemple 2

Existe-t-il deux réels dont la somme vaut 2 et le produit −1 ? Si oui, déterminons-les.

II.2 Retour au cas général : racines et factorisation

Théorème 2 - de factorisation des fonctions polynomiales

Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\text{"}\alpha \text{ est racine de P"} \iff \exists \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x] \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = (x-\alpha)\times \mathrm{Q}(x)$$

Utile
On a même une information sur les degrés :

★ **Démonstration** : Raisonnons par double implication...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.
Dans ce cas :

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$$

Ainsi, α est une racine de P.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que α est une racine de P. On a ainsi $P(\alpha) = 0$.

- **1^er^ cas :** Si P est la polynomiale nulle, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = (x-\alpha) \times 0$$

- **2^ème^ cas :** Si P est une fonction polynomiale de degré 0, elle n'a pas de racine.
- **3^ème^ cas :** Si P est une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 1 (notons n son degré). Il existe alors des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $a_n \neq 0$.

  Ainsi, puisque $P(\alpha) = 0$, on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
P(x) &= P(x) - P(\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k && \text{par linéarité de la somme} \\
&= a_0(x^0 - \alpha^0) + \sum_{k=1}^{n} a_k (x^k - \alpha^k) && x^0 - \alpha^0 = 1 - 1 = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k (x^k - \alpha^k) && \text{voir le rappel...} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k (x-\alpha) \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= (x-\alpha) \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i}
\end{aligned}$$

> ☞ **Rappel...**
> On a démontré (chapitre 2, exercice 5) : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$,
> $a^N - b^N = (a-b) \sum_{i=0}^{N-1} a^i b^{N-1-i}$.

  Or, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la fonction $x \longmapsto \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i}$ est, par définition, une fonction polynomiale.

  Ainsi, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la fonction $x \longmapsto a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i}$ est une fonction polynomiale.

  Et donc, la fonction $x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i}$ est une somme de fonctions polynomiales, c'est donc une fonction polynomiale.
  Au final, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

★

En pratique, ce théorème est très important dans la recherche des racines d'une fonction polynomiale :

> ♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer les racines et une factorisation d'une fonction polynomiale P :**
> 1. Si $\deg(P) = 1$: on sait faire depuis longtemps déjà...
> 2. Si $\deg(P) = 2$: se référer au théorème 1.
> 3. Si $\deg(P) \geq 3$:
>   - on regarde si on connaît une racine α de P ; sinon, on en cherche une *évidente* parmi les nombres $-2; -1; 0; 1; 2$...
>   - une fois une racine α trouvée, on factorise de tête $P(x)$ par $x - \alpha$: $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$;
>   - on réitère le procédé sur la fonction polynomiale Q, qui est de degré $\deg(P) - 1$...

Exemple 3

E8 Déterminons toutes les racines, ainsi que la forme factorisée en produit de fonctions polynomiales de plus petits degrés, de la fonction polynomiale $P : x \longmapsto x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x$.

Pour terminer, des résultats parfois utiles :

Théorème 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Toute fonction polynomiale de degré n admet au plus n racines.
2. Si une fonction polynomiale de $\mathbb{R}_n[x]$ admet au moins $n+1$ racines (en comptant leurs multiplicités), alors c'est la fonction polynomiale nulle.
3. Deux fonctions polynomiales sont égales si, et seulement si, elles ont même degré et mêmes coefficients.

> **Petite remarque**
> En particulier, si une fonction polynomiale admet une infinité de racines, c'est la fonction polynomiale nulle.

★

Démonstration :

1. Par récurrence sur n...
   - **Initialisation.** Pour $n = 1$.
     Soit P un polynôme de degré 1. Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x) = ax + b$. Ainsi, l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ possède une unique solution : $\dfrac{-b}{a}$ (nécessité que $a \neq 0$). Un polynôme de degré 1 a donc exactement une racine, en particulier, il en a au plus une.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que "toute fonction polynomiale de degré n possède au plus n racines" et montrons que "toute fonction polynomiale de degré $n+1$ possède au plus $n+1$ racines". Soit P une fonction polynomiale de degré $n+1$.
     - Si P n'a aucune racine, alors en particulier elle en a au plus $n+1$. Dans ce cas, l'hérédité est établie.
     - Sinon, P admet au moins une racine, notée α.
       D'après le théorème précédent, il existe alors $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x) = (x - \alpha)\mathrm{Q}(x)$.
       - ⇝ Puisque $\deg(\mathrm{P}) = n+1$, on a $\deg(\mathrm{Q}) = n$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, Q possède au plus n racines.
       - ⇝ De plus, si β est une racine de Q, on a $\mathrm{P}(\beta) = 0$, donc β est également une racine de P.

       De ce qui précède on déduit donc que P possède au plus $n+1$ racines : les "au plus n" racines de Q et la racine α (qui peuvent être égales). L'hérédité est ainsi établie.
2. D'après ce qui précède, une fonction polynomiale non nulle de $\mathbb{R}_n[x]$ possède au plus n racines (soit elle est constante et elle n'en a pas, soit elle est non constante et elle en a au plus n)... Si elle en a au moins $n+1$, alors elle est nécessairement nulle.
3. Ce résultat découle directement du précédent... On veut démontrer une équivalence, on raisonne donc par double-implication.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Immédiat !

   > **Petite remarque**
   > Si l'une des deux (P ou Q) est nulle, le résultat se résume à la définition de le fonction polynomiale nulle !

   $\boxed{\Longrightarrow}$ Soient deux fonctions polynomiales P et Q non nulles.
   Il existe alors des réels $a_0, a_1, \dots, a_{\deg(\mathrm{P})}$ (avec $a_{\deg(\mathrm{P})} \neq 0$) et $b_0, b_1, \dots, b_{\deg(\mathrm{Q})}$ (avec $b_{\deg(\mathrm{Q})} \neq 0$) tels que

   $$\mathrm{P} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\deg(\mathrm{P})} a_k x^k \quad ; \quad \mathrm{Q} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\deg(\mathrm{Q})} b_k x^k$$

   On pose $d = \max\big(\deg(\mathrm{P}), \deg(\mathrm{Q})\big)$.
   Ainsi, on peut écrire :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \quad ; \quad \mathrm{Q}(x) = \sum_{k=0}^{d} b_k x_k$$

   avec éventuellement : $\forall k \in [\![\deg(\mathrm{P}) + 1 ; d]\!]$, $a_k = 0$ ou $\forall k \in [\![\deg(\mathrm{Q}) + 1 ; d]\!]$, $b_k = 0$.
   D'où :

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{P} = \mathrm{Q} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x) && \text{par définition de l'égalité de deux fonctions} \\
   &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{d} a_k x^k = \sum_{k=0}^{d} b_k x^k && \text{par linéarité de la somme} \\
   &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{d} (a_k - b_k) x^k = 0
   \end{aligned}$$

   Or, cette dernière égalité *implique* que la fonction polynomiale $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{d} (a_k - b_k) x^k$ possède une infinité de racines (tous les réels) : c'est donc, d'après le point précédent, la fonction polynomiale nulle.
   Par conséquent : $\forall k \in [\![0 ; d]\!]$, $a_b - b_k = 0$.
   C'est à dire :

   $$\forall k \in [\![0 ; d]\!],\ \ a_b = b_k$$

   Conclusion : les polynômes P et Q ont donc le même degré et les mêmes coefficients.

   > **Petite remarque**
   > On perd l'équivalence à cause de ce "*implique*"... Mais il n'était pas nécessaire de la conserver, puisque l'on veut simplement montrer une implication !

★

III Deux notions à la limite du programme

Nous connaissons bien la division euclidienne sur les entiers, vue à l'école primaire... Voyons-la sur les fonctions polynomiales (la démonstration est largement hors programme) :

Théorème 4 - Division euclidienne de polynômes

Si P et D sont deux fonctions polynomiales non nulles, alors il existe un unique couple (Q,R) de fonctions polynomiales telles que :

$$\begin{cases} P = D \times Q + R \\ \deg(R) < \deg(D) \end{cases}$$

Vocabulaire

P s'appelle le **dividende**, D le **diviseur**, Q le **quotient** et R le **reste**.

Exemple 4

Soient $P : x \longmapsto x^4 + 3x - 2$ et $D : x \longmapsto x^2 + x + 1$. Effectuons la division euclidienne de P par D.

Définition 3 - Fonction rationnelle

On appelle **fonction rationnelle** toute fonction de la forme $\dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont deux fonctions polynomiales et Q n'est pas la fonction polynomiale nulle.

Petite remarque

L'ensemble de définition de $\frac{P}{Q}$ est $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des racines de Q.

Sur des exemples, voyons maintenant quelques cas de **décomposition en éléments simples** qui peuvent être utiles en pratique. Aucune théorie n'est à connaître et il n'est pas demandé de savoir ni de comprendre pourquoi cela fonctionne ainsi...

Exemples 5

E1 **Montrons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, que nous déterminerons, tels que :**

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

$\boxed{\text{E2}}$ **Montrons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, que nous déterminerons, tels que :**

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\},\ \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

★★★★★★★

En fait, la notion formelle de **polynôme** est souvent indépendante de la notion de fonction. En effet, pour que la quantité $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ existe, il suffit que les opérations suivantes soient valides sur l'objet mathématique X :

- puissances (et donc "multiplication" de X avec lui-même) de X ;
- multiplication de X par un réel ;
- addition de puissances de X entre elles.

Il arrivera donc que l'on parle du polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où X est appelée **indéterminée** et désigne un quelconque objet mathématique sur lequel les opérations nécessaires à l'existence de cette écriture sont valides. En particulier, X pourra (selon les cas) être remplacé par un réel, une matrice, une fonction... En revanche, tout ce qui a été vu dans ce chapitre se généralise aux polynômes *formels* puisque les résultats ont été établis indépendamment du fait que x désignait un nombre réel (en dehors de la partie sur la fonction polynomiale dérivée...)...

On note : $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes ; et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieurs ou égaux à n.

Vocabulaire

Si P et Q sont deux polynômes, on dit que $\frac{P}{Q}$ est une **fraction rationnelle** (fonction rationnelle dans le cas d'un quotient de deux fonctions polynomiales).

Petite remarque

Le cas où X désigne un réel est en fait le cas dans lequel nous nous sommes placés dans ce chapitre.