Exercices du chapitre 5
Polynômes

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Recherche de racines & factorisation

Dans chaque cas, déterminer toutes les racines réelles de P ainsi que la forme factorisée de $P(x)$ en produits de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.

1. $P : x \longmapsto x^3 - 8$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{array}{rcll} P(x) & = & x^3 - 8 & \\ & = & (x-2)(x^2+2x+4) & \text{car 2 est racine de } x \longmapsto x^3 - 8 \end{array}$$
   Puisque $x \longmapsto x^2 + 2x + 4$ ne possède pas de forme factorisée en produit de fonctions polynomiales de degré 1 (car pas de racines réelles, puisque son discriminant est strictement négatif), nous avons obtenu la forme factorisée de P en produit de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.
2. $P : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 2$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{array}{rcll} P(x) & = & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 & \\ & = & (x-2)(x^2-x+1) & \text{car 2 est racine de } x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \end{array}$$
   Puisque $x \longmapsto x^2 - x + 1$ ne possède pas de forme factorisée en produit de fonctions polynomiales de degré 1 (car pas de racines réelles, puisque son discriminant est strictement négatif), nous avons obtenu la forme factorisée de P en produit de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.
3. $P : x \longmapsto 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{array}{rcll} P(x) & = & 2x^3 - x^2 - 2x + 1 & \\ & = & (x-1)(2x^2+x-1) & \text{car 1 est racine de } x \longmapsto 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \\ & = & 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)(x-1) & \text{car -1 et } \frac{1}{2} \text{ sont les racines de } x \longmapsto 2x^2 + x - 1 \end{array}$$
   Nous avons obtenu la forme factorisée de P en produit de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.
4. $P : x \longmapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{array}{rcll} P(x) & = & x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & \\ & = & (x-1)(x^2-x-6) & \text{car 1 est racine de } x \longmapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\ & = & (x-1)(x+2)(x-3) & \text{car -2 et 3 sont les racines de } x \longmapsto x^2 - x - 6 \end{array}$$
   Nous avons obtenu la forme factorisée de P en produit de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.
5. $P : x \longmapsto x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{array}{rcll} P(x) & = & x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x & \\ & = & x(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) & \\ & = & x(x-1)(x^2-4x+3) & \text{car 1 est racine de } x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \\ & = & x(x-1)(x-1)(x-3) & \text{car 1 et 3 sont les racines de } x \longmapsto x^2 - 4x + 3 \\ & = & x(x-1)^2(x-3) & \end{array}$$
   Nous avons obtenu la forme factorisée de P en produit de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.
6. $P : x \longmapsto x^4 - 2x^2 + 1$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{array}{rcl} P(x) & = & x^4 - 2x^2 + 1 \\ & = & (x^2-1)^2 \\ & = & \big((x-1)(x+1)\big)^2 \\ & = & (x-1)^2(x+1)^2 \end{array}$$
   Nous avons obtenu la forme factorisée de P en produit de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.

●●○○ Exercice 2 - Racine double

Soit P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2. Démontrer le résultat :

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{array}\right\} \iff \exists Q \in \mathbb{R}[x] \;/\; \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)^2 Q(x)$$

Il s'agit de démontrer une équivalence, raisonnons donc par double-implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$.

- Sans problème, on a alors $P(1) = 0$.
- De plus, P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x)$$

D'où :

$$P'(1) = 0$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.
Par théorème de factorisation, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)Q_1(x)$.
Mais P est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = Q_1(x) + (x-1)Q_1'(x)$$

Or $P'(1) = 0$. On obtient alors : $Q_1(1) = 0$. 1 est donc racine de la fonction polynomiale Q_1... Par conséquent, d'après le théorème de factorisation, il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_1(x) = (x-1)Q_2(x)$.
On obtient ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)^2 Q_2(x)$$

On a ainsi établi :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[x] \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)^2 Q(x)$$

●●○○ Exercice 3 - Polynôme nul ?

Soit P une fonction polynomiale telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$.
Démontrer que si P admet une racine, alors P est nulle.

Supposons que P possède une racine, notée α.
On a ainsi :

$$P(\alpha+1) = P(\alpha) = 0$$

Donc $\alpha + 1$ est aussi racine de P. Ce sera encore le cas de $\alpha + 2$; et on démontre, par récurrence immédiate, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est racine de P.
Puisque la suite de réels $(\alpha + n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts, P possède une infinité de racines.

Conclusion : P est la fonction polynomiale nulle.

Pour une fois, rédigeons cette fameuse récurrence immédiate, pour bien se rendre compte qu'il suffit de l'écrire, sans réfléchir...
Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est racine de P.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$.
  Rien à faire...
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\alpha + n$ est racine de P et montrons que $\alpha + n + 1$ est racine de P.
  On a :

$$\begin{array}{rcll} P(\alpha+n+1)) & = & P(\alpha+n) & \text{car : } \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x) \\ & = & 0 & \text{car, par hypothèse de récurrence, } \alpha+n \text{ est racine de P} \end{array}$$

  $\alpha + n + 1$ est ainsi racine de P : hérédité établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est racine de P.

Petite remarque
De façon plus générale, toute fonction polynomiale périodique qui possède au moins une racine est nulle...

●●○○ Exercice 4 - Suite de polynômes

On considère la suite (P_n) de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales P_1, P_2 et P_3.
   Sans difficulté, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_1(x) = x+1 \ ; \ P_2(x) = x^2 + x + 1 \ ; \ P_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P_n.
   On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Démontrons ce résultat par récurrence...

   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     Immédiat, car on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = 1$.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$" et montrons "$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} x^k$".
     Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcll} P_{n+1}(x) & = & xP_n(x) + 1 & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & x\sum_{k=0}^{n} x^k + 1 & \\ & = & \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} + 1 & \text{changement d'indice } i = k+1 \\ & = & \sum_{i=1}^{n+1} x^i + 1 & \text{car } x^0 = 1 \\ & = & \sum_{i=0}^{n+1} x^i & \end{array}$$

     L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

●●○○ Exercice 5 - Suite de polynômes

On considère la suite (P_n) de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = (2x-1)P_n(x) \end{cases}$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales P_1, P_2 et P_3.

   Sans difficulté, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$P_1(x) = 2x-1 \ ;\ P_2(x) = (2x-1)^2 \ ;\ P_3(x) = (2x-1)^3$$

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P_n.

   On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (2x-1)^n$. Démontrons ce résultat par récurrence...

   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     Immédiat, car on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = 1$.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (2x-1)^n$" et montrons "$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = (2-1)^{n+1}$" .
     Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

     $$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (2x-1)P_n(x) \\ &= (2x-1)(2x-1)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (2x-1)^{n+1} \end{aligned}$$

     L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (2x-1)^n$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynomiale, puis préciser son degré et son coefficient dominant.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On vient d'établir :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (2x-1)^n$$

   P_n est donc une puissance d'une fonction polynomiale, c'est donc une fonction polynomiale, et de plus :

   - $\deg(P_n) = n \times \deg(x \longmapsto 2x-1) = n$
   - le coefficient dominant de P_n est le coefficient en facteur du monôme $x \longmapsto x^n$... qui est égal à 2^n.

●●●○ Exercice 6 - Équations sur des fonctions polynomiales

Dans chaque cas, déterminer les fonctions polynomiales P vérifiant la condition donnée.

> **Petite remarque**
> La mauvaise idée serait de vouloir écrire $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et d'injecter cette écriture dans l'égalité...

1. $P'^2 = P$

   L'idée est de trouver le degré des fonctions polynomiales P vérifiant $P'^2 = P$...

   - Remarquons déjà que la fonction polynomiale nulle est solution de cette équation.
   - Ensuite, les fonctions polynomiales de degré 0 (constantes non nulles) ne sont pas des solutions de cette équation.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1, telle que $P'^2 = P$.
     On a ainsi :
     $$\deg(P'^2) = \deg(P)$$
     Or $\deg(P') = \deg(P) - 1$, donc :
     $$\deg(P'^2) = 2(\deg(P) - 1)$$
     On obtient ainsi :
     $$2(\deg(P) - 1) = \deg(P)$$
     Par conséquent :
     $$\deg(P) = 2$$

> **☞ Rappel...**
> Il n'y a pas de notation pour désigner l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 2....
> $\mathbb{R}_2[x]$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

   - Résolvons maintenant l'équation $P'^2 = P$, d'inconnue P une fonction polynomiale de degré 2.
     Soit P une fonction polynomiale de degré 2. Il existe alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$. On a alors :

     $$\begin{aligned} P'^2 = P &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ P'(x)^2 = P(x)^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2ax+b)^2 = ax^2 + bx + c \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = ax^2 + bx + c \\ &\iff \begin{cases} 4a^2 = a \\ 4ab = b \\ b^2 = c \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} 4a = 1 \\ 4ab = b \\ b^2 = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = b \\ c = b^2 \end{cases} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2 \end{aligned}$$

     Conclusion : les fonctions polynomiales de degré 2 qui vérifient $P'^2 = P$ sont les fonctions $P : x \longmapsto \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2$, avec $b \in \mathbb{R}$.

   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $P'^2 = P$ est $\left\{P : x \longmapsto 0\right\} \cup \left\{P : x \longmapsto \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2,\ \text{avec } b \in \mathbb{R}\right\}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x^2) = (x^2+1)\mathrm{P}(x)$

- Remarquons déjà que la fonction polynomiale nulle est solution de cette équation.
- Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ non nulle, telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x^2) = (x^2+1)\mathrm{P}(x)$. Notons $\mathrm{Q} : x \longmapsto \mathrm{P}(x^2)$.
  Q est ainsi la composée de deux fonctions polynomiales ; c'est donc une fonction polynomiale et : $\deg(\mathrm{Q}) = 2\deg(\mathrm{P})$. On obtient ainsi :
  $$2\deg(\mathrm{P}) = \deg(x \longmapsto (x^2+1)\mathrm{P}(x))$$
  C'est à dire :
  $$2\deg(\mathrm{P}) = 2 + \deg(\mathrm{P})$$
  Par conséquent :
  $$\deg(\mathrm{P}) = 2$$

Complément
$\deg(\mathrm{P} \circ \mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P}) \times \deg(\mathrm{Q})$...

- Résolvons maintenant l'équation "$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x^2) = (x^2+1)\mathrm{P}(x)$", d'inconnue P une fonction polynomiale de degré 2.
  Soit P une fonction polynomiale de degré 2. Il existe alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$. On a alors :
  $$\begin{aligned}
  \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x^2) = (x^2+1)\mathrm{P}(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax^4 + bx^2 + c = (x^2+1)(ax^2+bx+c) \\
  &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax^4 + bx^2 + c = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^2 + bx + c \\
  &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax^4 + bx^2 + c = ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + bx + c \\
  &\iff \begin{cases} a = a \\ 0 = b \\ b = a+c \\ 0 = b \\ c = c \end{cases} \\
  &\iff \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = -a \end{cases} \\
  &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = ax^2 - a
  \end{aligned}$$
  Conclusion : les fonctions polynomiales de degré 2 qui vérifient "$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x^2) = (x^2+1)\mathrm{P}(x)$" sont les fonctions $\mathrm{P} : x \longmapsto a(x^2-1)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$.

Puisque la fonction polynomiale nulle est également de la forme $x \longmapsto a(x^2-1)$, avec $a = 0$, on peut conclure en regroupant les deux cas...

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation "$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x^2) = (x^2+1)\mathrm{P}(x)$" est $\left\{\mathrm{P} : x \longmapsto a(x^2-1), \text{ avec } a \in \mathbb{R}\right\}$.

3. $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} = \mathrm{P}$.

- Remarquons déjà que la fonction polynomiale nulle est solution de cette équation.
- Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ non nulle, telle que : $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} = \mathrm{P}$.
  On obtient :
  $$\deg(\mathrm{P})^2 = \deg(\mathrm{P})$$
  D'où :
  $$\deg(\mathrm{P}) = 0 \text{ ou } \deg(\mathrm{P}) = 1$$

Petite remarque
a n'est pas nécessairement non nul ici, car P est degré 0 ou 1...
Puisque le cas de la fonction polynomiale nulle a été traité, a et b ne peuvent pas être tous les deux nuls (même si, en fait, on pourrait inclure ce cas dans le calcul...)

- Résolvons maintenant l'équation $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} = \mathrm{P}$, d'inconnue P une fonction polynomiale de degré 0 ou 1.
  Soit P une fonction polynomiale de degré 0 ou 1. Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x) = ax + b$ et a, b ne sont pas simultanément nuls. On a alors :
  $$\begin{aligned}
  \mathrm{P} \circ \mathrm{P} = \mathrm{P} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(\mathrm{P}(x)) = \mathrm{P}(x) \\
  &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(ax+b) = ax + b \\
  &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ a(ax+b) + b = ax + b \\
  &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ a^2x + ab + b = ax + b \\
  &\iff \begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \\
  &\iff \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \\
  &\iff \begin{cases} a = 0 \text{ et } b = b \\ \text{ou} \\ a = 1 \text{ et } b = 0 \end{cases} \\
  &\iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = b \\ \text{ou} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = x \end{cases}
  \end{aligned}$$
  Conclusion : les fonctions polynomiales de degré 0 ou 1qui vérifient $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} = \mathrm{P}$" sont les fonctions polynomiales constantes non nulles, ou la fonction polynomiale $\mathrm{P} : x \longmapsto x$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} = \mathrm{P}$ est $\mathbb{R}_0[x] \cup \left\{\mathrm{P} : x \longmapsto x\right\}$.

●●○○ Exercice 7 - Division euclidienne

Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne de P par D.

1. $\mathrm{P} : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ et $\mathrm{D} : x \longmapsto x + 1$
   On trouve comme quotient : $\mathrm{Q} : x \longmapsto x^2 - x - 2$ et comme reste : $\mathrm{R} : x \longmapsto 3$.
   D'où :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - x - 2) + 3$$

Petite remarque
Du résultat, on déduit que pour tout $x \neq -$:
$$\frac{x^3 - 3x + 1}{x+1} = x^2 - x - 2 + \frac{3}{x+1}$$
ce qui fournit directement la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{D}}$...

2. $P : x \longmapsto 3x^4 - x^3 + 4x^2 - 9$ et $D : x \longmapsto x^2 - 1$
On trouve comme quotient : $Q : x \longmapsto 3x^3 - x + 7$ et comme reste : $R : x \longmapsto -x - 2$.
D'où :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3x^4 - x^3 + 4x^2 - 9 = (x^2-1)(3x^2 - x + 7) - x - 2$$

3. $P : x \longmapsto x^5$ et $D : x \longmapsto x^2 + x - 2$
On trouve comme quotient : $Q : x \longmapsto x^3 - x^2 + 3x - 5$ et comme reste : $R : x \longmapsto 11x - 10$.
D'où :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^5 = (x^2 + x - 2)(x^3 - x^2 + 3x - 5) + 11x - 10$$

●●○○ Exercice 8 - Division euclidienne

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n à déterminer et une fonction polynomiale Q_n tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$x^n = (x^2 + x - 2)Q_n(x) + a_n x + b_n$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par théorème de division euclidienne, il existe deux uniques fonctions polynomiales Q_n et R_n telles que :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = (x^2 + x - 2)Q_n(x) + R_n(x) \\ \deg(R_n) < \deg(x \longmapsto x^2 + x - 2) \end{cases}$$
R_n est ainsi de degré inférieur ou égal à 1... Il existe donc deux uniques réels a_n et b_n tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = a_n x + b_n$.
L'existence (et l'unicité même) a été établie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. reste à déterminer a_n et b_n... Pour cela, il nous faut deux équations qui ne contiennent pas Q_n (puisqu'on ne le connait pas !). L'idée est alors d'utiliser les racines de diviseur $x \longmapsto x^2 + x - 2$ qui sont 1 et -2.
En évaluant la relation précédente en 1, on obtient :
$$1 = a_n + b_n$$
puis en l'évaluant en -2, on obtient :
$$(-2)^n = -2a_n + b_n$$
Or :
$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ -2a_n + b_n = (-2)^n \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 3b_n = (-2)^n + 2 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} 3a_n = 1 - (-2)^n \\ 3b_n = (-2)^n + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \dfrac{1 - (-2)^n}{3} \\ b_n = \dfrac{(-2)^n + 2}{3} \end{cases}$$

➠ Réflexe ! Puisque le quotient et le reste dépendent du dividende, ici la fonction $x \longmapsto x^n$, qui dépend elle-même de n, on indique la dépendance en n en écrivant Q_n et R_n plutôt que Q et R...

●●○○ Exercice 9 - Décomposition en éléments simples

Dans chaque cas, démontrer l'existence et déterminer les réels a, b, c vérifiant la condition donnée :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \dfrac{x^2+1}{x-1} = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}
\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \frac{x^2+1}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}\right) &\iff \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}\right) \\
&\iff \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x^2 + 1 = (ax+b)(x-1) + c\right) \\
&\iff \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x^2 + 1 = ax^2 + (b-a)x - b + c\right) \quad \text{par identification} \\
&\iff \begin{cases} a = 1 \\ -a + b = 0 \\ -b + c = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \dfrac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\},\ \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$
On procède de la même façon...

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\},\ \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{\frac{-1}{2}}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}$

3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\},\ \dfrac{1}{x^3-x} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x-1}$
On procède de la même façon...

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\},\ \dfrac{1}{x^3-x} = \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1} + \dfrac{-1}{x} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}$

Important ! Cet argument d'identification cache en fait l'argument que "deux fonctions polynomiales sont égales si, et seulement si, elles ont même degré et mêmes coefficients". Propriété que nous avons démontrée dans le cours.
Pour utiliser cette propriété, il faut bien, à l'étape d'avant, avoir l'égalité de deux fonctions polynomiales ; ce qui n'est le cas que si l'étape précédente contient "$\forall x \in ...$". Je ne peux que vous inviter à retravailler la démonstration du théorème 3 en question.