

EXERCICES DU CHAPITRE 5

POLYNÔMES

●●● EXERCICE 1 - RECHERCHE DE RACINES & FACTORISATION

Dans chaque cas, déterminer toutes les racines réelles de P ainsi que la forme factorisée de $P(x)$ en produits de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.

1. $P : x \mapsto x^3 - 8$
2. $P : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 2$
3. $P : x \mapsto 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
4. $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
5. $P : x \mapsto x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$
6. $P : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$

●●● EXERCICE 2 - RACINE DOUBLE

Soit P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2. Démontrer le résultat :

$$\left. \begin{array}{l} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{array} \right\} \iff \exists Q \in \mathbb{R}[x] / \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)^2 Q(x)$$

●●● EXERCICE 3 - POLYNÔME NUL ?

Soit P une fonction polynomiale telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$.
Démontrer que si P admet une racine, alors P est nulle.

●●● EXERCICE 4 - SUITE DE POLYNÔMES

On considère la suite (P_n) de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = xP_n(x) + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales P_1 , P_2 et P_3 .
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P_n .

●●● EXERCICE 5 - SUITE DE POLYNÔMES

On considère la suite (P_n) de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (2x-1)P_n(x) \end{cases}$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales P_1 , P_2 et P_3 .
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P_n .
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynomiale, puis préciser son degré et son coefficient dominant.

●●● EXERCICE 6 - ÉQUATIONS SUR DES FONCTIONS POLYNOMIALES

Dans chaque cas, déterminer les fonctions polynomiales P vérifiant la condition donnée.

1. $P'^2 = P$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$
3. $P \circ P = P$.

●●● EXERCICE 7 - DIVISION EUCLIDIENNE

Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne de P par D .

1. $P : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ et $D : x \mapsto x + 1$
2. $P : x \mapsto 3x^4 - x^3 + 4x^2 - 9$ et $D : x \mapsto x^2 - 1$
3. $P : x \mapsto x^5$ et $D : x \mapsto x^2 + x - 2$

●●● EXERCICE 8 - DIVISION EUCLIDIENNE

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n à déterminer et une fonction polynomiale Q_n tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^n = (x^2 + x - 2)Q_n(x) + a_n x + b_n$$

●●● EXERCICE 9 - DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Dans chaque cas, démontrer l'existence et déterminer les réels a, b, c vérifiant la condition donnée :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{x^2 + 1}{x - 1} = ax + b + \frac{c}{x - 1}$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1}$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}, \frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x - 1}$