N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+x+1}$

   Par opérations : $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{3}}$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} \dfrac{1}{(x-2)^2}$

   - Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} (x-2)^2 = 0^+$, par opérations (numérateur positif), on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty}$.
   - De même, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty}$.

   Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} \text{ existe et vaut } +\infty.}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} \dfrac{x}{x-3}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} \dfrac{x}{x-3}$

   - $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} x-3 = 0^+$, ainsi, par opérations sur les limites (numérateur positif) : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} \dfrac{x}{x-3} = +\infty}$.
   - $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} x-3 = 0^-$, ainsi, par opérations sur les limites (numérateur positif) : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} \dfrac{x}{x-3} = +\infty}$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+1}$

   Pour x suffisamment proche de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x^2-3x+1} &= \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

   Or, par opérations : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$.

   Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+1} = 1}$.

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x^2+x}{x^2-3x+1}$

   Pour x suffisamment proche de $-\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x^2+x}{x^2-3x+1} &= \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

   Or, par opérations : $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\infty$.

   Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x^2+x}{x^2-3x+1} = -\infty}$.

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^{-x}+1}$

   Par opérations : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^{-x}+1} = +\infty}$.

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x-3}{e^{-x}-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{x-3}{e^{-x}-1}$

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x-3=-3\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{-x}-1=0^-\end{array}\right\}$ par opérations sur les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x-3}{e^{-x}-1}=+\infty$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} x-3=-3\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} e^{-x}-1=0^+\end{array}\right\}$ par opérations sur les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{x-3}{e^{-x}-1}=-\infty$

Justification des signes : soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} e^{-x}-1>0 & \iff & e^{-x}>1 \\ & \iff & -x>0 \\ & \iff & x<0 \end{array}\quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+$$

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{-x}-1=0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} e^{-x}-1=0^+$.

> **Petite remarque**
> La courbe de la fonction $x\longmapsto e^{-x}-1$ permet aussi de justifier ces signes !

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)+x}{e^{-x}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)+x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0^+\end{array}\right\}$ ainsi, par opérations sur les limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)+x}{e^{-x}}=+\infty}$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x^3}$

Par composition et opérations : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x^3}=+\infty}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}+1}$

Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{\sqrt{x}+1} &= \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

Or, par opérations : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=+\infty$.

Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}+1}=+\infty}$.

11. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \left(\ln(3x^2+1)-\ln(x+2)\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \ln(3x^2+1)=\ln(13)\\ \lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \ln(x+2)=-\infty\end{array}\right\}$ ainsi, par opérations sur les limites : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \left(\ln(3x^2+1)-\ln(x+2)\right)=+\infty}$.

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{-1/x^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} e^{-1/x^2}$

- Par opération : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{-1}{x^2}=-\infty$.

  Et puisque $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$, on obtient, par composition : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{-1/x^2}=0}$.
- De même (ou par parité de $x\longmapsto e^{-1/x^2}$), on obtient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} e^{-1/x^2}=0}$.

Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} \text{ existe et vaut } 0.}$

●●○○ Exercice 2 - Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x}$

Soit x suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\frac{e^{x^2}}{x} = \frac{e^{x^2}}{(x^2)^{1/2}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, et, par croissance comparée : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X^{1/2}}=+\infty$.

D'où, par composition : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+7}$

Soit x suffisamment proche de $-\infty$:

$$\sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+7} \underset{\text{expr conjuguée}}{=} \ldots = \frac{x-6}{\sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{3x^2+7}}$$

Puis on factorise par x au numérateur et par x^2 à l'intérieur de chaque racine carrée...

ATTENTION : $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ (car $x<0$ ici).

On passe ensuite à la limite : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+7}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+5}$

Soit x suffisamment proche de $+\infty$.

On factorise par x^2 à l'intérieur de chaque racine carrée...

ATTENTION : $\sqrt{x^2}=|x|=x$ (car $x>0$ ici).

On passe ensuite à la limite ($\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$, par stricte croissance de la fonction racine carrée) : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+5}=+\infty}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

Pour x suffisamment proche de $+\infty$: $\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\frac{-\ln(x)}{x}$

Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=0}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x)-\ln(x+2)\right)$

Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\ln(x+2)-\ln(x) &= \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\end{aligned}$$

Par opération et composition : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=0$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-\ln(x+2)\right)=0}$.

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-e^x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-e^x}{x}$

- Pour x suffisamment proche de $-\infty$:

$$\frac{x^2-e^x}{x}=x-\frac{e^x}{x}$$

Et par opération : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\frac{e^x}{x}=-\infty$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-e^x}{x}=-\infty}$

- Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-e^x}{x} &= \frac{e^x\left(\frac{x^2}{e^x}-1\right)}{x}\\ &= \frac{e^x}{x}\left(\frac{x^2}{e^x}-1\right)\end{aligned}$$

Et par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$.

D'où, par opération : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\left(\frac{x^2}{e^x}-1\right)=-\infty$.

Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-e^x}{x}=-\infty}$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x-2}{x^2-5x+6}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x-2}{x^2-5x+6}$

Pour x suffisamment proche de 2 (mais différent de 2) :

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x^2-5x+6} &= \frac{x-2}{(x-2)(x-3)}\\ &= \frac{1}{x-3}\end{aligned}$$

Or,

$$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{1}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{1}{x-3}=-1$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x-2}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x-2}{x^2-5x+6}=-1}$

Réflexe !

Si on tombe sur une FI "$\frac{0}{0}$" dans une fonction rationnelle, en calculant la limite en a, cela signifie que a est racine du numérateur et du dénominateur. On factorise alors les deux par $(x-a)$ (c'est ça qui fait que chaque fonction polynomiale tend vers 0 en a).

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x^2+1)-\ln(x+2)\right)$

Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\ln(3x^2+1)-\ln(x+2) &= \ln\left(\frac{3x^2+1}{x+2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{x\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}\right)\end{aligned}$$

Or, par opérations et composition : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}\right)=+\infty$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x^2+1)-\ln(x+2)\right)=+\infty}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x^2+1)-\ln(e^x+2)\right)$

Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\ln(3x^2+1)-\ln(e^x+2) &= \ln\left(\frac{3x^2+1}{e^x+2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{x^2}{e^x}\,\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{e^x}}\right)\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$.

Ainsi, par opérations et composition : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2}{e^x}\,\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{e^x}}\right)=-\infty$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x^2+1)-\ln(e^x+2)\right)=-\infty}$

10. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}e^{1/x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}e^{1/x}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{1/x}=+\infty$.

  D'où, par opération : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}e^{1/x}=+\infty}$

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty\\ \text{par croissance comparée : }\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0\end{array}\right\}$ par composition : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}e^{1/x}=0}$

11. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2e^{1/x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}x^2e^{1/x}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}e^{1/x}=0$.

  D'où, par opération : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}x^2e^{1/x}=0}$

- Soit $x>0$. On a :

$$x^2e^{1/x}=\frac{e^{1/x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

Or : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty\\ \text{par croissance comparée : }\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty\end{array}\right\}$ par composition : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2e^{1/x}=+\infty}$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)-x$

Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\ln(e^x+1)-x &= \ln\left(e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)-x\\ &= \ln(e^x)+\ln(1+e^{-x})-x=\ln(1+e^{-x})\end{aligned}$$

Or, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)-x=0}$

Petite remarque

On peut aussi commencer par : $\ln(e^x+1)-x=\ln(e^x+1)-\ln(e^x)$...

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$

Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.

D'où, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x)}{x}}=1$.

Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1}$

14. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

Soit $x > 0$.
On sait que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$$

D'où :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lfloor a \rfloor - 1 \leq a - 1 < \lfloor a \rfloor$$

Et en combinant ces deux résultats, on obtient :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a$$

Ainsi, en l'appliquant avec $a = \frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

Puis, en multipliant par x ($x > 0$) :

$$1 - x < qx \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1 - x = 1 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1$.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1}$.

Au passage, la courbe de la fonction $x \longmapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, qui a le mérite d'être assez originale... ici !

●●○○ Exercice 3 - Vrai ou faux ?

1. **Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.**

FAUX
En effet, la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2} - e^{-x}$ est croissante, majorée par 1 (car majorée par $\frac{1}{2}$) ; et pourtant, $\lim\limits_{+\infty} f = \frac{1}{2} \neq 1$.

2. **Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.**

FAUX (penser aux FI)
En prenant $f : x \longmapsto (x-2)(x+1)$ et $g : x \longmapsto x - 2$, on a bien $\lim\limits_{2} f = \lim\limits_{2} g$ et pourtant, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$.

3. **$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = 0$ (où a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$, et f une fonction définie sur un voisinage de a, noté I)**

VRAI
Prouvons donc ce résultat, par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\lim\limits_{a} f = 0$, alors par composition avec la fonction valeur absolue, on a $\lim\limits_{a} |f| = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ *Dans le cas où a est un réel.*
Supposons que $\lim\limits_{a} |f| = 0$; c'est à dire : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in \mathrm{I},\ \big(x \in [a-\delta; a+\delta] \Longrightarrow ||f(x)| - 0| \leq \varepsilon\big)$. On a ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in \mathrm{I},\ \big(x \in [a-\delta; a+\delta] \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\big)$$

Et ceci est la définition même de $\lim\limits_{a} f = 0$.

4. **$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1 \iff \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = 1$ (où a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$, et f une fonction définie sur un voisinage de a, noté I)**

FAUX
La fonction $f : x \longmapsto -1$ vérifie $\lim\limits_{\infty} |f| = 1$, et pourtant, $\lim\limits_{\infty} f \neq 1$.

> **Petite remarque**
> On a même : "$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe $\iff \lim\limits_{x \to a} |f(x)|$ existe" est fausse (le sens direct est vrai, mais le sens réciproque est faux).
> Contre-exemple : $f : x \longmapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}$...

5. **Si f est bornée sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$.**

VRAI
Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq \mathrm{M}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ainsi, en multipliant par $|g(x)| \geq 0$:

$$|f(x)| \times |g(x)| \leq \mathrm{M}|g(x)|$$

D'où :

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq \mathrm{M}|g(x)|$$

Mais, comme $\lim\limits_{+\infty} g = 0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{M}|g(x)| = 0$.
Par théorème d'encadrement, on obtient ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)g(x)| = 0$$

Et d'après la question précédente :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$$

6. **Si f est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.**

FAUX
En effet, la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2 - \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; et pourtant $\lim\limits_{+\infty} f = 2$.

On peut aussi prendre, par exemple, $f : x \longmapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$...

7. **Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$, alors f est majorée par 5.**

VRAI
Démontrons ce résultat par l'absurde.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Supposons que f est croissante sur $\mathbb{R}$, que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ et que f n'est pas majorée par 5.
Puisque f n'est pas majorée par 5, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 5$.
Mais comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \geq x_0,\ f(x) \geq f(x_0)$$

D'où, en passant à la limite en $+\infty$ ($\lim\limits_{+\infty} f$ existe, par hypothèse), on a (propriété du cours) :

$$\lim_{+\infty} f \geq f(x_0)$$

Et comme $\lim\limits_{+\infty} f = 5$ et $f(x_0) > 5$, on obtient $5 > 5$: absurde !

8. **Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et non majorée, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.**

VRAI
C'est un des cas du théorème de limite monotone... Prouvons-le (ce cas-là peut être démontré avec les outils au programme).
Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et non majorée. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; autrement dit, montrons

$$\forall \mathrm{M} > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ \left(x \geq \mathrm{A} \Longrightarrow f(x) \geq \mathrm{M}\right)$$

Soit alors $\mathrm{M} > 0$. Puisque f n'est pas majorée, elle n'est, en particulier, pas majorée par ce M. Il existe donc un réel x_0 tel que $f(x_0) > \mathrm{M}$.
Mais comme f est croissante, on a :

$$\forall x \geq x_0,\ f(x) \geq f(x_0)$$

Au final, en posant $\mathrm{A} = x_0$, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x \geq \mathrm{A} \Longrightarrow f(x) \geq \mathrm{M}\right)$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

●●○○ Exercice 4 - Une limite classique

1. **Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x$.**

   - Posons $f : x \longmapsto 1 + xe^x - e^x$.
     La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

     $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = xe^x$$

     D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		↘	0	↗	

     Par conséquent, f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, égal à 0 et atteint en 0. Ainsi :

     $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$$

     Autrement dit :

     $$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 1 + xe^x$$

   - De la même façon, on démontre l'inégalité de gauche.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ 1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x$.

2. **Étudier alors la limite de $\dfrac{e^x - 1}{x}$ en 0.**

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
On sait que :

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x$$

D'où :

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

   - Si $x < 0$, alors :

     $$1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq e^x$$

   - Si $x < 0$, alors :

     $$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x$$

D'après ces deux encadrements et le théorème d'encadrement, on obtient ainsi :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

☞ Pour info...
On peut ainsi dire que si $x \simeq 0$, alors $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{0}{\simeq} 1$, c'est à dire $e^x \underset{0}{\simeq} 1 + x$.
On obtient ce que l'on appelle un développement limité d'ordre 1 de exp en 0... Ce n'est autre que l'expression de la tangente à la courbe de l'exponentielle au point d'abscisse 0...

●●○○ Exercice 5 - Une limite classique

1. Démontrer que : $\forall x > -1,\ \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
Méthode identique à ce qui a été fait dans la question 1 de l'exercice précédent...

2. En déduire un encadrement de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ puis la limite de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en 0.
Là encore, comme dans l'exercice précédent, il faut distinguer les cas $x<0$ et $x>0$...

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

3. En déduire les limites suivantes :

3.a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Pour x suffisamment proche de $+\infty$:ă

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; et, d'après la question précédente, $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$.

D'où, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$.

Et, à nouveau par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = e$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

➠**Réflexe !**
On a $\ln(1+\text{truc})$, avec truc qui tend vers 0... On fait donc apparaître $\dfrac{\ln(1+\text{truc})}{\text{truc}}$...

★ **Classique !** ★
Résultat presque à connaître...

3.b. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+x)^{\ln(x)}$

Soit $x>0$. On a :

$$\begin{aligned}(1+x)^{\ln(x)} &= \exp\left(\ln(x)\ln(1+x)\right)\\ &= \exp\left(x\ln(x)\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$.

Et d'après la question 2 : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

D'où, par opération et composition : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \exp\left(x\ln(x)\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+x)^{\ln(x)} = 1$.

•••• Exercice 6 - Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{\frac{1}{x}}$

Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\left(\ln(1+e^{-x})\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right)}{x}\right)\\ &= \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}\times e^{-x}\right)}{x}\right)\\ &= \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}\right)-x}{x}\right)\\ &= \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}\right)}{x}-1\right)\end{aligned}$$

Or, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$; donc, par composition de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} = 1$$

Puis, par opération :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}\right)}{x} - 1 = -1$$

Par composition, on obtient finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}\right)}{x} - 1\right) = e^{-1}$$

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^{-x})\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$.

2. $\lim_{x\to 0}\left(\ln(e+x)\right)^{\frac{1}{x}}$

Pour x suffisamment proche de 0 :

$$\begin{aligned}
\left(\ln(e+x)\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{\ln\left(\ln(e+x)\right)}{x}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln\left(\ln(e)+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)}{x}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln\left(1+\ln(1+\frac{x}{e})\right)}{x}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln\left(1+\ln(1+\frac{x}{e})\right)}{\ln(1+\frac{x}{e})}\times\frac{\ln(1+\frac{x}{e})}{x}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln\left(1+\ln(1+\frac{x}{e})\right)}{\ln(1+\frac{x}{e})}\times\frac{\ln(1+\frac{x}{e})}{\frac{x}{e}}\times\frac{1}{e}\right)
\end{aligned}$$

L'objectif de ces manipulations était de faire apparaître la limite connue : $\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$...

Or, on a :

- $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e} = 0$, et $\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$; donc, par composition de limites :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x}{e})}{\frac{x}{e}} = 1$$
- $\lim_{x\to 0}\ln(1+\frac{x}{e}) = 0$, et $\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$; donc, par composition de limites :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\ln(1+\frac{x}{e})\right)}{\ln(1+\frac{x}{e})} = 1$$

Par opération et composition, on en déduit :

$$\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln\left(1+\ln(1+\frac{x}{e})\right)}{\ln(1+\frac{x}{e})}\times\frac{\ln(1+\frac{x}{e})}{\frac{x}{e}}\times\frac{1}{e}\right) = \exp\left(\frac{1}{e}\right) = e^{e^{-1}}$$

Conclusion : $\lim_{x\to 0}\left(\ln(e+x)\right)^{\frac{1}{x}} = e^{e^{-1}}$.

DÉFINITION 1 - ASYMPTOTE OBLIQUE

Soit f une fonction telle que $\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$.

On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ lorsque

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b) = 0$$

●●○○ EXERCICE 7 - ASYMPTOTE OBLIQUE

Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+e^x}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.

Pas de difficulté particulière... On trouve :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote "verticale" d'équation $x = -1$ au voisinage de -1.

3. **3.a.** Déterminer $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. *On notera a le réel obtenu.*

Pas de difficulté particulière... On trouve $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$.

Conclusion : $a = 1$.

3.b. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)-ax$. *On notera b le réel obtenu.*

Pour x suffisamment proche de $-\infty$:

$$\begin{aligned}
f(x)-ax &= \frac{x^2+e^x}{x+1}-x\\
&= \frac{e^x-x}{x+1}
\end{aligned}$$

Et on obtient :

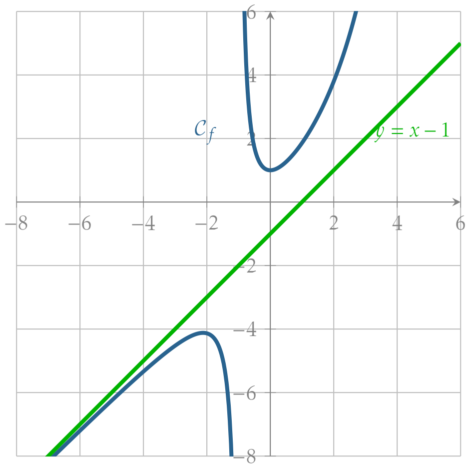
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - x}{x+1} = -1$$

Conclusion : $\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = -1$. On pose $b = -1$.

3.c. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $-\infty$.

D'après la question précédente, on a ainsi : $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x-1) = 0$.

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ au voisinage de $-\infty$.



●●○○ Exercice 8 - Asymptote oblique

Considérons $f : x \longmapsto \ln(e^x - 1)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff e^x - 1 > 0 \\ &\iff e^x > 1 \\ &\iff x > 0 \qquad \text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_*^+$.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.

Sans difficulté :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3. **3.a.** Démontrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \ln(1 - e^{-x})$.

Immédiat.

3.b. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.

D'après le résultat précédent :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

●●●○ Exercice 9 - Calculs de limites

Considérons $f : x \longmapsto (x-1)e^{\frac{1}{\ln(x)}}$. Déterminer l'ensemble de définition de f puis ses limites aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de sa courbe.

Je ne détaillerai pas les cas les plus simples...

- L'ensemble de définition de f est $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
- Par opération et composition : $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1}$.
- Par opération et composition : $\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0}$.
- Par opération et composition : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
- Soit $x > 1$. On a :

$$(x-1)e^{\frac{1}{\ln(x)}} = (x-1)e^{\frac{1}{x-1} \times \frac{x-1}{\ln(1+x-1)}}$$

Or : $\lim_{x\to 1} x - 1 = 0$.

Et $\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$, d'où $\lim_{X\to 0} \frac{X}{\ln(1+X)} = 1$.

Ainsi, par composition de limites :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(1+x-1)} = 1$$

Par opérations et composition, et puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0^+$, on obtient :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)e^{\frac{1}{x-1} \times \frac{x-1}{\ln(1+x-1)}} = +\infty$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty}$.

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote "verticale" d'équation $x=1$ au voisinage de 1, **à droite**.

●●○○ Exercice 10 - Étude de fonctions

Faire l'étude complète de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
2. $f : x \longmapsto \ln(x^2+1) - x$
3. $f : x \longmapsto x^2 e^{-x}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
5. $f : x \longmapsto x^2 e^{-x^2}$
6. $f : x \longmapsto \ln(e^x + e^{-x})$
7. $f : x \longmapsto \exp\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$
8. $f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$
9. $f : x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

Peu de détails... Mais l'essentiel y est !

Fonction	Ens de déf	Parité	Limites	Expression de la dérivée	Tableau de variations
$f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$	$]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$	Impaire.	• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ par opérations et composition (après avoir levé la FI) • $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$ par opérations et composition • $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$ (par imparité) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (par imparité)	$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$	$\begin{array}{c\|ccc\|\|c\|\|ccc} x & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & & & & + & \\ \hline f & 0 & \nearrow & +\infty & & -\infty & \nearrow & 0 \end{array}$
$f : x \longmapsto \ln(x^2+1) - x$	$\mathbb{R}$	Ni paire ni impaire (regarder $f(1)$ et $f(-1)$...)	• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ par opérations • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{2\ln(x)+\ln(1+1/x^2)}{x} - 1\right) = -\infty$ par CC.	$f'(x) = \dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1}$.	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & - & \\ \hline f & +\infty & \searrow & -1+\ln(2) & \searrow & -\infty \end{array}$
$f : x \longmapsto x^2e^{-x}$	$\mathbb{R}$	Ni paire ni impaire (regarder $f(1)$ et $f(-1)$...)	• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ par opérations • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ par CC	$f'(x) = x(x-2)e^{-x}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline f & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & 4e^{-2} & \searrow & 0 \end{array}$
$f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	$]-\infty;-1[$ $\cup]-1;1[$ $\cup]1;+\infty[$	Paire	• $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ (FI à lever) • $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$ par opérations • $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$ par opérations • $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ par parité • $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$ par parité	$f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$	$\begin{array}{c\|ccc\|\|ccccc\|\|ccc} x & -\infty & & -1 & -1 & & 0 & & 1 & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & & & + & 0 & - & & & - & \\ \hline f & 1 & \nearrow & +\infty & -\infty & \nearrow & -1 & \searrow & -\infty & +\infty & \searrow & 1 \end{array}$
$f : x \longmapsto x^2e^{-x^2}$	$\mathbb{R}$	Paire	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0$ par CC et composition	$f'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & -1 & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline f & 0 & \nearrow & e^{-1} & \searrow & 0 & \nearrow & e^{-1} & \searrow & 0 \end{array}$

Fonction	Ens de déf	Parité	Limites	Expression de la dérivée	Tableau de variations
$f : x \longmapsto \ln(e^x + e^{-x})$	$\mathbb{R}$	Paire	• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ par composition • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par parité	$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f & +\infty & \searrow & \ln(2) & \nearrow & +\infty \end{array}$
$f : x \longmapsto \exp\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$	$]-\infty;0[$ $\cup]0;+\infty[$	Ni paire, ni impaire (regarder $f(1)$ et $f(-1)$...)	• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ par composition (après avoir levé la FI) • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = 0$ par opérations • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ par opérations • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par composition (après avoir levé la FI)	$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}\exp\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$	$\begin{array}{c\|ccccc\|\|ccccc} x & -\infty & & -1 & & 0 & & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & & & - & 0 & + & \\ \hline f & 0 & \nearrow & \exp(-2) & \searrow & 0 & +\infty & \searrow & \exp(2) & \nearrow & +\infty \end{array}$
$f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$ **RÉFLEXE !** $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$	$\mathbb{R}_*^+$	Ni paire, ni impaire (regarder l'ensemble de définition...)	• $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ par composition • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ par CC et composition	$f'(x) = \dfrac{(1-\ln(x))}{x^2} e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$	$\begin{array}{c\|\|ccccc} x & 0 & & e & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f & 0 & \nearrow & e^{e^{-1}} & \searrow & 1 \end{array}$
$f : x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ **RÉFLEXE !** $f(x) = e^{-x\ln(x)}$	$\mathbb{R}_*^+$	Ni paire, ni impaire (regarder l'ensemble de définition...)	• $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ par CC et composition • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par composition	$f'(x) = -(1+\ln(x))e^{-x\ln(x)}$	$\begin{array}{c\|\|ccccc} x & 0 & & e^{-1} & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f & 1 & \nearrow & e^{e^{-1}} & \searrow & 0 \end{array}$

REMARQUE

Regardons plus attentivement les fonctions 9 et 10... Notons $f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$ et $g : x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$.
On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Par conséquent, toutes les informations sur g peuvent être obtenues à partir de celles de f :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} f(X) = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X \to 0} f(X) = 0$
- sur $]0;e^{-1}[$, la fonction inverse est strictement décroissante et à valeurs dans $]e;+\infty[$, intervalle sur lequel f est strictement décroissante.
  Par conséquent, g est strictement croissante sur $]0;e^{-1}[$.
- sur $]e^{-1};+\infty[$, la fonction inverse est strictement décroissante et à valeurs dans $]0;e[$, intervalle sur lequel f est strictement croissante.
  Par conséquent, g est strictement décroissante sur $]e^{-1};+\infty[$.
- $g = f \circ u$, avec $u : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. g est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$g'(x) = u'(x) f'\big(u(x)\big) = \dots$$