Exercices du chapitre 6
Limites de fonctions

●○○○ Exercice 1 - Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+x+1}$
2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\x>2}} \frac{1}{(x-2)^2}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}} \frac{1}{(x-2)^2}$
3. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\x>3}} \frac{x}{x-3}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\x<3}} \frac{x}{x-3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-3x+1}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+x^2+x}{x^2-3x+1}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{e^{-x}+1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{e^{-x}-1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)+x}{e^{-x}}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} xe^{x^3}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}+1}$
11. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \left(\ln(3x^2+1)-\ln(x+2)\right)$
12. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{-1/x^2}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} e^{-1/x^2}$

●●○○ Exercice 2 - Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+7}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+5}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\ln(x)-\ln(x+2)\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-e^x}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-e^x}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\x>2}} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\ln(3x^2+1)-\ln(x+2)\right)$
9. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\ln(3x^2+1)-\ln(e^x+2)\right)$
10. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x}e^{1/x}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x}e^{1/x}$
11. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2e^{1/x}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} x^2e^{1/x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(e^x+1)-x$
13. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
14. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

●●○○ Exercice 3 - Vrai ou faux ?

1. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1, alors $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$.
2. Si $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x)$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ (où a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$, et f une fonction définie sur un voisinage de a, noté I)
4. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 1 \iff \lim_{x\to a} |f(x)| = 1$ (où a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$, et f une fonction définie sur un voisinage de a, noté I)
5. Si f est bornée sur $\mathbb{R}$ et si $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)g(x) = 0$.
6. Si f est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
7. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 5$, alors f est majorée par 5.
8. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et non majorée, alors $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

●●○○ Exercice 4 - Une limite classique

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leq e^x \leq 1+xe^x$.
2. Étudier alors la limite de $\dfrac{e^x-1}{x}$ en 0.

●●○○ Exercice 5 - Une limite classique

1. Démontrer que : $\forall x > -1,\ \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire un encadrement de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ puis la limite de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en 0.
3. En déduire les limites suivantes :
   3.a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
   3.b. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(1+x)^{\ln(x)}$

●●●● Exercice 6 - Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\Big(\ln(e+x)\Big)^{\frac{1}{x}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\ln(1+e^{-x})\Big)^{\frac{1}{x}}$

Définition 1 - Asymptote oblique

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$.
On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ lorsque

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$$

●●○○ Exercice 7 - Asymptote oblique

Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+e^x}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.
3. 3.a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$. *On notera a le réel obtenu.*
   3.b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)-ax$. *On notera b le réel obtenu.*
   3.c. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $-\infty$.

●●○○ Exercice 8 - Asymptote oblique

Considérons $f : x \longmapsto \ln(e^x-1)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.
3. 3.a. Démontrer que pour tout $x>0$, $f(x)-x=\ln(1-e^{-x})$.
   3.b. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.

●●●○ Exercice 9 - Calculs de limites

Considérons $f : x \longmapsto (x-1)e^{\frac{1}{\ln(x)}}$. Déterminer l'ensemble de définition de f puis ses limites aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de sa courbe.

●●○○ Exercice 10 - Étude de fonctions

Faire l'étude complète de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
2. $f : x \longmapsto \ln(x^2+1)-x$
3. $f : x \longmapsto x^2e^{-x}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
5. $f : x \longmapsto x^2e^{-x^2}$
6. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$
7. $f : x \longmapsto \ln(e^x+e^{-x})$
8. $f : x \longmapsto \exp\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$
9. $f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$
10. $f : x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$