7

Ensembles

Introduction...

Si l'on ne devait retenir qu'un seul nom, attaché à la théorie des ensembles, ce serait très certainement celui de Cantor. C'est en effet de la correspondance entre Georg Cantor (1845-1918, né en Russie, naturalisé allemand) et Richard Dedekind (1831-1916, allemand) que naît la notion d'ensemble telle que nous la manipulons actuellement.

Définition d'ensemble selon Cantor : "Nous appelons **ensemble** M toute réunion d'objets *m* de notre conception, déterminés et bien distincts, et que nous nommons **éléments** de M."
Par la suite, la définition d'ensemble a suscité de vifs débats. Pour la culture, voici en particulier le paradoxe de Russell : *Considérons l'ensemble* $A = \{X / X \in X\}$. *Dans ce cas, on a :* $A \in A \iff A \notin A$, *ce qui pose bien évidemment un problème (on parle alors d'incohérence ou inconsistance d'une telle théorie qui permet d'avoir à la fois une assertion et sa négation)*. En voici une reformulation : "Dans un village, un barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-ci. Le barbier se rase-t-il lui-même ?".

Ce paradoxe a donc amené à revoir la définition d'ensemble ; en particulier, un ensemble ne peut être une collection d'objets dont l'un de ces objets est l'ensemble lui-même. Autrement dit : un ensemble ne peut se contenir lui-même. Bref, ne rentrons pas dans davantage de considérations qui seraient vite très complexes... la notion d'ensemble reste une notion compliquée, et l'objectif de ce chapitre n'est en aucun cas de manipuler des notions ou outils trop abstraits. Nous nous contenterons des notions de bases accolées à celles d'ensemble, et quelques démonstrations pourront être vues pour parfaire la rédaction et les raisonnements déjà rencontrés.

Définitions 1 - Ensemble, élément, égalité, inclusion, cardinal

D1# Un **ensemble** est une collection d'objets distincts. Ces objets sont appelés **éléments de l'ensemble**. Si E est l'ensemble constitué des éléments $e_1, e_2, \ldots$, on notera $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \ldots\}$.

D2# Soit E un ensemble.

- On note $x \in \mathrm{E}$ pour indiquer que x est un élément de E ;
- on note $x \notin \mathrm{E}$ pour indiquer que x n'est pas un élément de E.

D3# L'ensemble ne comportant aucun élément est appelé **ensemble vide**, noté $\varnothing$.

D4# Soient A et B deux ensembles. On dit que **A et B sont égaux**, que l'on note $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, lorsqu'ils ont les mêmes éléments.

D5# Soient A et E deux ensembles. On dit que **A est inclus dans E**, que l'on note $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, lorsque tout élément de A est aussi un élément de E. Lorsque $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on dit que A est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E. On note $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ l'**ensemble des parties de E**.

D6# Si E est constitué d'un nombre fini d'éléments, ce nombre est appelé **cardinal de E**, noté $\mathrm{Card}(\mathrm{E})$.

Petite remarque — On manipulera essentiellement des ensembles dont les éléments sont des objets de même nature (tous sont des nombres, ou tous sont des fonctions, ou tous sont des issues d'une même expérience aléatoire...) ; même s'il est tout à fait possible d'avoir un ensemble composé d'éléments de natures différentes.

Vocabulaire — On dira qu'un ensemble est fini lorsqu'il possède un nombre fini d'éléments.

Exemples 1

E1 On connaît et on manipule déjà un certain nombre d'ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ qui sont des ensembles usuels de nombres... Mais aussi :

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$$
$$[\![1;n]\!] = \underbrace{\{i \in \mathbb{N} \ / \ 1 \leq i \leq n\}}_{\text{forme compréhensive}} = \underbrace{\{1, 2, \ldots, n\}}_{\text{forme extensive}}$$

E2 Soit $a \in \mathbb{R}$. $\{a\}$ est l'ensemble constitué uniquement du nombre a.

E3 $\{1;2\} = \{2;1\}$: *on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les éléments d'un ensemble sont écrits.*

E4 $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_*^+$, $[-17;43[$ sont des parties de $\mathbb{R}$.

E5 Pour tout ensemble E, on a : $\varnothing \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}$.

E6 Soit $\mathrm{E} = \{a;b\}$. On a : $\mathcal{P}(\mathrm{E}) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \mathrm{E}\big\}$.

E7 $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Card}\big([\![1;n]\!]\big) = n$.

Vocabulaire — Un ensemble constitué d'un seul élément est un **singleton**.

Petite remarque — L'inclusion est *large* (comme le $\leq$) ; on utilise également le symbole $\subseteq$ plus explicite. L'inclusion *stricte* est notée $\subsetneq$ et la non-inclusion $\not\subset$ ou $\not\subseteq$.

Retenons au passage l'équivalence (évidente) suivante souvent utile pour démontrer l'égalité de deux ensembles :

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \iff \big(\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \text{ ET } \mathrm{F} \subset \mathrm{E}\big)$$

Des propriétés naturelles que nous ne démontrerons pas :

Propriétés 1

Soient E et F deux ensembles.

P1# $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \Longrightarrow \mathrm{Card}(\mathrm{E}) \leq \mathrm{Card}(\mathrm{F})$; $\mathrm{E} = \mathrm{F} \Longrightarrow \mathrm{Card}(\mathrm{E}) = \mathrm{Card}(\mathrm{F})$

P2# $\mathrm{E} = \mathrm{F} \iff \begin{cases} \mathrm{E} \subset \mathrm{F} \\ \mathrm{Card}(\mathrm{E}) = \mathrm{Card}(\mathrm{F}) \end{cases}$

✘ Attention ! — Les réciproques de P1 sont fausses...

Opérations sur les ensembles

Définitions 2 - Intersection, union et complémentaire

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.

D1# L'**intersection** de A et B, notée $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, est l'ensemble défini par :

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \big\{x \in \mathrm{E} \ / \ (x \in \mathrm{A} \text{ ET } x \in \mathrm{B})\big\}$$

D2# L'**union** de A et B, notée $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, est l'ensemble défini par :

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \big\{x \in \mathrm{E} \ / \ (x \in \mathrm{A} \text{ OU } x \in \mathrm{B})\big\}$$

D3# Le **complémentaire de A** dans E, noté $\overline{\mathrm{A}}$, est l'ensemble défini par :

$$\overline{\mathrm{A}} = \big\{x \in \mathrm{E} \ / \ x \notin \mathrm{A}\big\}$$

D4# La **différence de B par A**, notée $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$, est l'ensemble défini par :

$$\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = \big\{x \in \mathrm{E} \ / \ (x \in \mathrm{B} \text{ ET } x \notin \mathrm{A})\big\} = \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}$$

Vocabulaire — On dit que A et B sont **disjoints** lorsque $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.

✘ Attention ! — Le ou en mathématiques est **inclusif** ; c'est à dire qu'il signifie *soit l'un, soit l'autre, soit les deux*.

Petite remarque — $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\overline{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$ sont également des parties de E.

Exemples 2

Considérons $E=\{1;2;a,b\}$, $A=\{1;2\}$, $B=\{a\}$, $C=\{1;a\}$.

- $A\cap B=\varnothing$; $A\cap C=\{1\}$; $B\cap C=\{a\}$
- $A\cup B=\{1;2;a\}$; $A\cup C=\{1;2;a\}$; $B\cup C=\{1;a\}$
- $\overline{A}=\{a;b\}$; $\overline{B}=\{1;2;b\}$; $\overline{C}=\{2;b\}$
- $A\setminus C=\{2\}$; $A\setminus B=A$; $B\setminus C=\varnothing$

Voici maintenant un certain nombre de propriétés assez naturelles :

Propriétés 2

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

P1# $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B$

P2# $A\subset A\cup B$ et $B\subset A\cup B$

P3# $A\cap B=B\cap A$; $A\cup B=B\cup A$ *(commutativité)*

P4# $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$; $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C)$ *(associativité)*

P5# $A\cap E=A$; $A\cup\varnothing=A$ *(existence de neutres)*

P6# $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup E=E$

P7# $A\cap A=A$; $A\cup A=A$

P8# $\overline{\left(\overline{A}\right)}=A$; $\overline{E}=\varnothing$; $\overline{\varnothing}=E$; $A\cup\overline{A}=E$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$; $E\setminus A=\overline{A}$

P9# $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ *(lois de Morgan)*

P10# $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ *(distributivité de $\cap$ sur $\cup$)*

P11# $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ *(distributivité de $\cup$ sur $\cap$)*

P12# Si A et B sont des ensembles finis, alors $A\cup B$ et $A\cap B$ également et :

$$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$$

P13# Si E est un ensemble fini, alors A et $\overline{A}$ également et :

$$\mathrm{Card}(\overline{A})=\mathrm{Card}(E)-\mathrm{Card}(A)$$

P14# Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ également et :

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big)=2^{\mathrm{Card}(E)}$$

Petite remarque

$A\cap B$ est même le plus grand ensemble vérifiant P1 ; tout comme $A\cup B$ est le plus petit vérifiant P2...

✎ Notation

Du fait de l'associativité, on note $A\cap B\cap C$ au lieu de $A\cap(B\cap C)$ (comme l'on note $1+2+3$ et non $1+(2+3)$).

À retenir...

En particulier, si A et B sont finis et disjoints :

$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)$

★ Démonstration : Certaines seront démontrées en exercice. ★

On peut aisément définir l'intersection et l'union d'un nombre fini, et même infini, d'ensembles... Soit I un sous-ensemble (fini ou infini) de $\mathbb{N}$. Considérons E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On a ainsi les définitions/notations suivantes :

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\left\{x\in E\ /\ \forall i\in I,\ x\in A_i\right\}\quad ;\quad \bigcup_{i\in I}A_i=\left\{x\in E\ /\ \exists i\in I,\ x\in A_i\right\}$$

Autrement dit :

$$x\in\bigcap_{i\in I}A_i\iff\left(\forall i\in I,\ x\in A_i\right)\quad ;\quad x\in\bigcup_{i\in I}A_i\iff\left(\exists i\in I\ /\ x\in A_i\right)$$

Petite remarque

Les propriétés précédentes se généralisent à ces unions/intersections finies ou infinies ; en particulier, les lois de Morgan.

Propriétés 3 - Intersection / union et inclusion

Soient E un ensemble, I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de sous-ensembles de E.

P1# $(\forall i\in I,\ A_i\subset B_i)\Longrightarrow\bigcap_{i\in I}A_i\subset\bigcap_{i\in I}B_i$

P2# $(\forall i\in I,\ A_i\subset B_i)\Longrightarrow\bigcup_{i\in I}A_i\subset\bigcup_{i\in I}B_i$

★ Démonstration :

★

Exemples 3

E1 $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{3}[-i;i]=$

E2 $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty}[-i;i]=$

E3 $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty}\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]=$

Définitions 3 - Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles.

D1# On appelle **produit cartésien**[1] **de E et F** l'ensemble, noté $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$, défini par :

$$\mathrm{E}\times\mathrm{F}=\{(x,y)\ /\ x\in\mathrm{E},\ y\in\mathrm{F}\}$$

Autrement dit, $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ est l'ensemble des couples (x,y) où x est un élément de E et y un élément de F.

D2# On note $\mathrm{E}^2=\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ et on généralise ainsi pour $n\geq 2$: $\mathrm{E}^n=\underbrace{\mathrm{E}\times\mathrm{E}\times\ldots\times\mathrm{E}}_{n\text{ fois}}$.

1 En hommage à René Descartes, qui a ouvert la voie de la géométrie analytique : ou comment faire de la géométrie avec des nombres...

☞ **Pour info...**

On pourrait également définir le produit cartésien d'un nombre fini, et même infini, d'ensembles, mais nous n'aurons pas l'occasion de nous en servir ; même si l'ensemble des suites de nombres réels peut être écrit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$...

✘ **Attention !**

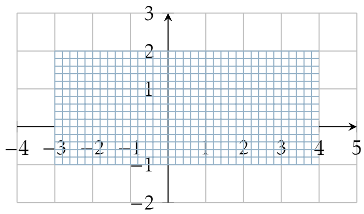
Puisque les couples (x,y) et (y,x) ne sont pas les mêmes (on tient compte de l'ordre dans un couple), les ensembles $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ et $\mathrm{F}\times\mathrm{E}$ ne sont, en général, pas les mêmes non-plus.

Exemples 4

E1 Posons $\mathrm{E}=\{0;1\}$ et $\mathrm{F}=\{a;b\}$. **Donnons $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ ainsi que $\mathrm{F}\times\mathrm{E}$.**

E2 Considérons $\mathrm{E}=\{0;1\}$. **Donnons E^3.**

E3 L'ensemble $[-3;4]\times[-1;2]$ peut être représenté ainsi :



Et pour terminer :

Propriétés 4

P1# Si E et F sont deux ensembles finis, alors $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ également et :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{E}\times\mathrm{F})=\mathrm{Card}(\mathrm{E})\times\mathrm{Card}(\mathrm{F})$$

P2# Si E est un ensemble fini, alors pour tout $n\geq 2$:

$$\mathrm{Card}(\mathrm{E}^n)=\mathrm{Card}(\mathrm{E})^n$$

★ **Démonstration :**

P1# Notons : $p=\mathrm{Card}(\mathrm{E})$ et $q=\mathrm{Card}(\mathrm{F})$, ainsi que : $\mathrm{E}=\{e_1,e_2,\ldots,e_p\}$ et $\mathrm{F}=\{f_1,f_2,\ldots,f_q\}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\times\mathrm{F} &= \Big\{(e_1,f_1),(e_1,f_2),\ldots,(e_1,f_q),(e_2,f_1),\ldots,(e_2,f_q),\ldots,(e_p,f_1),\ldots,(e_p,f_q)\Big\}\\ &= \Big\{(e_1,f_i),\ i\in[\![1,q]\!]\Big\}\cup\Big\{(e_2,f_i),\ i\in[\![1,q]\!]\Big\}\cup\ldots\cup\Big\{(e_p,f_i),\ i\in[\![1,q]\!]\Big\}\end{aligned}$$

Or : pour tout $k\in[\![1;p]\!]$, chacun des $\Big\{(e_k,f_i),\ i\in[\![1,q]\!]\Big\}$ est constitué de q couples différents (les f_i sont deux à deux distincts), donc est de cardinal q.
De plus, puisque les éléments $e_1,e_2,\ldots,e_p$ sont deux à deux distincts, l'union écrite ci-dessus est donc une union d'ensembles deux à deux disjoints.
Par conséquent, $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ est de cardinal fini et :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathrm{E}\times\mathrm{F}) &= \mathrm{Card}\Big(\Big\{(e_1,f_i),\ i\in[\![1,q]\!]\Big\}\Big)+\mathrm{Card}\Big(\Big\{(e_2,f_i),\ i\in[\![1,q]\!]\Big\}\Big)+\ldots+\mathrm{Card}\Big(\Big\{(e_p,f_i),\ i\in[\![1,q]\!]\Big\}\Big)\\ &= \underbrace{q+q+\ldots+q}_{p\text{ fois}}\\ &= pq\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathrm{E}\times\mathrm{F})=\mathrm{Card}(\mathrm{E})\times\mathrm{Card}(\mathrm{F})$.

P2# Par récurrence immédiate en utilisant P1.

★