Exercices du chapitre 7
Manipulations sur les ensembles...

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●●○○ Exercice 1 - Propriétés du cours...

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$

Par équivalence, montrons que pour tout $x \in E$: $x \in \overline{\left(\overline{A}\right)} \iff x \in A$.
Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{\left(\overline{A}\right)} &\iff x \notin \overline{A} \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Conclusion : $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$.

> **Important !**
> Même s'il est rare de raisonner ainsi pour démontrer l'égalité de deux ensembles, on peut parfois le faire. On a démontré qu'un élément x appartient à $\overline{\left(\overline{A}\right)}$ si, et seulement si, il appartient à A. Les ensembles $\overline{\left(\overline{A}\right)}$ et A contiennent donc les mêmes éléments, d'où l'égalité.
> En fait, raisonner par équivalences est possible pour démontrer l'égalité $A = B$ lorsque les arguments pour démontrer $A \subset B$ et $B \subset A$ sont identiques.

2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Par double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \overline{A \cap B}$. Montrons que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
Distinguons deux cas :

- **Si $x \notin A$.**
Cela signifie que $x \in \overline{A}$; et ainsi, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
- **Si $x \in A$.**
Dans ce cas, $x \notin \overline{A}$. Par conséquent, pour démontrer que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, il *faut* démontrer que $x \in \overline{B}$.
En raisonnant par l'absurde, si x appartenait à B, alors on aurait $x \in A \cap B$, ce qui contredirait l'hypothèse initiale. Donc $x \notin B$; autrement dit, $x \in \overline{B}$. Et ainsi, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dans les deux cas, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
Par conséquent : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Montrons que $x \in \overline{A \cap B}$.
Distinguons deux cas :

- **Si $x \in \overline{A}$.**
Cela signifie que $x \notin A$. Dans ce cas, puisque $A \cap B \subset A$, nécessairement on a $x \notin A \cap B$. C'est à dire $x \in \overline{A \cap B}$.
- **Si $x \in A$.**
Cela signifie que $x \notin \overline{A}$. Mais comme $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, alors nécessairement, $x \in \overline{B}$. C'est à dire $x \notin B$. Et puisque $A \cap B \subset B$, on a nécessairement $x \notin A \cap B$, autrement dit $x \in \overline{A \cap B}$.

Dans les deux cas, $x \in \overline{A \cap B}$.
Par conséquent : $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

Conclusion : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Posons $A' = \overline{A}$ et $B' = \overline{B}$. D'après la question **1.**, on a : $A = \overline{A'}$ et $B = \overline{B'}$. D'où :

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{\overline{A'} \cup \overline{B'}} && \text{d'après la question 2.} \\ &= \overline{\overline{A' \cap B'}} && \text{d'après la question 1.} \\ &= A' \cap B' \\ &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

Conclusion : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Par double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A \cap (B \cup C)$. Montrons que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Distinguons deux cas :

- **Si $x \in B$.**
Puisque $x \in A \cap (B \cup C)$, $x \in A$. Et comme dans ce cas $x \in B$, on a $x \in A \cap B$.
Par conséquent, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- **Si $x \notin B$.**
Puisque $x \in A \cap (B \cup C)$, on a $x \in B \cup C$. Mais comme $x \notin B$, alors nécessairement $x \in C$. Mais $x \in A$ (car $x \in A \cap (B \cup C)$). D'où $x \in A \cap C$.
Par conséquent : $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dans les deux cas, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Par conséquent : $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Montrons que $x \in A \cap (B \cup C)$.

- **Si $x \in A \cap B$.**
Alors $x \in A$ et $x \in B$. Mais $B \subset B \cup C$, donc $x \in B \cup C$. Ainsi, $x \in A \cap (B \cup C)$.

◇ **Si $x \notin A \cap B$.**
Alors, puisque $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$, on a nécessairement $x \in A\cap C$.
On obtient alors, comme précédemment, $x \in A\cap(B\cup C)$.

Dans les deux cas, $x \in A\cap(B\cup C)$.
Par conséquent : $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subset A\cap(B\cup C)$.

Conclusion : $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

5. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
Posons $A' = \overline{A}$, $B' = \overline{B}$ et $C' = \overline{C}$. D'après la question **1.**, on a : $A = \overline{A'}$, $B = \overline{B'}$ et $C = \overline{C'}$. D'où :

$$\begin{array}{rcll} A\cup(B\cap C) & = & \overline{A'}\cup(\overline{B'}\cap\overline{C'}) & \text{d'après la question 3.}\\ & = & \overline{A'}\cup\overline{(B'\cup C')} & \text{d'après la question 2.}\\ & = & \overline{A'\cap(B'\cup C')} & \text{d'après la question 4.}\\ & = & \overline{(A'\cap B')\cup(A'\cap C')} & \text{d'après la question 3.}\\ & = & (\overline{A'}\cup\overline{B'})\cap(\overline{A'}\cup\overline{C'}) & \\ & = & (A\cup B)\cap(A\cup C) & \end{array}$$

Conclusion : $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

●●○○ EXERCICE 2 - FORMULE DU CRIBLE...

Soient E un ensemble fini et A, B deux parties de E. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si A et B sont disjoints, alors $\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
En écrivant $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ et $B = \{b_1,\dots,b_p\}$, où $n = \text{Card}(A)$ et $p = \text{Card}(B)$, on a, puisque A et B n'ont aucun élément en commun :
$$A\cup B = \{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_p\}$$
D'où :
$$\text{Card}(A\cup B) = n + p = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

2. En déduire que $\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A\cap B)$.
Remarquons déjà que :
$$\begin{array}{rcll} A\cup(\overline{A}\cap B) & = & (A\cup\overline{A})\cap(A\cup B) & \\ & = & E\cap(A\cup B) & \text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup\\ & = & (E\cap A)\cup(E\cap B) & \\ & = & A\cup B & \end{array}$$
Mais A et $\overline{A}\cap B$ sont disjoints (car, par associativité : $A\cap(\overline{A}\cap B) = A\cap\overline{A}\cap B = \varnothing$). D'où, d'après la question précédente :
$$\boxed{\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A\cup(\overline{A}\cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A}\cap B)}$$
Il reste donc à établir que $\text{Card}(\overline{A}\cap B) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A\cap B)$... Pour cela, montrons que $\text{Card}(\overline{A}\cap B) + \text{Card}(A\cap B) = \text{Card}(B)$.
On a, ar distributivité de $\cap$ sur $\cup$:
$$\begin{array}{rcl} (\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B) & = & (\overline{A}\cup A)\cap B\\ & = & E\cap B\\ & = & B \end{array}$$
Et de plus, $\overline{A}\cap B$ et $A\cap B$ sont disjoints... Donc, en utilisant à nouveau la question précédente :
$$\text{Card}(B) = \text{Card}((\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B)) = \text{Card}(\overline{A}\cap B) + \text{Card}(A\cap B)$$
Autrement dit :
$$\boxed{\text{Card}(\overline{A}\cap B) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A\cap B)}$$
Ne reste plus qu'à combiner les résultats encadrés...

Conclusion : $\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A\cap B)$.

3. Proposer une formule analogue dans le cas d'une union de trois parties de E.
En utilisant le résultat précédent ainsi que la distributivité de $\cap$ sur $\cup$, on obtient :
$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A\cap C) - \mathbb{P}(B\cap C) + \mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

★ CLASSIQUE! ★
L'idée est de transformer l'union $A\cup B$, qui n'est pas disjointe, en un union qui lui soit **égale et disjointe**.
C'est quelque-chose que nous aurons l'occasion de refaire en probabilités...
En fait, on pourrait écrire directement :
$$A\cup B = A\cup(B\setminus A)$$

PETITE REMARQUE
On réutilise le raisonnement précédent, mentionné dans la remarque ci-dessus.

●●●○ EXERCICE 3 - CARDINAL DE $\mathcal{P}(E)$

Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout ensemble E à n éléments : $\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$.
Soit E un ensemble à un élément. On a ainsi : $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing; E\}$, et donc $\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2$: initialisation vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que "pour tout ensemble E de cardinal n, on a $\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$" et montrons que "pour tout ensemble E de cardinal $n+1$, on a $\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^{n+1}$".
Soit E un ensemble de cardinal $n+1$ et a un élément de E.
On a :
$$\mathcal{P}(E) = \{A\in\mathcal{P}(E)\ /\ a\in A\}\cup\{A\in\mathcal{P}(E)\ /\ a\notin A\}$$
Puisqu'aucune partie de E ne peut à la fois contenir a et ne pas le contenir, l'union précédente est une union de deux ensembles disjoints. Par conséquent :
$$\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = \text{Card}(\{A\in\mathcal{P}(E)\ /\ a\in A\}) + \text{Card}(\{A\in\mathcal{P}(E)\ /\ a\notin A\})$$
Il reste donc à compter le nombre de parties de E qui contiennent a et le nombre de parties de E qui ne contiennent pas a.

EN GROS...
On distingue les parties de E en celles qui contiennent a et celles qui ne le contiennent pas.

- ◇ Notons $F = E \setminus \{a\}$. F est ainsi de cardinal n, et par hypothèse de récurrence : $\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(F)\big) = 2^n$. Or $\mathcal{P}(F)$ représente les parties de E ne contenant pas a, il y a donc 2^n parties de E qui ne contiennent pas a.
- ◇ De plus, si A est une partie de F, alors $A \cup \{a\}$ est une partie de E contenant a... Et réciproquement, si B est une partie de E contenant a, alors $B \setminus \{a\}$ est une partie de E ne contenant pas a ; c'est à dire une partie de F.
  Par conséquent, il y a autant de parties de F que de parties de E contenant a. Ainsi, il y a également 2^n parties de E contenant a.

On en déduit :

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

L'hérédité est ainsi établie.

- **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout ensemble E de cardinal n, on a $\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$.

●●○○ Exercice 4 - Vrai ou faux ?

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

> ☞ **Rappel...**
> Du bon sens à nouveau pour savoir comment fournir un contre-exemple... La négation de $P \Longrightarrow Q$ est P ET NONQ ; et la négation de P OU Q est NONP ET NONQ.

1. Pour tous ensemble E et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$: $A \subset B \cup C \Longrightarrow \big(A \subset B \text{ ou } A \subset C\big)$.
   FAUX.
   Prenons $E = \mathbb{R}$, $A = \{1;2\}$, $B = \{1;3\}$ et $C = \{2;4\}$. On a bien $A \subset B \cup C$, et pourtant, A n'est inclus ni dans B, ni dans C.
2. Pour tous ensemble E et $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.
   VRAI.
   Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Raisonnons pas double-implication...
   $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in \overline{B}$, montrons que $x \in \overline{A}$.
   Puisque $x \in \overline{B}$, $x \notin B$. Mais alors, si x appartenait à A, puisque l'on sait que $A \subset B$, on aurait $x \in B$: absurde. Ainsi, $x \notin A$. Autrement dit, $x \in \overline{A}$.
   Par conséquent :
   $$A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$
   $\boxed{\Longleftarrow}$ Identique (ou en considérant $A' = \overline{B}$ et $B' = \overline{A}$...).
3. Il existe un ensemble E et $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cap B = A \cup B$.
   VRAI.
   Il suffit de prendre $A = B$, dans un ensemble E quelconque...

> ✘ **Attention !**
> Pour répondre complètement à la question, il faut exhiber un tel exemple.

4. Pour tous ensemble E et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$: $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$.
   FAUX (l'énoncé suivant aide à penser que celui-ci est faux !).
   Considérons par exemple : $E = \{1;2\}$, $A = \varnothing$, $B = \{1\}$ et $C = \{2\}$. On a bien $A \cap B = A \cap C$, et pourtant, $B \neq C$.
5. Pour tous ensemble E et $B, C \in \mathcal{P}(E)$: $\big(\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \cap B = A \cap C\big) \Longrightarrow B = C$.
   VRAI.
   Soient E un ensemble, et $B, C \in \mathcal{P}(E)$.
   Supposons que "$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \cap B = A \cap C$" et montrons que $B = C$.
   Puisque $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \cap B = A \cap C$, en particulier, pour $A = E$, on obtient : $E \cap B = E \cap C$, c'est à dire $B = C$.

●●○○ Exercice 5

Soient A, B, C trois ensembles.

1. On suppose que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.
   - **Montrons que $A \subset B$.**
     Soit $x \in A$. Ainsi, $x \in A \cup B$. Et puisque $A \cup B = B \cap C$, on obtient $x \in B \cap C$; et donc, en particulier, $x \in B$.
     Par conséquent :
     $$A \subset B$$
   - **Montrons que $B \subset C$.**
     Soit $x \in B$. Ainsi, $x \in A \cup B$. Et puisque $A \cup B = B \cap C$, on obtient $x \in B \cap C$; et donc, en particulier, $x \in C$.
     Par conséquent :
     $$B \subset C$$

   Conclusion : $A \cup B = B \cap C \Longrightarrow A \subset B \subset C$.
2. En déduire que si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.
   Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $C = A$. On obtient : $A \subset B \subset A$; autrement dit, $A \subset B$ ET $B \subset A$. C'est à dire $A = B$.
   Conclusion : $A \cap B = A \cup B \Longrightarrow A = B$ (la réciproque est évidente).
3. Démontrer qu'on a même : $A \cup B \subset A \cap B \Longrightarrow A = B$.
   On sait que $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$.
   Ainsi, si $A \cup B \subset A \cap B$, alors on a $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset A$, et donc les inclusions sont toutes des égalités et on obtient $A \cup B = A \cap B$. La question précédente permet ainsi d'obtenir $A = B$.
   Conclusion : $A \cup B \subset A \cap B \Longrightarrow A = B$ (là encore, la réciproque est évidente).

●○○○ Exercice 6 - Une différence...

Soient A et B deux parties d'un ensemble E non vide. On rappelle que $A \setminus B$ est l'ensemble défini par : $A \setminus B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ET } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$.

1. Simplifier : $A \setminus A$, $A \setminus \varnothing$, $A \setminus E$, $A \setminus (A \setminus B)$.

$$\begin{aligned} A \setminus A &= A \cap \overline{A} \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \setminus \varnothing &= A \cap \overline{\varnothing} \\ &= A \cap E \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \setminus E &= A \cap \overline{E} \\ &= A \cap \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{A \setminus B} \\ &= A \cap \overline{A \cap \overline{B}} && \text{loi de Morgan} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) && \text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

> **Petite remarque**
> La notation $A \setminus B$, c'est un peu comme la notation a^x : pratique à écrire, mais pas utilisable pour les calculs… On utilisera donc $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

2. L'opération différence est-elle associative ?
Non…
Par exemple, on a :

$$E \setminus (E \setminus E) = E \setminus \varnothing = E$$

alors que

$$(E \setminus E) \setminus E) = \varnothing \setminus E = \varnothing$$

Et comme $E \neq \varnothing$, on a bien :

$$E \setminus (E \setminus E) \neq (E \setminus E) \setminus E$$

> **☞ Rappel…**
> L'opération $\setminus$ est associative lorsque : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

3. Que dire de l'égalité $A \setminus B = B \setminus A$?
De façon générale, elle est fausse. Exemple : $E \setminus \varnothing = E \neq \varnothing = \varnothing \setminus E$.
L'opération $\setminus$ nest donc pas commutative.

4. Établir les propriétés suivantes, où A, B, C sont des parties d'un ensemble E :

4.a. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
Soient A, B, C des parties de E. On a :

$$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= A \setminus (B \cap \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{B \cap \overline{C}} && \text{loi de Morgan et } \overline{(\overline{C})} = C \\ &= A \cap (\overline{B} \cup C) && \text{distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

4.b. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
Soient A, B, C des parties de E. On a :

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus C) &= (A \setminus B) \cap \overline{C}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} && \text{associativité de } \cap \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) && \text{loi de Morgan} \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)} \\ &= A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

5. Démontrer : $A \setminus B = \varnothing \iff A \subset B$.
Par double implication…

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $A \subset B$. Dans ce cas, d'après la question 1 de l'exercice 4, on a $\overline{B} \subset \overline{A}$. Et ainsi, $A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{A} = \varnothing$, d'où $A \setminus B = \varnothing$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $A \setminus B = \varnothing$. Autrement dit, $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Ainsi, $\overline{B}$ est composé d'éléments qui ne sont pas dans A ; autrement dit, $\overline{B} \subset \overline{A}$. Et d'après la question 1 de l'exercice 4, on obtient $A \subset B$.

Conclusion : $A \setminus B = \varnothing \iff A \subset B$.

> **Petite remarque**
> On pourrait aussi raisonner par labsurde et supposer que $A \cap \overline{B}$ est non vide, en considérant un élément $x \in A \cap \overline{B}$…

●●○○ Exercice 7 - Une autre différence !

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle **différence symétrique de A et B**, notée $A \Delta B$ l'ensemble défini par : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Simplifier : $A \Delta A$, $A \Delta \varnothing$, $A \Delta E$.
En utilisant ce qui a été fait dans la question 1 de l'exercice précédent, on trouve sans difficulté :

$$A \Delta A = \varnothing$$

$$A \Delta \varnothing = A$$

$$A \Delta E = \overline{A}$$

2. Justifier l'appellation *symétrique* pour cette différence.
Cette appellation nous incite à penser que pour toutes parties A, B de E, on a $A \Delta B = B \Delta A$.
C'est en effet le cas, et immédiat d'après la définition de la différence symétrique et la commutativité de $\cup$.

3. Montrer que : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
On a :

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A\setminus B)\cup(B\setminus A) && \text{par définition de } A\setminus B\\
&= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) && \text{par distributivité de } \cup \text{ sur } \cap\\
&= \big((A\cap\overline{B})\cup B\big)\cap\big((A\cap\overline{B})\cup\overline{A}\big) && \text{par distributivité de } \cup \text{ sur } \cap\\
&= \big((A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)\big)\cap\big((A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})\big) && \text{car } A\cup\overline{A}=B\cup\overline{B}=E\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{B}\cup\overline{A}) && \text{loi de Morgan}\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\\
&= (A\cup B)\setminus(A\cap B)
\end{aligned}$$

Conclusion : $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

4. Établir l'existence d'un unique ensemble B, que l'on déterminera, tel que $A\Delta B = \varnothing$.
Remarquons déjà que A convient, puisque $A\Delta A = \varnothing$. Montrons donc que c'est le seul... Pour cela, considérons un ensemble B tel que $A\Delta B = \varnothing$ et montrons que $B = A$ (cela reviendrait à faire l'analyse si on avait choisi de raisonné par analyse-synthèse [si l'on avait pas remarqué que A convenait]).
On sait donc que $A\Delta B = \varnothing$. De plus, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
A\Delta B=\varnothing &\Longrightarrow (A\cup B)\setminus(A\cap B)=\varnothing && \text{exercice 6, question 5.}\\
&\Longrightarrow A\cup B\subset A\cap B && \text{exercice 5, question 3.}\\
&\Longrightarrow A=B
\end{aligned}$$

Conclusion : il existe un unique ensemble B tel que $A\Delta B=\varnothing$: il s'agit de A.

Petite remarque
Voici un raisonnement par implication bien rédigé. On mentionne que P est vrai, on établi ensuite $P \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow Q$, puis on conclut que Q est vrai.

●●○○ Exercice 8 - Fonction caractéristique

Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle **fonction caractéristique de A** la fonction f_A définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

1. Représenter les fonctions caractéristiques des ensembles suivants : $\{0;1\}$, $[0;1]$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$.
Aucune difficulté.

2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E dont les fonctions caractéristiques sont notées f_A et f_B. Montrer que les trois fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

2.a. $x \longmapsto 1 - f_A(x)$
Notons $g : x \longmapsto 1 - f_A(x)$.

- Remarquons déjà que, puisque $f_A(E) = \{0;1\}$, on a aussi $g(E) = \{0;1\}$.
- Soit $x\in E$. On a :

$$\begin{aligned}
g(x)=1 &\Longleftrightarrow 1-f_A(x)=1\\
&\Longleftrightarrow f_A(x)=0\\
&\Longleftrightarrow x\in\overline{A}
\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $x\longmapsto 1-f_A(x)$ est la fonction caractéristique de $\overline{A}$.

Définition
$g(E) = \{g(x) \,/\, x\in E\}$...

★Subtile...★
Le fait de déterminer $g(E)$ nous dispense de résoudre $g(x) = 0$ et de se rendre compte que $\{x\in E \,/\, g(x) = 0\} = \overline{\{x\in E \,/\, g(x)=1\}}$...
Le raisonnement est ainsi :
- g ne peut prendre que deux valeurs, 0 et 1 ;
- de plus, $g(x) = 1 \Longleftrightarrow x\in\overline{A}$;

par conséquent, on a aussi $g(x)=0 \Longleftrightarrow x\notin\overline{A}$...
D'ailleurs, $g(E) = \{0;1\}$ suffit pour affirmer que g est une fonction caractéristique...

2.b. $x\longmapsto f_A(x)\times f_B(x)$
Notons $h : x\longmapsto f_A(x)\times f_B(x)$.

- Remarquons déjà que, puisque $f_A(E)=\{0;1\}$ et $f_B(E)=\{0;1\}$, on a aussi $h(E)=\{0;1\}$.
- Soit $x\in E$. On a :

$$\begin{aligned}
h(x)=0 &\Longleftrightarrow f_A(x)f_B(x)=0\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f_A(x)=0\\ \text{ou}\\ f_B(x)=0\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in\overline{A}\\ \text{ou}\\ x\in\overline{B}\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow x\in\overline{A}\cup\overline{B} && \text{loi de Morgan}\\
&\Longleftrightarrow x\in\overline{A\cap B}
\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $x\longmapsto f_A(x)\times f_B(x)$ est la fonction caractéristique de $A\cap B$.

2.c. $x\longmapsto f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)f_B(x)$
On peut sans difficulté penser que cette fonction, que l'on note i, est la fonction caractéristique de $A\cup B$. Prouvons-le...
Soit $x\in E$.

- Si $x\in A\cup B$. Distinguons deux cas :
  - **Si $x\in A$.** Dans ce cas, on a sans difficulté $i(x)=1$.
  - **Si $x\in\overline{A}$.** Dans ce cas, x appartient nécessairement à B (si ce n'était pas le cas, on aurait x ni dans A ni dans B, donc pas dans l'union...). Et on a , là encore, $i(x)=1$.

  Dans les deux cas, $i(x)=1$.
  Par conséquent : $x\in A\cup B \Longrightarrow i(x)=1$.
- Si $x\notin A\cup B$. Autrement dit, si $x\in\overline{A\cup B}$, d'après les lois de Morgan, on a $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Puisque $x\in\overline{A}$, on obtient $i(x)=f_B(x)$. Mais puisque $x\in\overline{B}$, on obtient $i(x)=0$.
  Par conséquent, $x\notin A\cup B\Longrightarrow i(x)=0$.

On a ainsi montré que, pour tout $x \in E$:

$$i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cup B \\ 0 & \text{si } x \notin A \cup B \end{cases}$$

Conclusion : la fonction $x \longmapsto f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$ est la fonction caractéristique de $A \cup B$.

PETITE REMARQUE

Ici, nous n'avons pas déterminé $i(E)$, qui est un peu plus délicat à déterminer... Il faut donc traiter les deux cas : si $x \in A \cup B$ et si $x \notin A \cup B$.

●●●○ EXERCICE 9 - PRODUIT CARTÉSIEN ?

Démontrer que l'ensemble $D = \{(x, y) \in R \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons alors qu'il existe A et B, deux parties de $\mathbb{R}$, telles que $D = A \times B$.

Mais dans ce cas, puisque $(1, 0) \in D$, on a $1 \in A$. Et puisque $(0, 1) \in D$, on a également $1 \in B$. Ainsi $(1, 1) \in A \times B$; autrement dit : $(1, 1) \in D$. Ceci est absurde, car $1^2 + 1^2 = 2 > 1$.

Conclusion : l'ensemble D ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.