Exercices du chapitre 7
Manipulations sur les ensembles...

●●○○ Exercice 1 - Propriétés du cours...
Soient E un ensemble et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois parties de E. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\overline{\left(\overline{\mathrm{A}}\right)} = \mathrm{A}$
2. $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$
3. $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$
4. $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$
5. $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$

●●○○ Exercice 2 - Formule du crible...
Soient E un ensemble fini et A, B deux parties de E. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si A et B sont disjoints, alors $\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}) + \mathrm{Card}(\mathrm{B})$.
2. En déduire que $\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}) + \mathrm{Card}(\mathrm{B}) - \mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.
3. Proposer une formule analogue dans le cas d'une union de trois parties de E.

●●●○ Exercice 3 - Cardinal de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout ensemble E à n éléments : $\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(\mathrm{E})\big) = 2^n$.

●●○○ Exercice 4 - Vrai ou faux ?
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tous ensemble E et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$: $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \cup \mathrm{C} \Longrightarrow \big(\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \text{ ou } \mathrm{A} \subset \mathrm{C}\big)$.
2. Pour tous ensemble E et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$: $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \iff \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}$.
3. Il existe un ensemble E et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ tels que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
4. Pour tous ensemble E et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$: $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \Longrightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}$.
5. Pour tous ensemble E et $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$: $\big(\forall \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}),\ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}\big) \Longrightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

●●○○ Exercice 5
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois ensembles.

1. On suppose que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$. Montrer que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{C}$.
2. En déduire que si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.
3. Démontrer qu'on a même : $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$.

●○○○ Exercice 6 - Une différence...
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On rappelle que $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ est l'ensemble défini par : $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \,/\, x \in \mathrm{A} \text{ et } x \notin \mathrm{B}\} = \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$.

1. Simplifier : $\mathrm{A} \setminus \mathrm{A}$, $\mathrm{A} \setminus \varnothing$, $\mathrm{A} \setminus \mathrm{E}$, $\mathrm{A} \setminus (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B})$.
2. L'opération différence est-elle associative ?
3. Que dire de l'égalité $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$?
4. Établir les propriétés suivantes, où $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont des parties d'un ensemble E :
   - 4.a. $\mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$
   - 4.b. $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \setminus \mathrm{C} = \mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$
5. Démontrer : $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing \iff \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

●●○○ Exercice 7 - Une autre différence !
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle **différence symétrique de A et B**, notée $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}$ l'ensemble défini par : $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A})$.

1. Simplifier : $\mathrm{A} \Delta \mathrm{A}$, $\mathrm{A} \Delta \varnothing$, $\mathrm{A} \Delta \mathrm{E}$.
2. Justifier l'appellation *symétrique* pour cette différence.
3. Montrer que : $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.
4. Établir l'existence d'un unique ensemble B, que l'on déterminera, tel que $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = \varnothing$.

●●○○ Exercice 8 - Fonction caractéristique
Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle **fonction caractéristique de A** la fonction f_{A} définie par :

$$f_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

1. Représenter les fonctions caractéristiques des ensembles suivants : $\{0;1\}$, $[0;1]$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$.
2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E dont les fonctions caractéristiques sont notées f_A et f_B.
   Montrer que les trois fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :
   - **2.a.** $x \longmapsto 1 - f_A(x)$
   - **2.b.** $x \longmapsto f_A(x) \times f_B(x)$
   - **2.c.** $x \longmapsto f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x)$

●●●○ Exercice 9 - Produit cartésien ?

Démontrer que l'ensemble $D = \{(x,y) \in R \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.