Exercices du chapitre 8
Dénombrement et coefficients binomiaux

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Dénombrements avec coefficients binomiaux

Soit E l'ensemble à 10 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

1. Combien E possède-t-il de parties ?
   E possède 2^{10} parties (cardinal de $\mathcal{P}(E)$).
2. Combien E possède-t-il de parties à 5 éléments ?
   Par définition, E possède $\binom{10}{5}$ parties à 5 éléments.
   Or :
   $$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 4\times 9\times 7 = 252$$
   Conclusion : E possède 252 parties à 5 éléments.
3. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :
   3.a. a et b ;
   Constituer une partie de E à 5 éléments contenant a et b équivaut à constituer une partie de $\{c, d, e, f, g, h, i\}$ à 3 éléments .
   Il y a ainsi $\binom{8}{3}$ parties de E à 5 éléments qui contiennent a et b.
   Or :
   $$\binom{8}{3} = \ldots = 56$$
   Conclusion : il y a 56 parties de E à 5 éléments contenant a et b.

   Pourquoi ? Pourquoi 3 éléments ? Parce-que a et b sont déjà des éléments de la partie voulue.

   3.b. a mais pas b ;
   Constituer une partie de E à 5 éléments contenant a mais pas b équivaut à constituer une partie de $\{c, d, e, f, g, h, i\}$ à 4 éléments.
   Il y a ainsi $\binom{8}{4}$ parties de E à 5 éléments qui contiennent a mais pas b.
   Or :
   $$\binom{8}{4} = \ldots = 70$$
   Conclusion : il y a 70 parties de E à 5 éléments contenant a mais pas b.

   3.c. b mais pas a ;
   Par symétrie des rôles de a et b, on obtient le même résultat qu'à la question précédente.
   Conclusion : il y a 70 parties de E à 5 éléments contenant b mais pas a.

   3.d. ni a, ni b.
   Constituer une partie de E à 5 éléments ne contenant ni a ni b équivaut à constituer une partie de $\{c, d, e, f, g, h, i\}$ à 5 éléments.
   Il y a ainsi $\binom{8}{5}$ parties de E à 5 éléments qui ne contiennent ni a ni b.
   Or :
   $$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$$
   Conclusion : il y a 56 parties de E à 5 éléments ne contenant ni a ni b.

●○○○ Exercice 2 - Podium !

Une compétition oppose 10 concurrents, dont Marie-Gertrude.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
   Deux méthodes possibles :
   - Il y a 10 choix possibles pour le 1er, puis 9 choix possibles pour le 2nd, puis 8 choix possibles pour le 3ème.
     Par conséquent, il y a $10\times 9\times 8$ choix possibles pour constituer un podium.

✘ Attention ! Un podium est un triplet et non un ensemble à 3 éléments. En effet, l'ordre est important...

- Il y a déjà $\binom{10}{3}$ sous-ensembles possibles pour former un podium.
  Ensuite, chaque sous-ensemble à 3 éléments peut être ordonné de 6 façons différentes.
  Par conséquent, il y a $6 \times \binom{10}{3}$ podiums possibles. Or :

$$\begin{aligned} 6 \times \binom{10}{3} &= 6 \times \frac{10!}{3!7!} \\ &= \frac{10!}{7!} \\ &= 10 \times 9 \times 8 \end{aligned}$$

  Par conséquent, il y a $10 \times 9 \times 8$ choix possibles pour constituer un podium.

Conclusion : il y a 720 podiums possibles.

2. Combien y a-t-il de podiums possibles dans lesquels Marie-Gertrude est première ?
Constituer un podium dans lequel Marie-Gertrude est première équivaut à choisir un 2nd et un 3ème. Il y a ainsi 9 choix pour le 2nd et 8 pour le 3ème.

Conclusion : il y a 72 podiums possibles dans lesquels Marie-Gertrude est 1ère.

3. Combien y a-t-il de podiums possibles dont Marie-Gertrude fait partie ?
Deux méthodes possibles :
- Marie-Gertrude a 3 placements possibles. Ensuite, une fois Marie-Gertrude placée, il y a 9 choix possibles pour la plus haute des places restantes ; puis 8 choix possibles pour la plus basse.
  Par conséquent, il y a $3 \times 9 \times 8$ choix possibles.
- Marie-Gertrude étant déjà sur le podium, il reste donc $\binom{9}{2}$ possibilités pour compléter le sous-ensemble formant le podium.
  Ensuite, chaque sous-ensemble à 3 éléments peut être ordonné de 6 façons différentes.
  Par conséquent, il y a $6 \times \binom{9}{2}$ podiums possibles dont Marie-Gertrude fait partie. Or :

$$\begin{aligned} 6 \times \binom{9}{2} &= 6 \times \frac{9!}{2!7!} \\ &= 3 \times \frac{9!}{7!} \\ &= 3 \times 9 \times 8 \end{aligned}$$

  Par conséquent, il y a $3 \times 9 \times 8$ podiums possibles dont Marie-Gertrude fait partie.

Conclusion : il y a 216 podiums possibles dont Marie-Gertrude fait partie.

> ☞ **Pour info...**
> Un ensemble à n éléments peut être ordonné de $n!$ façons différentes. Autrement dit, un ensemble à n éléments permet de créer $n!$ n-uplets (ou liste).

●○○○ Exercice 3 - Code de carte bancaire

Le code d'une carte bancaire est composé de 4 chiffres allant de 0 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
De 0000 à 9999 : 10000 codes possibles.

2. Combien y a-t-il de codes possibles contenant au moins un 1 ?
Il est ici plus simple de compter les codes ne contenant aucun 1.
Pour constituer un code ne contenant aucun 1, il y a 9 chiffres possibles pour le 1er chiffre, puis 9 pour le 2nd, puis 9 pour le 3ème, puis 9 pour le 4ème ; soit 9^4 codes possibles.
Or :

$$\begin{aligned} 10^4 - 9^4 &= 10000 - 81^2 \\ &= 10000 - 6561 \\ &= 3439 \end{aligned}$$

Conclusion : il y a 3439 codes contenant au moins un 1.

> **Petite remarque**
> On peut aussi dire qu'il y a 10 chiffres possibles pour le 1er chiffre, puis 10 pour le 2nd, puis 10 pour le 3ème, puis 10 pour le 4ème ; soit 10^4 codes possibles.

3. Combien y a-t-il de codes possibles contenant exactement un 1 ?
Constituer un code contenant exactement un 1 équivaut à placer le 1 (4 choix possibles) ; puis, pour chaque placement possible du 1, il y a 9 choix possibles pour chacun des 3 autres chiffres, c'est à dire 9^3 choix possibles.
Or :

$$\begin{aligned} 4 \times 9^3 &= 4 \times 729 \\ &= 2916 \end{aligned}$$

Conclusion : il y a 2916 codes possibles contenant exactement un 1.

4. Combien y a-t-il de codes possibles composés de quatre chiffres distincts ?
Deux méthodes possibles :
- Pour constituer un code composé de 4 chiffres distincts, il y a 10 choix possibles pour le 1er chiffre, puis 9 pour le 2nd, puis 8 pour le 3ème, puis 7 pour le 4ème.
  Par conséquent, il y a $10 \times 9 \times 8 \times 7$ codes possibles composés de quatre chiffres distincts.
- Il y a déjà $\binom{10}{4}$ sous-ensembles possibles pour former un code.
  Ensuite, chaque sous-ensemble à 4 éléments peut être ordonné de 4! façons différentes.
  Par conséquent, il y a $4! \times \binom{10}{4}$ codes possibles composés de chiffres distincts. Or :

$$\begin{aligned} 4! \times \binom{10}{4} &= 4! \times \frac{10!}{4!6!} \\ &= \frac{10!}{6!} \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \end{aligned}$$

> ✘ **Attention !**
> Un code est un quadruplet et non un ensemble à 4 éléments. En effet, l'ordre est important...

Par conséquent, il y a $10 \times 9 \times 8 \times 7$ codes possibles composés de quatre chiffres distincts.

Conclusion : il y a 5040 codes possibles composés de quatre chiffres distincts.

5. Combien y a-t-il de codes possibles composés d'au moins trois chiffres distincts ?
En utilisant le résultat précédent, il nous suffit de déterminer le nombre de codes possibles composés d'exactement 3 chiffres distincts...
Constituer un code à 3 chiffres distincts, c'est :

- choisir 3 chiffres : $\binom{10}{3}$ sous-ensembles possibles ;
- puis répéter un de ces 3 chiffres une fois : 3 possibilités ;
- puis ordonner les 4 chiffres obtenus, sachant que 2 des 4 sont égaux.
Or, il y a 4! façons d'ordonner 4 chiffres. Mais si 2 de ces chiffres sont distincts, on a compté 2 fois les codes dans lesquels ces 2 chiffres égaux ont simplement été permutés ($2! = 2$ façons de permuter 2 chiffres). Il reste $\frac{4!}{2!}$ façons d'ordonner 4 chiffres dont 2 sont égaux.

Par conséquent, il y a $\binom{10}{3} \times 3 \times \frac{4!}{2!} = 10 * 9 * 8 * 6 = 4320$ codes possibles composés d'exactement 3 chiffres distincts.

Conclusion : il y a 9360 codes possibles composés d'au moins trois chiffres distincts.

Petite remarque
De façon générale, il y aurait $\frac{n!}{m!}$ façons d'ordonner n chiffres dont m sont égaux.

☞ Pour info...
J'avais raison en disant que dans $10 \times 10 \times 9 \times 8$, il en manquait ! ;)

Remarques

R 1. Il y a 10 codes possibles composés de seulement un chiffre.

R 2. Nombre de codes possibles avec 2 chiffres distincts :

- Choisir 2 chiffres : $\binom{10}{2}$ possibilités ;
- Deux cas de figure pour répéter :
  - Chacun des deux chiffres est répété une fois : un seul cas.
  - Un seul des chiffres est répété deux fois, l'autre non : 2 cas.
- Ordonner :
  - Dans le cas où les 2 chiffres sont présents chacun 2 fois, il y a $\frac{4!}{2!2!} = 6$ codes possibles.
  - Dans le cas où l'un des chiffres est présent 3 fois et l'autre une seule fois, il y a $\frac{4!}{3!} = 4$ ordres possibles.

Il y a donc : $\binom{10}{2}(1 \times 6 + 2 \times 4) = 45 \times 14 = 630$ codes possibles.

●●○○ Exercice 4 - Formule de Pascal & Python

Utiliser la formule de Pascal pour écrire une fonction Python prenant en arguments d'entrées deux entiers naturels n et k et renvoyant la valeur de $\binom{n}{k}$.

```python
def coeffbinom(k,n):
    if k>n:
        return 0
    elif k==0:
        return 1
    else :
        return coeffbinom(k-1,n-1)+coeffbinom(k,n-1)
```

●●○○ Exercice 5 - Calcul sur les coefficients binomiaux

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Démontrer la relation de Pascal en utilisant l'expression de $\binom{n}{k}$ avec les factorielles.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n-1]\!]$.
On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Petite remarque
Dans le cours, on a démontré l'expression de $\binom{n}{k}$ avec les factorielles grâce à la formule de Pascal. Ici, on démontre la formule de Pascal grâce à l'expression de $\binom{n}{k}$ avec les factorielles... Par conséquent, ces deux formules sont équivalentes.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

D'après la formule du binôme de Newton, on a immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

3. **3.a.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1;n]\!]$. Démontrer : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

On a :

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{\small $k \neq 0$} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

☞ **Rappel...**
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k! = k \times (k-1)!$

3.b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k\binom{0}{k} = 0\binom{0}{0} = 0.$
- Si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} && \text{question précédente} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} && \text{changement d'indice } i = k-1 \\ &= n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} && \text{formule du binôme} \\ &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

3.c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

Ce résultat peut se démontrer de la même façon que le résultat de la question précédente ; mais voyons ici une autre démonstration, analogue à ce qui avait été fait dans chapitre 2 - exercice 6.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^n$.
On a ainsi, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et on obtient, à partir des deux expressions ci-dessus, deux expressions de la dérivée :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$

Le résultat s'obtient en égalant ces deux expressions de f'.

✘ **Attention !**
$f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k$, d'où
$f'(x) = 0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0;n]\!]$:

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Voyons deux méthodes.

4.a. **Par récurrence...**

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:

  Montrons que pour tout $p \in [\![0;0]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{0}\binom{k}{p} = \binom{1}{p+1}$.

  Soit $p = 0$. On a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{k}{0} = 1$ et d'autre part $\binom{1}{1} = 1$. L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$\forall p \in [\![0;n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$" et montrons "$\forall p \in [\![0;n+1]\!],\ \displaystyle\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$".
  Soit $p \in [\![0;n+1]\!]$.

✘ **Attention !**
Attention à la formulation de l'hypothèse de récurrence ! Puisque p dépend de n, la quantification en p est incluse dans l'hypothèse de récurrence.

◇ Si $p = n+1$.
Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} &= \sum_{k=n+1}^{n+1}\binom{k}{n+1}\\ &= \binom{n+1}{n+1}\\ &= \binom{n+2}{n+2}\\ &= \binom{n+2}{p+1}\end{aligned}$$

◇ Si $p \in [\![0;n]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p} && \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= \binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p} && \text{d'après la relation de Pascal}\\ &= \binom{n+2}{p+1}\end{aligned}$$

On a ainsi démontré :

$$\forall p \in [\![0;n+1]\!],\ \sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

l'hérédité est donc établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

4.b. **De façon directe...**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0;n]\!]$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} &= \binom{p}{p}+\sum_{k=p+1}^{n}\binom{k}{p}\\ &= 1+\sum_{k=p+1}^{n}\binom{k}{p} && \text{d'après la formule de Pascal, puisque } k \geq p+1 \text{ (donc } p \leq k-1)\\ &= 1+\sum_{k=p+1}^{n}\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1} && \text{par linéarité de la somme}\\ &= 1+\sum_{k=p+1}^{n}\binom{k+1}{p+1}-\sum_{k=p+1}^{n}\binom{k}{p+1} && \text{par télescopage}\\ &= 1+\binom{n+1}{p+1}-\binom{p+1}{p+1}\\ &= \binom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

Petite remarque
Idée de P.L., merci !

★Subtile...★
La somme $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n}\binom{k}{p}$ vaut 0 dans le cas où $p = n$, puisque l'indexation porte alors sur un ensemble vide.

●●○○ Exercice 6 - Cardinal de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$

A l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout ensemble E à n éléments : $\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(\mathrm{E})\big) = 2^n$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments.
Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, notons $\mathrm{A}_k = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \,/\, \mathrm{Card}(\mathrm{A}) = k\}$ (A_k est l'ensemble des parties de E à k éléments).
De la sorte, on a ainsi :

$$\mathcal{P}(\mathrm{E}) = \bigcup_{k=0}^{n}\mathrm{A}_k$$

Et de plus, pour tout $i,j \in [\![0;n]\!]$, si $i \neq j$, alors $\mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$, puisqu'une partie à i éléments ne peut pas être une partie à j éléments (du fait que $i \neq j$).
Les ensembles $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont donc deux à deux disjoints. On a donc :

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(\mathrm{E})\big) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Card}(\mathrm{A}_k)$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Card}(\mathrm{A}_k) = \binom{n}{k}$ (définition des coefficients binomiaux). D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(\mathrm{E})\big) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} && \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\ &= 2^n\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout ensemble E à n éléments, $\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(\mathrm{E})\big) = 2^n$.

●●●○ Exercice 7 - Extension de la relation de Pascal

A l'aide d'un dénombrement, démontrer que pour tous entiers n,p,q tels que $q \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\binom{n-q}{p-k}$$

Soient n, p, q des entiers naturels tels que $q \leq p \leq n$.
D'après la formule du binôme de Newton, $\binom{n}{p}$ est le coefficient du monôme X^p dans la forme développée du polynôme $(1+X)^n$.
Déterminons ce coefficient d'une autre façon.
On a, puisque $q \neq n$:

$$(1+X)^n = (1+X)^q(1+X)^{n-q}$$

Or, le terme X^p dans le développement de $(1+X)^q(1+X)^{n-q}$ s'obtient avec la somme des termes X^0X^p, X^1X^{p-1}, X^2X^{p-2}, ..., X^qX^{p-q}.
De plus, pour tout $k \in [\![0;q]\!]$, le coefficient devant le monôme X^k dans le développement de $(1+X)^q$ est $\binom{q}{k}$, et celui devant le monôme X^{q-k} dans le développement de $(1+X)^{n-q}$ est $\binom{n-q}{q-k}$. Par conséquent, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, le coefficient devant X^p obtenu en développant $(1+X)^q(1+X)^{n-q}$ est égal à $\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\binom{n-k}{q-k}$.

Conclusion : pour tous entiers n, p, q tels que $q \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\binom{n-q}{p-k}$.

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$E_{n,p} = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n \ / \ x_1 + x_2 + ... + x_n = p\right\} \quad \text{et} \quad c_{n,p} = \text{Card}(E_{n,p})$$

1. Déterminer $c_{n,0}$, $c_{n,1}$, $c_{n,2}$, $c_{1,p}$ et $c_{2,p}$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.
   - $E_{n,0} = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n \ / \ x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\right\} = \{(0, 0, ..., 0\}$. D'où : $c_{n,0} = 1$.
   - $E_{n,1} = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n \ / \ x_1 + x_2 + ... + x_n = 1\right\} = \{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)\}$. D'où : $c_{n,1} = n$.
   - Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$. On a :

   $$(x_1, ..., x_n) \in E_{n,2} \iff x_1 + x_2 + ... + x_n = 2 \iff \left\{\begin{array}{l} \exists i \in [\![1,n]\!] \ / \ x_i = 2 \\ \text{OU} \\ \exists i, j \in [\![1,n]\!], i \neq j \ / \ x_i = x_j = 1 \end{array}\right.$$

   Le premier cas donne n éléments, alors que le second en fournit $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
   D'où : $c_{n,2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.
   - $E_{1,p} = \left\{x_1 \in \mathbb{N} \ / \ x_1 = p\right\} = p$. D'où $c_{1,p} = 1$.
   - $E_{2,p} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \ / \ x_1 + x_2 = p\right\} = \{(k, p-k), \ k \in [\![0;p]\!]\}$. D'où : $c_{2,p} = p + 1$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$: $c_{n+1,p} = \sum_{k=0}^{p} c_{n,k}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.
Soit $(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$. On a :

$$(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in E_{n+1,p} \iff x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = p \iff \exists k \in [\![0;p]\!] \ / \ x_1 + ... + x_n = k \text{ ET } x_{n+1} = p - k$$

Autrement dit :

$$E_{n+1,p} = \bigcup_{k=0}^{p}\left\{(x_1, ..., x_n, p-k) \in \mathbb{N}^n \ / \ x_1 + x_2 + ... + x_n = k\right\}$$

De plus, pour k et k' deux entiers distincts de $[\![0,n]\!]$, les ensembles $\left\{(x_1, ..., x_n, p-k) \in \mathbb{N}^{n+1} \ / \ x_1 + x_2 + ... + x_n = k\right\}$ et $\left\{(x_1, ..., x_n, p-k') \in \mathbb{N}^{n+1} \ / \ x_1 + x_2 + ... + x_n = k'\right\}$ sont disjoints (il suffit de regarder la dernière composante du $n+1$-uplet).
Par conséquent :

$$\text{Card}(E_{n+1,p}) = \sum_{k=0}^{p}\text{Card}\left(\left\{(x_1, ..., x_n, p-k) \in \mathbb{N}^n \ / \ x_1 + x_2 + ... + x_n = k\right\}\right) = \sum_{k=0}^{p} c_{n,k}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $c_{n+1,p} = \sum_{k=0}^{p} c_{n,k}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$c_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}$$

Démontrons cela par récurrence (sur n).
   - **Initialisation.** Pour $n = 1$:
   C'est vrai, d'après la question 1, et puisque pour tout $pp \in \mathbb{N}$, $\binom{p}{p} = 1$.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que "$\forall p \in \mathbb{N},\ c_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}$" et montrons que "$\forall p \in \mathbb{N},\ c_{n+1,p} = \binom{n+p}{p}$".

  Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} c_{n+1,p} &= \sum_{k=0}^{p} c_{n,k} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

  Il s'agit maintenant de montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+p}{p}$.

  n étant fixé, démontrons cette égalité par récurrence sur p... Sans difficulté, on obtient le résultat voulu (l'hérédité utilise la relation de Pascal).

  Ce qui termine l'hérédité de la récurrence sur n.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $c_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}$.