Exercices du chapitre 8
Dénombrement et coefficients binomiaux

●○○○ Exercice 1 - Dénombrements avec coefficients binomiaux
Soit E l'ensemble à 10 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

1. Combien E possède-t-il de parties ?
2. Combien E possède-t-il de parties à 5 éléments ?
3. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :
   - **3.a.** a et b ;
   - **3.b.** a mais pas b ;
   - **3.c.** b mais pas a ;
   - **3.d.** ni a, ni b.

●○○○ Exercice 2 - Podium !
Une compétition oppose 10 concurrents, dont Marie-Gertrude.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums possibles dans lesquels Marie-Gertrude est première ?
3. Combien y a-t-il de podiums possibles dont Marie-Gertrude fait partie ?

●○○○ Exercice 3 - Code de carte bancaire
Le code d'une carte bancaire est composé de 4 chiffres allant de 0 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes possibles contenant au moins un 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes possibles contenant exactement un 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes possibles composés de quatre chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes possibles composés d'au moins trois chiffres distincts ?

●●○○ Exercice 4 - Formule de Pascal & Python
Utiliser la formule de Pascal pour écrire une fonction `Python` prenant en arguments d'entrées deux entiers naturels n et k et renvoyant la valeur de $\binom{n}{k}$.

●●○○ Exercice 5 - Calcul sur les coefficients binomiaux
Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Démontrer la relation de Pascal en utilisant l'expression de $\binom{n}{k}$ avec les factorielles.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
3. **3.a.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1; n]\!]$. Démontrer : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
   - **3.b.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
   - **3.c.** Établir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0; n]\!]$:
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

●●○○ Exercice 6 - Cardinal de $\mathcal{P}(E)$
A l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout ensemble E à n éléments : $\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$.

●●●○ Exercice 7 - Extension de la relation de Pascal

A l'aide d'un dénombrement, démontrer que pour tous entiers n, p, q tels que $q \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{n-q}{p-k}$$

●●●● Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$\mathrm{E}_{n,p} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \ / \ x_1 + x_2 + \dots + x_n = p\right\} \quad \text{et} \quad c_{n,p} = \mathrm{Card}(\mathrm{E}_{n,p})$$

1. Déterminer $c_{n,0}$, $c_{n,1}$, $c_{n,2}$, $c_{1,p}$ et $c_{2,p}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$: $c_{n+1,p} = \sum_{k=0}^{p} c_{n,k}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$:
$$c_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}$$