Exercices du chapitre 9
Matrices

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Écriture de matrices

1. Expliciter les matrices suivantes :

$$A=\left(i+j\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\1\leq j\leq 2}} \quad ; \quad B=\left(i^j\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\1\leq j\leq 4}}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\\4&5\end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&4&8&16\\3&9&27&81\end{pmatrix}$$

2. Écrire de façon compacte les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A=\left(i^{j-1}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\1\leq j\leq 4}} \; ; \; B=\left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 4\\1\leq j\leq 4}}$$

●○○○ Exercice 2 - Opérations sur les matrices

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix} \; ; \; C=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \; ; \; D=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

Si possible, calculer : $A+B$, $2A$, $-5D$, $A+C$, AB, AC, AD, A^2, C^2, D^2.

- $A+B=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&1&2\\2&2&3\end{pmatrix}$
- $2A=\begin{pmatrix}2&4&6\\2&2&2\\0&2&6\end{pmatrix}$
- $-5D=\begin{pmatrix}-5&-10\\-15&-20\end{pmatrix}$
- $A+C$ n'existe pas car A et C n'ont pas la même taille
- $AB=\begin{pmatrix}5&3&6\\2&1&3\\3&2&3\end{pmatrix}$
- $AC=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$
- AD n'existe pas, car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B
- $A^2=\begin{pmatrix}3&7&11\\2&4&6\\1&3&5\end{pmatrix}$
- C^2 n'existe pas, car C n'est pas une matrice carrée
- $D^2=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}$

●○○○ Exercice 3 - Polynôme annulateur et inversibilité

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Notons $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

   Calculer A^2+A. En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.

   - On trouve :

$$A^2+A=2I_3$$

- Par conséquent :
$$A(A+I_3)=2I_3$$
D'où :
$$A\times\frac{1}{2}(A+I_3)=I_3$$

Conclusion : A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Pourquoi ? On a trouvé une matrice B ($B=\frac{1}{2}(A+I_3)$) telle que $AB=I_3$. Donc A est inversible et $A^{-1}=B$.

2. Notons $A=\begin{pmatrix}-3&4&2\\-2&3&1\\2&-2&0\end{pmatrix}$.
Exprimer A^2 comme une combinaison linéaire de A et I_3. En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.
   - On trouvé $A^2=\begin{pmatrix}5&-4&-2\\2&-1&-1\\-2&2&2\end{pmatrix}$. Ainsi :
   $$A^2=-A+2I_3$$
   - Comme dans la question précédente, on conclut que A est inversible et que $A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&4&2\\-2&4&1\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

3. Notons $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$.
Calculer A^3-A^2-A. En déduire que A est inversible puis exprimer son inverse en fonction de A.
   - On trouve :
   $$A^3-A^2-A=-I_3$$
   - Par conséquent :
   $$-A^3+A^2+A=I_3$$
   D'où :
   $$A(-A^2+A+I_3)=I_3$$

   Conclusion : A est inversible et $A^{-1}=-A^2+A+I_3=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}$.

Rédaction On ne rédige pas par équivalences ici : ce n'est pas du tout ce qui est demandé.

4. Notons $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$.
Calculer A^3-3A^2+2A. En déduire que A n'est pas inversible.
   - On trouve :
   $$A^3-3A^2+2A=0_3$$
   - Raisonnons par l'absurde et supposons que A est inversible. On avait :
   $$A^3-3A^2+2A=0_3$$
   Or, A étant supposée inversible, en multipliant par A^{-1}, on obtient (puisque $A^{-1}\times A^3=A^2$...) :
   $$A^2-3A+2I_3=0_3$$
   Or, le calcul de A^2 permet de vérifier que $A^2\neq 3A-2I_3$. D'où l'absurdité.

   Conclusion : la matrice A n'est pas inversible.

★ Classique ! ★ Il est très fréquent de raisonner par l'absurde pour démontrer qu'une matrice n'est pas inversible. En effet, il y a plus de choses à faire avec une matrice inversible : multiplier par son inverse par exemple...

5. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2-3A+2I_n=0_n$, $A\neq I_n$ et $A\neq 2I_n$.
   5.a. Factoriser le polynôme X^2-3X+2.
   $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$.
   5.b. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $A-I_n$ et $A-2I_n$ ne sont pas inversibles.
   - Raisonnons par l'absurde et supposons que la matrice $A-I_n$ est inversible.
   On sait que $A^2-3A+2I_n=0_n$, donc :
   $$(A-I_n)(A-2I_n)=0_n$$
   La matrice $A-I_n$ étant supposée inversible, on obtient, en multipliant par $(A-I_n)^{-1}$:
   $$A-2I_n=0_n$$
   Or on sait que $A\neq 2I_n$. D'où l'absurdité.

   Conclusion : la matrice $A-I_n$ n'est pas inversible.
   - De même, on trouve que la matrice $A-2I_n$ n'est pas inversible.

6. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A-2I_n)^3=0_n$.

6.a. Justifier que $A - 2I_n$ n'est pas inversible.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la matrice $A - 2I_n$ est inversible.
On sait que :
$$(A - 2I_n)^3 = 0_n$$
La matrice $A - 2I_n$ étant supposée inversible, on obtient, en multipliant par $(A - 2I_n)^{-1}$:
$$(A - 2I_n)^2 = 0_n$$
Puis, à nouveau en multipliant par $(A - 2I_n)^{-1}$:
$$A - 2I_n = 0_n$$
Or on sait que $A \neq 2I_n$. D'où l'absurdité.

Conclusion : la matrice $A - 2I_n$ n'est pas inversible.

6.b. Démontrer que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

On sait que $(A-2I_n)^3 = 0_n$. Or, puisque A et I_n commutent, d'après la formule du binôme de Newton :
$$(A - 2I_n)^3 = A^3 - 6A^2 + 12A - 8I_n$$
Par conséquent :
$$A^3 - 6A^2 + 12A - 8I_n = 0_n$$
D'où :
$$A \times \frac{1}{8}(A^2 - 6A + 12I_n) = I_n$$

Conclusion : A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{8}(A^2 - 6A + 12I_n)$.

☞ Rappel...
Si A et B commutent : $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$...

●●●○ Exercice 4 - Polynôme annulateur et inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$. Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

Puisque $A^5 + A = I_n$, le polynôme $X^5 + X - 1$ est annulateur de A. Effectuons maintenant la division euclidienne de $X^5 + X - 1$ par $X^2 + X + 1$...
On obtient :
$$X^5 + X - 1 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1) - 2$$
Par conséquent :
$$A^5 + A - I_n = (A^2 + A + I_n)(A^3 - A^2 + I_n) - 2I_n$$
Mais, $A^5 + A - I_n = 0_n$... D'où :
$$(A^2 + A + I_n) \times \frac{1}{2}(A^3 - A^2 + I_n) = I_n$$

Conclusion : la matrice $A^2 + A + I_n$ est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^3 - A^2 + I_n) = I_n$.

●○○○ Exercice 5 - Calcul d'inverse

Dans chaque cas, étudier l'inversibilité de la matrice M et, le cas échéant, déterminer son inverse.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det(M) = 1 \neq 0$, donc M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\det(M) = 0$: M n'est donc pas inversible.

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(M) = -2 \neq 0$, donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

M est diagonale à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- M est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible.
- La méthode habituelle nous permet d'obtenir : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Petite remarque
Il n'était pas nécessaire de justifier l'inversibilité au préalable, puisqu'elle se retrouve dans la méthode mise en place pour déterminer l'inverse.

6. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

M contient une ligne de 0, elle n'est donc pas inversible.

7. $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La méthode habituelle nous permet d'obtenir que M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On remarque que $L_2 = 2L_1$. Par conséquent, M n'est pas inversible.

9. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La méthode habituelle nous permet d'obtenir que M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

La méthode habituelle nous permet d'obtenir que M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

11. $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

On remarque que $L_3 = L1 - L_2$. Par conséquent, la matrice M n'est pas inversible.

●●○○ Exercice 6 - Inversibilité

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A est inversible. Montrer que B est inversible si, et seulement si, AB est inversible.

Il s'agit de démontrer une équivalence, on raisonne donc par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que B est inversible.
Dans ce cas, AB est le produit de deux matrices inversibles, elle est donc inversible.

Conclusion : si B est inversible, alors AB est inversible.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que AB est inversible. Notons $C = AB$.
Puisque A est inversible, on obtient, en multipliant par A^{-1} :

$$A^{-1}C = B$$

Or, par hypothèse, C est inversible. Par conséquent, B est le produit de deux matrices inversibles, elle est donc inversible.

Conclusion : si AB est inversible, alors B est inversible.

●●●● Exercice 7 - Algorithme du pivot de Gauss

Interpréter chaque opération élémentaire sur les lignes comme un produit matriciel.
Plus précisément :

- traduire l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ par une multiplication matricielle par la gauche ;
  Échanger L_i et L_j d'une matrice M équivaut à multiplier M à gauche par la matrice A définie par :
  - pour tous $k \notin \{i, j\}$, $a_{k,k} = 1$ (les autres lignes sont inchangées)
  - $a_{j,i} = 1$ et $a_{i,j} = 1$ (la ligne L_i passe en ligne j et la ligne L_j passe en ligne i)
  - $a_{i,i} = 0$ et $a_{j,j} = 0$
  - tous les autres coefficients étant nuls
- traduire l'opération $L_i \longleftarrow aL_i$ (avec $a \neq 0$) par une multiplication matricielle par la gauche ;
  Multiplier la ligne L_i d'une matrice M par un réel non nul a équivaut à multiplier M à gauche par la matrice A définie par :
  - pour tous $k \neq i$, $a_{k,k} = 1$ (les autres lignes sont inchangées)
  - $a_{i,i} = a$ (la ligne L_i est multipliée par a)
  - tous les autres coefficients étant nuls
- traduire l'opération $L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$ (avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$) par une multiplication matricielle par la gauche.
  Remplacer la ligne L_i par la ligne $aL_i + bL_j$ d'une matrice M équivaut à multiplier M à gauche par la matrice A définie par :
  - pour tous $k \neq i$, $a_{k,k} = 1$ (les autres lignes sont inchangées)
  - $a_{i,i} = a$ (la ligne L_i est multipliée par a) et $a_{i,j} = b$ (la ligne L_j est multipliée par b et sera ajoutée à la ligne L_i)
  - tous les autres coefficients étant nuls

●●●● Exercice 8 - Réduites de Gauss d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **réduite de Gauss de A** toute matrice triangulaire obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A.

On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.

1. Démontrer que si A est inversible, alors toutes ses réduites de Gauss sont inversibles.
Supposons que A est inversible. Soit R_A une réduite de Gauss de la matrice A.
Puisque R_A est obtenue par opération élémentaire sur les lignes de A, d'après l'exercice précédent, il existe un entier non nul q et des matrices $G_1, G_2, ..., G_q$, traduisant chacune une opération effectuée (G_k traduit la k-ème opération effectuée), telles que :
$$R_A = G_q G_{q-1} ... G_1 A$$
Montrons maintenant que toutes les matrices $G_1, G_2, ..., G_q$ sont inversibles. Soit $k \in [\![1;q]\!]$. Trois cas se présentent :
   - G_k traduit l'opération $L_i \longleftarrow aL_i$ (avec $a \neq 0$). Ainsi, d'après l'exercice précédent, G_k est diagonale avec des 1 partout sur la diagonale sauf le coefficient (i,i), égal à a, qui est non nul. Ainsi, G est diagonale à coefficients diagonaux non nuls ; elle est donc inversible.
   - G_k traduit l'opération l'opération $L_i \longleftarrow aL_j + bL_j$ (avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$). Ainsi, d'après l'exercice précédent, G_k est triangulaire (supérieure si $j > i$, inférieure si $j < i$) avec des 1 partout sur la diagonale sauf le coefficient (i,i), égal à a, qui est non nul. Ainsi, G est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls ; elle est donc inversible.
   - G_k traduit l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$. Or, si on effectue deux fois successivement cette opération à une matrice, on revient à la matrice initiale. Autrement dit :
   $$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ G_k^2 M = M$$
   En particulier, pour $M = I_n$, on obtient :
   $$G_k^2 = I_n$$
   Par conséquent, G_k est inversible (et $G_k^{-1} = G_k$).

Conclusion : toutes les matrices $G_1, G_2, ..., G_q$ sont inversibles.
De plus, par hypothèse, A est inversible. Ainsi, R_A est le produit de matrices inversibles, elle est donc également inversible.

Conclusion : si A est inversible, alors toutes ses réduites de Gauss sont également inversibles.

> **✘ Attention !**
> La multiplication se fait par la gauche... G_q est donc la matrice la plus à gauche, puisque l'opération q est celle faite en dernier.

2. Démontrer que si une réduite de Gauss de A est inversible, alors A est inversible.
Supposons que A possède une réduite de Gauss inversible, notée R_A.
Avec les mêmes notations que précédemment, on a :
$$R_A = G_q G_{q-1} ... G_1 A$$
Or, on a prouvé dans la question précédente que toutes les matrices $G_1, G_2, ..., G_q$ sont inversibles. Par conséquent :
$$A = G_1^{-1} G_2^{-1} ... G_q^{-1} R_A$$
R_A étant supposée inversible, A est le produit de matrices inversibles : elle est donc inversible.

Conclusion : si une réduite de Gauss de A est inversible, alors A est inversible.

> **☞ Pour info...**
> Tout ce qui a été démontré dans cet exercice justifie à la fois la méthode du pivot de Gauss pour l'étude de l'inversibilité d'une matrice, mais également le fait que les opérations élémentaires sur les lignes d'un système conservent les équivalences : cela revient en effet à multiplier (par la gauche) par une matrice inversible, on peut donc remonter le calcul en multipliant par son inverse...

3. Que peut-on dire si A possède une réduite de Gauss non inversible ?
Si A possède une réduite de Gauss non inversible, alors A n'est pas inversible.
En effet, si A était inversible, d'après la question **1.**, toutes ses réduites seraient inversibles : contradiction avec l'hypothèse.

Conclusion : si A possède une réduite de Gauss non inversible, alors A n'est pas inversible.

Les exercices 9 à 14 abordent chacun une méthode différente pour déterminer les puissances d'une matrice dans des cas particuliers. D'autres méthodes peuvent être utilisées ponctuellement dans des exercices, mais ce sont les pus courantes.

●●○○ Exercice 9 - Conjecture & récurrence...

Dans chaque cas, conjecturer une formule pour A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer cette conjecture par récurrence. L'expression trouvée est-elle encore valable quand $n = 0$?
Je ne fais pas les récurrences, qui ne contiennent aucune difficulté particulière.

1. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$
   - On a $\begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & b^0 & 0 \\ 0 & 0 & c^0 \end{pmatrix} = I_3 = A^0$. L'expression trouvée est encore valable pour $n = 0$.

> **Petite remarque**
> C'est le cas pour toute matrice diagonale.

> **✘ Attention !**
> On ne commence pas par écrire $A^0 = \begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & b^0 & 0 \\ 0 & 0 & c^0 \end{pmatrix}$ c'est ce que l'on veut démontrer !

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 3^{n-1} A = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   - l'expression trouvée n'est pas valable quand $n = 0$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$
   - On a $\begin{pmatrix} 1 & 2^0 - 1 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix} = I_2 = A^0$. L'expression trouvée est encore valable pour $n = 0$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - On a $\begin{pmatrix} 1 & 2^0 - 1 & 0 \\ 0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = A^0$. L'expression trouvée est encore valable pour $n = 0$.

☞ **Pour info...**
En fait, si A est inversible, l'expression trouvée pour A^p ($p \in \mathbb{N}^*$) est encore valable quand $p = 0$, et même quand $p = -1$. Si A n'est pas inversible, l'expression trouvée pour $p \in \mathbb{N}^*$ ne donnera pas la matrice identité quand $p = 0$...

●●○○ Exercice 10 - Par diagonalisation...

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer son inverse.
   $\det(P) = -1 \neq 0$, donc P est inversible et $P^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera D la matrice obtenue.*
   On trouve
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Conclusion : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$: l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
     On a :
     $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
     L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque D est diagonale, on a :
   $$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
   Ainsi, d'après la question précédente, on a :
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$.

Vérification
On vérifie que la relation obtenue convient pour $n = 0$ et $n = 1$ pour se rassurer !

●●○○ Exercice 11 - Décomposition de la forme $\lambda I_n + N$, avec N nilpotente.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel λ et la matrice N de sorte que $A = \lambda I_3 + N$ et que N soit triangulaire avec des coefficients diagonaux nuls.
   Sans difficulté : $\lambda = 2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Calculer N^2, N^3 puis N^k pour tout $k \in [\![3;+\infty[\![$.
   On trouve :
   - $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - $N^3 = 0_3$
   - Par conséquent : $\forall k \in [\![3;+\infty[\![,\ N^k = 0_3$.

Vocabulaire
Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que : $\exists p \in \mathbb{N}^* \,/\, N^p = 0_n$ est dite nilpotente.

3. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question **1.**, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= (2I_3 + N)^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton, puisque } I_3 \text{ et N commutent} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $n \in [\![2;+\infty[\![$:
  On a alors, d'après la relation de Chasles (licite car $n \geq 2$) :

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k \quad \text{d'après la question précédente : } \forall k \in [\![3;+\infty[\![,\ N^k = 0_3 \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} 2^n N^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 \\ &= 2^n I_3 + n2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n+3)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Si $n \in \{0;1\}$:
  - Si $n = 0$:

$$\begin{aligned} 2^0 I_3 + 0 \times 2^{0-1} N + \frac{0(0-1)}{2} 2^{0-2} N^2 &= I_3 \\ &= A^0 \end{aligned}$$

  - Si $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2^1 I_3 + 0 \times 2^{1-1} N + \frac{1(1-1)}{2} 2^{1-2} N^2 &= 2I_3 + N \\ &= A^1 \end{aligned}$$

  Par conséquent, l'expression trouvée précédemment reste valable quand $n \in \{0;1\}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n+3)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

★SUBTILE...★
Ce découpage est bien valable dans le cas où $n = 2$... Si $n = 2$, l'indice de la seconde somme porte sur un ensemble vide ; et cette seconde somme vaut ainsi, par convention, 0.

PETITE REMARQUE
Je choisis de vérifier l'anté-pénultième ligne, puisqu'elle est plus rapide à écrire ; mais on peut aussi vérifier la dernière.

●●○○ EXERCICE 12 - DIVISION EUCLIDIENNE DE X^n PAR UN POLYNÔME ANNULATEUR.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que le polynôme $X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A.

Sans difficulté, on a : $A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$...

Conclusion : le polynôme $X^2 - 3X + 2$ est annulateur de A.

2. Déterminer les racines de $X^2 - 3X + 2$.

Conclusion : les racines de $X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet qu'il existe deux uniques polynômes $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ tels que $X^n = Q_n(X) \times (X^2 - 3X + 2) + R_n(X)$ avec $\deg(R_n) < \deg(X^2 - 3X + 2)$.

PETITE REMARQUE
Ce résultat, admis, est le théorème de division euclidienne sur les polynômes.

3.a. Déterminer le polynôme $R_n(X)$.

On sait que : $\deg(R_n) \leq 1$. Il existe donc deux réels a_n, b_n tels que $R_n(X) = a_n X + b_n$.

Or :

$$X^n = Q_n(X) \times (X^2 - 3X + 2) + R_n(X)$$

D'où, en évaluant en 1 et 2 (les racines de $X^2 - 3X + 2$), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ -b_n = 2^n - 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_n = 2^n - 1 \\ b_n = 2 - 2^n \end{cases}$$

Conclusion : $R_n(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.

✓ RIGUEUR !
Puisque le polynôme est indexé par n, il est naturel que ses coefficients le soient également (après tout, ils dépendent bien de n...).

3.b. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Le résultat de la question précédente nous permet d'écrire :

$$X^n = Q_n(X) \times (X^2 - 3X + 2) + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$$

En évaluant en A, et puisque $A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$, on obtient :

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$$

Conclusion : $A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^{n+1}-2 \\ 1-2^n & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$.

> **Petite remarque**
> La matrice A de cet exercice est la transposée de celle de l'exercice 10... Même chose pour les puissances !

●●○○ Exercice 13 - A l'aide de suites...

Considérons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que toute puissance d'une matrice symétrique est encore une matrice symétrique.

Soient M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcll} {}^t(M^k) & = & ({}^tM)^k & \text{car M est symétrique (donc } {}^tM = M) \\ & = & M^k & \end{array}$$

Conclusion : toute puissance d'une matrice symétrique est encore une matrice symétrique.

> **Petite remarque**
> On a vu que ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$, d'où, par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N},\ {}^t(M^k) = ({}^tM)^k$.

2. Démontrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n), que l'on définira, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a_n, b_n \in \mathbb{R} \ / \ A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $A^0 = I_2$. En posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on obtient : $A^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$. L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$\exists a_n, b_n \in \mathbb{R} \ / \ A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$" et montrons "$\exists a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{R} \ / \ A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$".
  On a :
  $$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} & \\ & = & \begin{pmatrix} 3a_n + 2b_n & 3b_n + 2a_n \\ 2b_n + 3a_n & 2b_n + 3a_n \end{pmatrix} & \text{en posant } a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \text{ et } b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ & = & \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix} & \end{array}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par récurrence, on a démontré : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a_n, b_n \in \mathbb{R} \ / \ A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$.
Par conséquent, il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$.
On a également démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = a_n + b_n$ et $d_n = a_n - b_n$. Déterminer les termes généraux des suites (s_n) et (d_n).

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
  $$\begin{array}{rcll} s_{n+1} & = & a_{n+1} + b_{n+1} & \text{d'après les relations de récurrence sur } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ de la question précédente} \\ & = & 3a_n + 2b_n + 2a_n + 3b_n & \\ & = & 5a_n + 5b_n & \\ & = & 5s_n & \end{array}$$
  Par conséquent, la suite (s_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme $s_0 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. De même :
  $$\begin{array}{rcll} d_{n+1} & = & a_{n+1} - b_{n+1} & \text{d'après les relations de récurrence sur } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ de la question précédente} \\ & = & a_n - b_n & \\ & = & d_n & \end{array}$$
  Par conséquent, la suite (d_n) est constante égale à $d_0 = 1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 5^n$ et $d_n = 1$.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question **3.** :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_n & + & b_n & = & 5^n \\ a_n & - & b_n & = & 1 \end{array} \right.$$

Or :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_n & + & b_n & = & 5^n \\ a_n & - & b_n & = & 1 \end{array} \right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} a_n & + & b_n & = & 5^n \\ & - & 2b_n & = & 1 - 5^n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{1}{2}(5^n + 1) \\ b_n & = & \frac{1}{2}(5^n - 1) \end{array} \right.$$

Réflexe ! On vérifie que la relation obtenue fournit le bon résultat quand $n=1$! Ouf !!

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n+1 & 5^n-1 \\ 5^n-1 & 5^n+1 \end{pmatrix}$.

●●○○ Exercice 14 - A l'aide de suites...

Considérons $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis déterminer les deux réels x et y de sorte que $A^2 = xA + yI_3$.
   - On obtient :
   $$A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$
   - On remarque ensuite que :
   $$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}I_3 \end{aligned}$$

Petite remarque On peut aussi raisonner seulement sur les matrices à coefficients entiers en remarquant alors que $16A^2 = 4I_3 + 3 \times 4A$...

Conclusion : on a $A^2 = xA + yI_3$ lorsque $x = \frac{3}{4}$ et $y = \frac{1}{4}$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels x_n et y_n tels que $A^n = x_nA + y_nI_3$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
   $A^0 = I_3 = 0 \cdot A + 1 \cdot I_3$.
   En posant $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, on a bien $A^0 = x_0A + y_0I_3$. L'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$\exists x_n, y_n \in \mathbb{R} \;/\; A^n = x_nA + y_nI_3$" et montrons "$\exists x_{n+1}, y_{n+1} \in \mathbb{R} \;/\; A^{n+1} = x_{n+1}A + y_{n+1}I_3$".
   On a :
   $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A \times (x_nA + y_nI_3) \\ &= x_nA^2 + y_nA && \text{d'après la question } \mathbf{1.} \\ &= x_n\left(\frac{3}{4}A + \frac{1}{4}I_3\right) + y_nA \\ &= \left(\frac{3}{4}x_n + y_n\right)A + \frac{1}{4}x_nI_3 && \text{en posant } x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + y_n \text{ et } y_{n+1} = \frac{1}{4}x_n \\ &= x_{n+1}A + y_{n+1}I_3 \end{aligned}$$
   L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels x_n et y_n tels que $A^n = x_nA + y_nI_3$.
On a également démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + y_n$ et $y_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$.

3. Donner les valeurs x_0, y_0, x_1 et y_1 puis établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = \frac{3}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n$.
   - On a :
   $$x_0 = 0 \;;\; y_0 = 1 \;;\; x_1 = 1 \;;\; y_1 = 0$$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après les relations de récurrence sur (x_n) et (y_n) établies à la question précédente :
   $$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{3}{4}x_{n+1} + y_{n+1} \\ &= \frac{3}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n \end{aligned}$$

4. En déduire les termes généraux des suites (x_n) et (y_n).
   - D'après la question précédente, (x_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0$, dont les solutions sont 1 et $\frac{-1}{4}$.
   Par conséquent :
   $$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\; x_n = \lambda 1^n + \mu\left(\frac{-1}{4}\right)^n$$
   Or on sait que $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. Ainsi :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 &=& \lambda + \mu \\ x_1 &=& \lambda - \frac{1}{4}\mu \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 0 \\ \lambda - \frac{1}{4}\mu &=& 1 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 0 \\ -\frac{5}{4}\mu &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& \frac{4}{5} \\ \mu &=& \frac{-4}{5} \end{array}\right.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{4}{5}\left(1 - \left(\frac{-1}{4}\right)^n\right)$.

- ◇ On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{4}x_n \\ &= \frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right) \end{aligned}$$

  On a ainsi établi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right)$$

  Par conséquent :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ y_k = \frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1}\right)$$

  ◇ *Cette relation est-elle encore valable si $k=0$?*
  On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{-1}{4}\right)^{0-1}\right) &= \frac{1}{5}(1+4) \\ &= 1 \\ &= y_0 \end{aligned}$$

On peut donc conclure que la relation trouvée est valable sur $\mathbb{N}$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}\right)$.

5. Conclure sur l'expression de A^n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
On conclut avec les questions précédentes... Un peu pénible à écrire. On pense bien à vérifier que l'expression obtenue est correcte pour $n=0$ et $n=1$ pour se rassurer dans tout ce qui a été fait.

●●○○ Exercice 15 - Suites imbriquées...

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -5u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 2v_n \end{cases}$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
Posons $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

Conclusion : $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la matrice X_n en sortie.

```python
import numpy as np

def suite_X(n):
    X=np.array([[1],[1]])
    A=np.array([[-5,3],[6,-2]])
    for k in range(1,n+1):
        X=np.dot(A,X)
    return X
```

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n=0$:
   $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$: l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$X_n = AX_0$" et montrons "$X_{n+1} = A^{n+1}X_0$".
   On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \times A^n X_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1}X_0 \end{aligned}$$

   L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

Petite remarque
Cette récurrence serait une "récurrence immédiate" si elle ne faisait pas l'objet de la question !

4. *Le but des questions ci-dessous est d'exprimer A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

4.a. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et donner P^{-1}.

$\det(P) = -3 \neq 0$, donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.b. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera D la matrice obtenue.*
Pas de difficulté particulière...

Conclusion : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

4.c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Par récurrence... en commençant par remarquer que, puisque $D = P^{-1}AP$, on a :
$$A = PDP^{-1}$$
  - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$: l'initialisation est vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
  On a :
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

  Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque D est diagonale, on a :
$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-8)^n \end{pmatrix}$$
  Et, d'après ce qui précède :
$$A^n = PD^nP^{-1}$$
  Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-8)^n & 1-(-8)^n \\ 2-2(-8)^n & 2+(-8)^n \end{pmatrix}$.

Réflexe !
On vérifie que la relation obtenue fournit le bon résultat quand $n = 0$ et $n = 1$! Ouf !!

5. En déduire les termes généraux de (u_n) et (v_n).
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question **3.** :
$$X_n = A^nX_0$$
Ainsi, d'après la question précédente, puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient :
$$X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-8)^n \\ 4-(-8)^n \end{pmatrix}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{3}\left(2+(-8)^n\right)$ et $v_n = \dfrac{1}{3}\left(4-(-8)^n\right)$.

●●●○ Exercice 16 - Suites imbriquées

Considérons les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ telles que : $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$ et pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$
Déterminer les termes généraux des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

- Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
- Par récurrence immédiate, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$$
- *Reste à calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.*
On remarque que $A = 3I_3 + N$, avec N une matrice nilpotente... On poursuit avec la formule du binôme de Newton.
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$
- Des deux points précédents, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} 3^n + 2n3^{n-1} + \frac{7n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 2 \times 3^n + 7n3^{n-1} \\ 7 \times 3^n \end{pmatrix}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3^n + 2n3^{n-1} + \dfrac{7n(n-1)}{2}3^{n-2}$, $b_n = 2 \times 3^n + 7n3^{n-1}$ et $c_n = 7 \times 3^n$.

●○○○ Exercice 17 - Suite récurrente linéaire d'ordre 3...

Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0\ ;\ u_1 = 1\ ;\ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$. La suite de l'exercice consisterait à déterminer l'expression

de A^n...
On obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

●○○○ EXERCICE 18 - TYPE CONCOURS

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

PETITE REMARQUE — On aurait aussi pu demander d'exprimer A^2 comme une combinaison linéaire de A et I_2.

1. Calculer $A^2 - A$.
   On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ et donc $A^2 - A = 6I_2$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_2.
   D'après la question précédente, on obtient :
   $$A^2 - A = 6I_2$$
   C'est à dire
   $$A\left(\frac{1}{6}(A - I_2)\right) = I_2$$
   Conclusion : A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{6}(A - I_2)$
3. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   $\det(P) = 5 \neq 0$, donc P est inversible et
   $$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
   Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera D la matrice obtenue.*
   Immédiat.
   Conclusion : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$: l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
     On a :
     $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times PD^nP^{-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} && \text{d'après la question précédente} \\ &= PD \times D^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
     L'hérédité est ainsi établie.

   IMPORTANT ! — Puisque $D = P^{-1}AP$, alors $A = PDP^{-1}$.

   Conclusion : pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n. L'expression trouvée est-elle encore valable pour $n = -1$?
   Il suffit de dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ (car D est diagonale !) puis de calculer le produit PD^nP^{-1}...
   Conclusion : pour tout entier naturel n on a : $A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \times 3^{n+1} + 3 \times (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \times 3^n + 3 \times (-2)^n \end{pmatrix}$.
   En utilisant la question 2, on vérifie que l'expression est valable pour $n = -1$.

On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \; ; \; u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3 \end{cases}$$

7. Calculer u_2 et u_3.
   Sans difficulté, on trouve $u_2 = 1$ et $u_3 = 10$.
8. Écrire une fonction `Python` prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant en sortie la valeur de u_n.

On pose $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

9. **9.a.** Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $X_{n+1} = AX_n + B$.
   Sans difficulté, ce n'est que du calcul matriciel.

9.b. Résoudre l'équation $AY + B = Y$, d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. *On notera L la matrice solution obtenue.*

Soit $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AY + B = Y &\iff \begin{pmatrix} x+6y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 6y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\iff Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : $AY + B = Y$ lorsque $Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On a ainsi $L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

9.c. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$X_n = A^n(X_0 - L) + L$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $A^0(X_0 - L) + L = X_0 - L + L = X_0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $X_n = A^n(X_0 - L) + L$ et montrons que $X_{n+1} = A^{n+1}(X_0 - L) + L$.
  On a, en commençant par la question **9.a.** :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n + B \\ &= A\left(A^n(X_0 - L) + L\right) + B && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1}(X_0 - L) + AL + B \\ &= A^{n+1}(X_0 - L) + L && \text{d'après la question précédente, } AL + B = L \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

10. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}$$

Ce n'est que du calcul matriciel... En utilisant le résultat de la question précédente et la matrice A^n trouvée dans la question **6.**. On obtient l'expression de X_n en fonction de n ; et c'est seulement la deuxième ligne (qui correspond à u_n ici) qui nous intéresse.

●●○○ Exercice 19 - Type concours

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = X &\iff (A - I_3)X = 0_{3,1} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x &+& 5y &-& 14z &=& 0 \\ 6x &+& 5y &-& 16z &=& 0 \\ 5x &+& 5y &-& 15z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - 5L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x &+& 5y &-& 14z &=& 0 \\ & - & 5y &+& 10z &=& 0 \\ & - & 5y &+& 10z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x &+& 5y &=& 14z \\ && y &=& 2z \end{array}\right. \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} 4x &=& 4z \\ y &=& 2z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& 2z \end{array}\right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Petite remarque

En guise d'entraînement, on peut aussi résoudre $AX = 0_{3,1}$ et $AX = -4X$. Les réponses sont plus ou moins données dans la matrice P...

2. Vérifier que P est inversible et déterminer son inverse.

La méthode habituelle nous permet d'obtenir que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. *On notera D cette matrice diagonale.*

Aucune difficulté, mais on doit voir que $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (ou que $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$).

4. Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

On trouve $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

5. On se propose de calculer les matrices X_n définies par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$$

Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la matrice X_n en sortie.

```python
import numpy as np

def suite_X(n):
    A=np.array([[5,5,-14],[6,6,-16],[5,5,-14]])
    B=np.array([[8,4,-16],[0,4,-8],[4,4,-12]])
    X0=np.array([[1],[0],[1]])
    X1=np.array([[0],[-1],[1]])
    if n==0:
        return X0
    elif n==1:
        return X1
    else :
        for k in range(2,n+1):
            X0,X1=X1,np.dot(A,X1)+np.dot(B,X0)
        return X1
```

6. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

6.a. Calculer Y_0 et Y_1 ; puis montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

- $Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2} \\ &= P^{-1}AX_{n+1} + P^{-1}BX_n \\ &= DP^{-1}X_{n+1} + \Delta P^{-1}X_n \\ &= DY_{n+1} + \Delta Y_n \end{aligned}$$

$P^{-1}AP = D$, donc $P^{-1}A = DP^{-1}$; de même, $P^{-1}B = \Delta P^{-1}$

Conclusion : $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

6.b. Montrer alors que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$

En déduire les termes généraux des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ v_{n+2} \\ w_{n+2} \end{pmatrix} &= Y_{n+2} \\ &= DY_{n+1} + \Delta Y_n \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 0 \\ -4w_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4v_n \\ -4w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 4v_n \\ -4w_{n+1} - 4w_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'après la question précédente

- Termes généraux :
  - D'après ce qui précède, la suite (u_n) est constante à partir du rang 1. Par conséquent :

$$\boxed{u_0 = -1 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = -3}$$

◇ D'après ce qui précède, la suite (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2-4=0$, dont les solutions sont 2 et -2. Ainsi :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = \lambda 2^n + \mu(-2)^n$$

Or $v_0 = 0$ et $v_1 = -1$.
On obtient ainsi : $\lambda = \frac{-1}{4}$ et $\mu = \frac{1}{4}$.
Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = -\frac{1}{4}2^n + \frac{1}{4}(-2)^n}$$

◇ D'après ce qui précède, la suite (w_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2+4x+4=0$, dont l'unique solution est -2. Ainsi :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = (\lambda n + \mu)(-2)^n$$

Or $w_0 = 2$ et $w_1 = 4$.
On obtient ainsi : $\lambda = -4$ et $\mu = 2$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = (-4n+2)(-2)^n}$$

6.c. Donner finalement la matrice X_n en fonction de n.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$, on a : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $Y_n = P^{-1}X_n$, on a :

$$\begin{aligned} X_n &= PY_n \\ &= P\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n + v_n + w_n \\ 2u_n - v_n + w_n \\ u_n + w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 - \frac{1}{4}2^n + \left(-4n + \frac{9}{4}\right)(-2)^n \\ -6 + \frac{1}{4}2^n + \left(-4n + \frac{7}{4}\right)(-2)^n \\ -3 + (-4n+2)(-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $X_n = \begin{pmatrix} -3 - \frac{1}{4}2^n + \left(-4n + \frac{9}{4}\right)(-2)^n \\ -6 + \frac{1}{4}2^n + \left(-4n + \frac{7}{4}\right)(-2)^n \\ -3 + (-4n+2)(-2)^n \end{pmatrix}$.

Réflexe !
On vérifie que la relation obtenue fournit le bon résultat quand $n = 1$! Ouf !!

Petite remarque
Ici, la relation obtenue pour $n \in \mathbb{N}^*$ n'est pas valable quand $n = 0$: on ne peut donc pas regrouper les deux cas en un.

●●●○ Exercice 20 - Type concours

Pour tout réel a, on définit la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la ou les valeurs de c pour lesquelles $M(c) = I_2$.
Soit $c \in \mathbb{R}$. On a :

$$M(x) = I_2 \iff c = 0$$

2. Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$.
Aucune difficulté, en partant du membre de gauche.

3. On suppose $a \neq \frac{1}{2}$. Montrer alors que la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer en fonction de a le réel b tel que $M(b) = M(a)^{-1}$. La matrice $M(1/2)$ est-elle inversible ?
Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

- $\det\big(M(a)\big) = (1-a)^2 - a^2 = 1 - 2a$.
  Par conséquent, puisque $a \neq \frac{1}{2}$, on a $\det\big(M(a)\big) \neq 0$. La matrice $M(a)$ est ainsi inversible.
- Soit $b \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} M(a)M(b) = I_2 &\iff M(a+b-2ab) = M(0) \\ &\iff a+b-2ab = 0 \\ &\iff b(1-2a) = -a \\ &\iff b = \frac{a}{2a-1} \end{aligned}$$

acr $a \neq \frac{1}{2}$

  On obtient alors : $M(a)^{-1} = M(b)$, avec $b = \frac{a}{2a-1}$.
- Enfin, $\det\big(M(1/2)\big) = 0$: la matrice $M(1/2)$ n'est donc pas inversible.

4. Déterminer l'unique réel non nul a_0 tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} M(a)^2 = M(a) & \iff & M(a + a - 2a^2) = M(a) \\ & \iff & M(2a - 2a^2) = M(a) \\ & \iff & 2a - 2a^2 = a \\ & \iff & a(1-2a) = 0 \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ \text{ou} \\ a = 1/2 \end{array} \right. \end{array}$$

Conclusion : l'unique réel non nul a_0 tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$ est $\dfrac{1}{2}$.

5. On considère maintenant les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.

5.a. Calculer P^2, PQ, QP et Q^2 *(on donnera les résultats en fonction des matrices P et Q ou de la matrice nulle).*

- d'après la question précédente : $P^2 = M(a_0)^2 = M(a_0) = P$
- $PQ = P(I_2 - P) = P - P^2 = P - P = 0_2$
- $QP = (I_2 - P)P = P - P^2 = 0_2$
- et puisque I_2 et P commutent : $Q^2 = (I_2 - P)^2 = I_2 - 2P + P^2 = I_2 - 2P + P = I_2 - P = Q$

5.b. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le réel α tel que $M(a) = P + \alpha Q$.

... on trouve $\alpha = 1 - 2a$.

5.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $\big(M(a)\big)^n$ en fonction de P, Q, α et n.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} \big(M(a)\big)^n & = & (P + \alpha Q)^n \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} P^k Q^{n-k} \end{array}$$

d'après la formule du binôme de Newton, puisque P et Q commutent (question **6.a.**)

- **Si $n \in [\![1;+\infty[\![$:** On a ainsi, puisque $n \geq 1$:

$$\begin{array}{rcl} \big(M(a)\big)^n & = & \displaystyle\binom{n}{0}\alpha^n P^0 Q^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}P^kQ^{n-k} + \binom{n}{n}\alpha^0 P^n Q^0 \\ & = & \displaystyle\alpha^n Q + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\alpha^{n-k} PQ + P \\ & = & \alpha^n Q + P \end{array}$$

q**5.a.** : $\forall i \in [\![1;+\infty[\![,\ P^i = P \ ;\ Q^i = Q$

q**5.a.** : $PQ = 0_2$

- **Si $n = 0$:**

$$\alpha^0 Q + P = Q + P = I_2 = \big(M(a)\big)^0$$

Par conséquent, l'expression obtenue est encore valable dans le cas $n = 0$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big(M(a)\big)^n = P + \alpha^n Q$.

✓ Rigueur !
Il est nécessaire de se placer dans le cas $n \geq 1$ pour utiliser la relation de Chasles. En effet, pour que les termes en $k = 0$ et $k = n$ existent et soient bien distincts, il faut que $n \geq 1$.
Dans le cas où $n = 1$, la somme "$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}$..." est une somme sur un ensemble vide, elle vaut donc 0 : aucun souci dans ce cas...

Petite remarque
On pouvait aussi commencer par calculer $M(a)^2$... Conjecturer le résultat, qui se démontre ensuite très facilement par récurrence !

5.d. Expliciter la matrice $\big(M(a)\big)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Découle immédiatement de la question précédente...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\big(M(a)\big)^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + (1-2a)^n & 1 - (1-2a)^n \\ 1 - (1-2a)^n & 1 + (1-2a)^n \end{pmatrix}$.

●●●○ Exercice 21 - Type concours

Considérons $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les réels λ de sorte que la matrice $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \big(A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible}\big) & \iff & \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ & \iff & \frac{1}{2}((5-2\lambda)^2 - 9) = 0 \\ & \iff & (5-2\lambda)^2 = 9 \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} 5 - 2\lambda & = & 3 \\ & \text{ou} & \\ 5 - 2\lambda & = & -3 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ \lambda & = & 4 \end{array} \right. \end{array}$$

Conclusion : la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible lorsque $\lambda \in \{1;4\}$.

✘ Attention !
Attention aux calculs... Au lieu d'écrire des fractions dans la matrice, je choisis d'écrire : $A - I_2 = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$...

2. Résoudre l'équation $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = X &\iff (A - I_2)X = 0_{2,1} \\ &\iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & 3y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff x + y = 0 \\ &\iff x = -y \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de l'équation $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, est $\left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \ / \ y \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner sa matrice inverse.

$\det(P) = 2 \neq 0$, donc la matrice P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera* D *la matrice obtenue.*

Sans difficulté, on trouve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Soient $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\Delta = P^{-1}MP$. Établir :

$$M^2 = A \iff \Delta^2 = D$$

D'après la question précédente, $D = P^{-1}AP$, d'où :

$$A = PDP^{-1}$$

De même, puisque $\Delta = P^{-1}MP$, on a :

$$M = P\Delta P^{-1}$$

On obtient alors les équivalences :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff (P\Delta P^{-1}) = PDP^{-1} \\ &\iff P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff \Delta^2 = D \end{aligned}$$

en multipliant P^{-1} par la gauche et P par la droite

6. **6.a.** Soit Δ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$. Démontrer que Δ et D commutent et en déduire que Δ est une matrice diagonale.

- Puisque $\Delta^2 = D$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta D &= \Delta\Delta^2 \\ &= \Delta^2\Delta \\ &= D\Delta \end{aligned}$$

> **Conclusion :** D et Δ commutent.

- Notons $\Delta = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. D'après ce qui précède, $\Delta D = D\Delta$. Or :

$$\begin{aligned} \Delta D = D\Delta &\iff \begin{pmatrix} x & 4y \\ z & 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 4z & 4t \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x \\ y & = & 4y \\ z & = & 4z \\ 4t & = & 4t \end{array} \right. \\ &\iff y = z = 0 \\ &\iff \Delta = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

> **Conclusion :** Δ est une matrice diagonale.

6.b. Résoudre finalement l'équation $\Delta^2 = D$, d'inconnue $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- On a démontré, dans la question précédente, que si $\Delta^2 = D$, alors Δ est diagonale.
- Résolvons donc l'équation $\Delta^2 = D$, d'inconnue $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

Notons $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Ainsi, Δ étant diagonale :

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Delta^2 = D &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & = & 1 \\ y^2 & = & 4 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ & \text{OU} & \\ x & = & -1 \end{array} \right. \\ \text{ET} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2 \\ & \text{OU} & \\ y & = & -2 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array} \right. \text{ OU } \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \end{array} \right. \text{ OU } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array} \right. \text{ OU } \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Conclusion : les matrices Δ vérifiant $\Delta^2 = D$ sont les matrices : $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$.

7. Déterminer toutes les solutions de l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après la question **5.** :

$$\begin{array}{rcll}
M^2 = A & \Longleftrightarrow & P^{-1}MP \in \{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ N^2 = D\} & \\
& \Longleftrightarrow & P^{-1}MP \in \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\right\} & \text{d'après la question précédente} \\
& \Longleftrightarrow & P^{-1}MP = \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \text{ ou } P^{-1}MP = \pm\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} & \\
& \Longleftrightarrow & M = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{pmatrix} \text{ ou } M = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix} &
\end{array}$$

Conclusion : les matrices M vérifiant $M^2 = A$ sont les matrices : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$, $\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}$ et $\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}$.

●○○○ Exercice 22 - Commutant

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix}a & b\\0 & a\end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$.

Soit $M = \begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a, sans difficulté :

$$AM = \begin{pmatrix}ax+bz & ay+bt\\az & at\end{pmatrix} \ ; \ MA = \begin{pmatrix}ax & bx+ay\\az & bz+at\end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcll}
M \in \mathcal{C}_A & \Longleftrightarrow & AM = MA & \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix}ax+bz & ay+bt\\az & at\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax & bx+ay\\az & bz+at\end{pmatrix} & \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} ax+bz & = & ax\\ ay+bt & = & bx+ay\\ az & = & az\\ at & = & bz+at\end{array}\right. & \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} bz & = & 0\\ bt & = & bx\end{array}\right. & b \neq 0 \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0\\ t & = & x\end{array}\right. & \\
& \Longleftrightarrow & M = \begin{pmatrix}x & y\\0 & x\end{pmatrix} &
\end{array}$$

Conclusion : $\mathcal{C}_A = \left\{\begin{pmatrix}x & y\\0 & x\end{pmatrix} \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

●●○○ Exercice 23 - Matrices nilpotentes...

Définition 1 - Matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est nilpotente lorsqu'il existe un entier k tel que $A^k = 0_n$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ sont nilpotentes. En déduire que la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas toujours nilpotente.
   - On vérifie aisément que ces deux matrices sont nilpotentes (elles sont non nulles et leur carré est nul).
   - Notons J la somme de ces deux matrices. $J = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. On trouve sans mal :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ J^{2k} = I_2 \ ; \ J^{2k+1} = J$$

   La matrice J n'est donc pas nilpotente.

   Conclusion : la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas toujours nilpotente.

2. On suppose désormais que A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent entre elles. Montrer alors que AB et A + B sont nilpotentes.
A et B sont nilpotentes ; elles sont donc non nulles et il existe $m, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^m = 0_n$ et $B^p = 0_n$.
   - Notons $k = \max(m, p)$. On a :

$$\begin{array}{rcll}
(AB)^k & = & A^k B^k & \text{car A et B commutent} \\
& = & 0_n \times 0_n & \text{car } A^m = 0_n,\ B^p = 0_n \text{ et } k \geq m, p \\
& = & 0_n &
\end{array}$$

   Conclusion : AB est nilpotente.

- Notons $k = m+p$. On a :

$$\begin{array}{rcll}
(A+B)^k & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}A^iB^{k-i} & \text{d'après la formule du binôme de Newton, puisque A et B commutent} \\
& = & \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\binom{k}{i}A^iB^{k-i} + \sum_{i=m+1}^{k}\binom{k}{i}A^iB^{k-i} & k = m+p \geq m+1 \text{ (car } p \in \mathbb{N}^*) \\
& = & \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\binom{k}{i}A^iB^{k-i} + \sum_{i=m+1}^{k}\binom{k}{i}0_nB^{k-i} & \text{car } A^m = 0_n, \text{ donc } \forall i \geq m,\ A^i = 0_n \\
& = & \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\binom{k}{i}A^iB^{k-i} & \\
& = & \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\binom{k}{i}A^i0_n & B^p = 0_n \text{ et, si } i \leq m, \text{ alors } k-i = m+p-i \geq p \text{ (d'où } B^{k-i} = 0_n) \\
& = & 0_n &
\end{array}$$

Conclusion : $A+B$ est nilpotente.

●●○○ Exercice 24 - Matrices symétriques et anti-symétriques

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **anti-symétrique** lorsque ${}^tA = -A$.

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
   - $M = A+B$,
   - A est symétrique,
   - B est anti-symétrique.

   Démontrer que $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

   On a :
$$M = A+B$$
   D'où, par linéarité de la transposition : ${}^tM = {}^tA + {}^tB$ Mais, A est symétrique et B anti-symétrique, d'où :
$${}^tM = A - B$$
   On a ainsi le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcr} M & = & A & + & B \\ {}^tM & = & A & - & B \end{array}\right.$. Or :
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & M \\ A & - & B & = & {}^tM \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & M \\ & - & 2B & = & {}^tM - M \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & \frac{1}{2}(M + {}^tM) \\ B & = & \frac{1}{2}(M - {}^tM) \end{array}\right.$$

   Conclusion : $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

2. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

   Dans la question précédente, on a démontré que si une telle décomposition existait, alors elle était unique et nécessairement de la forme obtenue.
   Montrons maintenant que cette décomposition existe toujours et qu'elle convient.
   Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
   - $A + B = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM) = M$
   - Par linéarité de la transposition :
$${}^tA = {}^t\left(\frac{1}{2}(M + {}^tM)\right) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = A$$
     Ainsi, A est symétrique.
   - De même :
$${}^tB = {}^t\left(\frac{1}{2}(M - {}^tM)\right) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -B$$
     Ainsi, B est anti-symétrique.

   Conclusion : toute matrice s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique ; et cette décomposition est celle obtenue à la question précédente, elle est donc unique.

> **Petite remarque**
> En fait, l'énoncé a guidé un raisonnement par analyse-synthèse. La question 1. est l'analyse ; et le travail de la question 2. consiste en la synthèse et la conclusion du raisonnement mené.

●●●○ Exercice 25 - Trace d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **trace de A**, notée tr(A), le nombre $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

> **Petite remarque**
> La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux...

1. Que valent $\mathrm{tr}(I_n)$ et $\mathrm{tr}(0_n)$?

   Conclusion : $\mathrm{tr}(I_n) = n$ et $\mathrm{tr}(0_n) = 0$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.a. Démontrer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On a ainsi :

$$\mathrm{tr}(A) = a + d \quad ; \quad \det(A) = ad - bc$$

Et :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + ac & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 &= \begin{pmatrix} a^2 + ac & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ba + bd \\ ca + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0_2 \end{aligned}$$

Conclusion : $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$.

2.b. Retrouver alors la caractérisation de l'inversibilité de A avec le déterminant.
On veut démontrer que A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.
Il s'agit de démontrer une équivalence, raisonnons pas double-implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\det(A) \neq 0$ et montrons que A est inversible.
D'après la question précédente :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$$

Mais comme $\det(A) \neq 0$, on obtient :

$$A \times \frac{-1}{\det(A)}\left(A - \mathrm{tr}(A)I_2\right) = I_2$$

Par conséquent, A est inversible (et on a même : $A^{-1} = \dfrac{-1}{\det(A)}\left(A - \mathrm{tr}(A)I_2\right) = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est inversible et montrons que $\det(A) \neq 0$.
Raisonnons pas l'absurde et supposons donc que $\det(A) = 0$.
On obtient alors, d'après la question précédente :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A = 0_2$$

D'où :

$$A^2 = \mathrm{tr}(A)A$$

Mais A est inversible, d'où, en multipliant par A^{-1} :

$$A = \mathrm{tr}(A)A^{-1}A = \mathrm{tr}(A)I_2$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$b = 0 \quad ; \quad c = 0 \quad ; a + d = a \quad a + d = d$$

D'où :

$$a = b = c = d = 0$$

Par conséquent, $A = 0_2$. Or 0_2 n'est pas inversible : absurde.
On a donc démontré que $\det(A) \neq 0$.

Conclusion : A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

3. Démontrer que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C = \lambda A + \mu B$.
Notons également $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $C = (c_{i,j})$.
Par définition de la multiplication scalaire et de l'addition matricielle, on a :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!],\ c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) &= \mathrm{tr}(C) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda a_{k,k} + \mu b_{k,k} && \text{par linéarité de la somme} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} + \mu \sum_{k=1}^{n} b_{k,k} \\ &= \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$.

4. Démontrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C = AB$ et $D = BA$.
Notons également $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $C = (c_{i,j})$ et $D = (d_{i,j})$.
Par définition de la multiplication matricielle, on a :

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \ ;\ d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= \mathrm{tr}(C) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_{k,k} \\ &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{m,k} b_{k,m} \end{aligned}$$

Également :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(BA) &= \mathrm{tr}(D) \\ &= \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} \\ &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{m,k} a_{k,m} \end{aligned}$$

Or, en permutant les deux sommes (et par commutativité de la multiplication sur les réels), on obtient :

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{m,k} a_{k,m} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{k,m} b_{m,k}$$

Les indices des sommes étant muets, on obtient finalement :

$$\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB)$$

Conclusion : pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

5. En déduire que l'équation $AB - BA = I_n$, d'inconnues $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n'a aucune solution.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.
Par conséquent :

$$\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(I_n)$$

Puis, par linéarité de la trace (question **3.**) et d'après la question **1.**, on obtient :

$$\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = n$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$0 = n$$

D'où l'absurdité.

Conclusion : l'équation $AB - BA = I_n$, d'inconnues $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n'a aucune solution.

●●●○ Exercice 26 - Produit de matrices stochastiques

Définition 2 - Matrice stochastique

On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Notons $C = AB$.

- C est bien une matrice carrée...
- On a, pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

  Or A et B sont stochastiques, donc leurs coefficients sont positifs.
  Par conséquent :

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!],\ c_{i,j} \geq 0$$

- Également, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} && \text{permutation des sommes} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} && \text{car B est stochastique} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} && \text{car A est stochastique} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Par conséquent , C est stochastique.

Conclusion : le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.