Exercices du chapitre 9
Matrices

●○○○ Exercice 1 - Écriture de matrices

1. Expliciter les matrices suivantes :
$$A = \left(i+j\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}} \quad ; \quad B = \left(i^j\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 4}}$$

2. Écrire de façon compacte les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

●○○○ Exercice 2 - Opérations sur les matrices

On considère les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si possible, calculer : $A+B$, $2A$, $-5D$, $A+C$, AB, AC, AD, A^2, C^2, D^2.

●○○○ Exercice 3 - Polynôme annulateur et inversibilité

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Notons $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $A^2 + A$. En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.
2. Notons $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Exprimer A^2 comme une combinaison linéaire de A et I_3. En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.
3. Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $A^3 - A^2 - A$. En déduire que A est inversible puis exprimer son inverse en fonction de A.
4. Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$. En déduire que A n'est pas inversible.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0_n$, $A \neq I_n$ et $A \neq 2I_n$.
   - 5.a. Factoriser le polynôme $X^2 - 3X + 2$.
   - 5.b. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $A - I_n$ et $A - 2I_n$ ne sont pas inversibles.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A - 2I_n)^3 = 0_n$.
   - 6.a. Justifier que $A - 2I_n$ n'est pas inversible.
   - 6.b. Démontrer que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

●●●○ Exercice 4 - Polynôme annulateur et inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$. Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

●○○○ Exercice 5 - Calcul d'inverse

Dans chaque cas, étudier l'inversibilité de la matrice M et, le cas échéant, déterminer son inverse.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
4. $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

9. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

●●○○ Exercice 6 - Inversibilité

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A est inversible. Montrer que B est inversible si, et seulement si, AB est inversible.

●●●● Exercice 7 - Algorithme du pivot de Gauss

Interpréter chaque opération élémentaire sur les lignes comme un produit matriciel.
Plus précisément :

- traduire l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ par une multiplication matricielle par la gauche ;
- traduire l'opération $L_i \longleftarrow aL_i$ (avec $a \neq 0$) par une multiplication matricielle par la gauche ;
- traduire l'opération $L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$ (avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$) par une multiplication matricielle par la gauche.

●●●● Exercice 8 - Réduites de Gauss d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **réduite de Gauss de A** toute matrice triangulaire obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A.
On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.

1. Démontrer que si A est inversible, alors toutes ses réduites de Gauss sont inversibles.
2. Démontrer que si une réduite de Gauss de A est inversible, alors A est inversible.
3. Que peut-on dire si A possède une réduite de Gauss non inversible ?

Les exercices 9 à 14 abordent chacun une méthode différente pour déterminer les puissances d'une matrice dans des cas particuliers. D'autres méthodes peuvent être utilisées ponctuellement dans des exercices, mais ce sont les pus courantes.

●●○○ Exercice 9 - Conjecture & récurrence...

Dans chaque cas, conjecturer une formule pour A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer cette conjecture par récurrence. L'expression trouvée est-elle encore valable quand $n = 0$?

1. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

●●○○ Exercice 10 - Par diagonalisation...

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera* D *la matrice obtenue.*
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

●●○○ Exercice 11 - Décomposition de la forme $\lambda I_n + N$, avec N nilpotente.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel λ et la matrice N de sorte que $A = \lambda I_3 + N$ et que N soit triangulaire avec des coefficients diagonaux nuls.
2. Calculer N^2, N^3 puis N^k pour tout $k \in [\![3;+\infty[\![$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

●●○○ Exercice 12 - Division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que le polynôme $X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer les racines de $X^2 - 3X + 2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet qu'il existe deux uniques polynômes $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ tels que $X^n = Q_n(X) \times (X^2 - 3X + 2) + R_n(X)$ avec $\deg(R_n) < \deg(X^2 - 3X + 2)$.
   - 3.a. Déterminer le polynôme $R_n(X)$.
   - 3.b. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

●●○○ Exercice 13 - A l'aide de suites...

Considérons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que toute puissance d'une matrice symétrique est encore une matrice symétrique.
2. Démontrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n), que l'on définira, telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = a_n + b_n$ et $d_n = a_n - b_n$. Déterminer les termes généraux des suites (s_n) et (d_n).
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

●●○○ Exercice 14 - A l'aide de suites...

Considérons $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis déterminer les deux réels x et y de sorte que $A^2 = xA + yI_3$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels x_n et y_n tels que $A^n = x_nA + y_nI_3$.
3. Donner les valeurs x_0, y_0, x_1 et y_1 puis établir : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n$.
4. En déduire les termes généraux des suites (x_n) et (y_n).
5. Conclure sur l'expression de A^n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

●●○○ Exercice 15 - Suites imbriquées...

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} u_{n+1} = -5u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 2v_n \end{cases}$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la matrice X_n en sortie.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
4. *Le but des questions ci-dessous est d'exprimer A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   - 4.a. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et donner P^{-1}.
   - 4.b. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera D la matrice obtenue.*
   - 4.c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire les termes généraux de (u_n) et (v_n).

●●●○ Exercice 16 - Suites imbriquées

Considérons les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ telles que : $a_0 = 1,\ b_0 = 2,\ c_0 = 7$ et pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

Déterminer les termes généraux des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

●○○○ Exercice 17 - Suite récurrente linéaire d'ordre 3...

Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \ ; \ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$. La suite de l'exercice consisterait à déterminer l'expression de A^n...

●○○○ Exercice 18 - Type concours

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - A$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_2.
3. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera* D *la matrice obtenue.*
5. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n. L'expression trouvée est-elle encore valable pour $n = -1$?

On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{2} \ ; \ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3 \end{cases}$$

7. Calculer u_2 et u_3.
8. Écrire une fonction `Python` prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant en sortie la valeur de u_n.

On pose $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

9.
   - **9.a.** Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $X_{n+1} = AX_n + B$.
   - **9.b.** Résoudre l'équation $AY + B = Y$, d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. *On notera* L *la matrice solution obtenue.*
   - **9.c.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$X_n = A^n(X_0 - L) + L$$

10. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}$$

●●○○ Exercice 19 - Type concours

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que P est inversible et déterminer son inverse.
3. Vérifier que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. *On notera* D *cette matrice diagonale.*
4. Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
5. On se propose de calculer les matrices X_n définies par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$$

   Écrire une fonction `Python` qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la matrice X_n en sortie.

6. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   - **6.a.** Calculer Y_0 et Y_1 ; puis montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.
   - **6.b.** Montrer alors que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$

     En déduire les termes généraux des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
   - **6.c.** Donner finalement la matrice X_n en fonction de n.

●●●○ Exercice 20 - Type concours

Pour tout réel a, on définit la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la ou les valeurs de c pour lesquelles $M(c) = I_2$.
2. Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $M(a)M(b) = M(a + b - 2ab)$.
3. On suppose $a \neq \frac{1}{2}$. Montrer alors que la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer en fonction de a le réel b tel que $M(b) = M(a)^{-1}$. La matrice $M(1/2)$ est-elle inversible ?
4. Déterminer l'unique réel non nul a_0 tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$.

5. On considère maintenant les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.
    - 5.a. Calculer P^2, PQ, QP et Q^2 *(on donnera les résultats en fonction des matrices* P *et* Q *ou de la matrice nulle).*
    - 5.b. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le réel α tel que $M(a) = P + \alpha Q$.
    - 5.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $\left(M(a)\right)^n$ en fonction de P, Q, α et n.
    - 5.d. Expliciter la matrice $\left(M(a)\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

●●●○ Exercice 21 - Type concours

Considérons $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les réels λ de sorte que la matrice $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.
2. Résoudre l'équation $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner sa matrice inverse.
4. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera* D *la matrice obtenue.*
5. Soient $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\Delta = P^{-1}MP$. Établir :
$$M^2 = A \iff \Delta^2 = D$$
6.
    - 6.a. Soit Δ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$. Démontrer que Δ et D commutent et en déduire que Δ est une matrice diagonale.
    - 6.b. Résoudre finalement l'équation $\Delta^2 = D$, d'inconnue $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Déterminer toutes les solutions de l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

●○○○ Exercice 22 - Commutant

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$.

●●○○ Exercice 23 - Matrices nilpotentes...

Définition 1 - Matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est nilpotente lorsqu'il existe un entier k tel que $A^k = 0_n$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes. En déduire que la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas toujours nilpotente.
2. On suppose désormais que A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent entre elles. Montrer alors que AB et $A+B$ sont nilpotentes.

●●○○ Exercice 24 - Matrices symétriques et anti-symétriques

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **anti-symétrique** lorsque ${}^tA = -A$.

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
    - $M = A + B$,
    - A est symétrique,
    - B est anti-symétrique.

    Démontrer que $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
2. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

●●●○ Exercice 25 - Trace d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **trace de A**, notée $\mathrm{tr}(A)$, le nombre $\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

1. Que valent $\mathrm{tr}(I_n)$ et $\mathrm{tr}(0_n)$?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
    - 2.a. Démontrer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$.
    - 2.b. Retrouver alors la caractérisation de l'inversibilité de A avec le déterminant.
3. Démontrer que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$.
4. Démontrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
5. En déduire que l'équation $AB - BA = I_n$, d'inconnues $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n'a aucune solution.

●●●○ Exercice 26 - Produit de matrices stochastiques

Définition 2 - Matrice stochastique

On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.