Les Chartreux

11

Applications

Introduction...

Alors que la notion de fonction est apparue au XVIIème siècle, celle d'application (même si les deux sont extrêmement proches) est arrivée en même temps que la théorie des ensembles, dans la deuxième moitié du XIXème siècle.
Ce chapitre fait donc suite au chapitre 7, qui posait les bases de la théorie des ensembles... Nous allons donc, dans le cadre général, donner des définitions et quelques propriétés sur les applications entre ensemble. Ces outils serviront ensuite essentiellement dans les cas suivants :

- cas où les ensembles de départ et d'arrivée de l'application sont des ensembles de réels $\longrightarrow$ c'est l'étude des fonctions menée depuis longtemps maintenant...
- cas où les ensembles de départ et d'arrivée seront des espaces vectoriels $\longrightarrow$ cela nous mènera à l'étude des applications linéaires.

Pour bien démarrer...

1 # Dans chaque cas, déterminer l'ensemble $\{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}^+\}$:

- $f : x \longmapsto \exp(x)$

- $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$

2 # Résoudre l'équation $\dfrac{2x}{x-1} = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3 # Résoudre l'équation $\dfrac{2x}{x-1} = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

4 # La composition de fonctions est-elle associative ? Commutative ?

I Vocabulaire sur les applications

Définitions 1 - Fonction et application

Soient E et F deux ensembles.

D1# Une **fonction** de E dans F est un procédé qui, à tout élément de E, associe *au plus* un élément dans F.

D2# Une **application** de E dans F est un procédé qui, à tout élément de E, associe *exactement* un élément dans F.

D3# E est l'**ensemble de départ** et F l'**ensemble d'arrivée**.

> **En gros...**
> Si certains éléments de E n'ont pas d'image par f : f est une fonction. Dans ce cas, le sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ des éléments de E qui ont une image, est appelé **ensemble de définition** de f. Et ainsi : $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow$ F est une application... Bref, si on donne une application inutile de se soucier de son ensemble de définition !

Exemples 1

E1 $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est une fonction car

E2 $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est une application car

E3 $f : \begin{array}{|ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est l'**application identité de E, notée id_E**

> **Petite remarque**
> L'amalgame a souvent été fait jusqu'à présent entre fonction et application...

Définition 2 - Image directe

Soient $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application et A un sous-ensemble de E.
L'**image directe de A**, notée $f(\mathrm{A})$, est l'ensemble $\{y \in \mathrm{F} \,/\, \exists x \in \mathrm{A} \,/\, y = f(x)\} = \{f(x),\ x \in \mathrm{A}\}$.

Exemples 2

E1 Considérons $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ et $\mathrm{A} = [3;4[$ et $\mathrm{B} = [-1;2]$. On a : $f(\mathrm{A}) =$ .... et $f(\mathrm{B}) =$ ....

E2 $\exp(\mathbb{R}) =$ .... ; $\ln([1;+\infty[) =$ ....

II Application surjective, injective et bijective

Définitions 3 - Surjection, injection, bijection

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

D1# f est **surjective** de E dans F lorsque *tout élément* de F admet *au moins un* antécédent dans E :

$$\forall y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{E} \,/\, y = f(x)$$

D2# f est **injective** de E dans F lorsque tout élément de F admet *au plus* un antécédent dans E ; autrement dit, si un élément de F a un antécédent, il n'en a qu'un seul :

$$\forall x, x' \in \mathrm{E},\ \big(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\big)$$

Par contraposée, f est injective lorsque deux antécédents différents fournissent des images différentes :

$$\forall x, x' \in \mathrm{E},\ \big(x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\big)$$

D3# f est **bijective** de E dans F lorsqu'elle est injective et surjective :

$$\forall y \in \mathrm{F},\ \exists! x \in \mathrm{E} \,/\, y = f(x)$$

D4# Si f est bijective, on note, pour tout $y \in \mathrm{F}$, $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f.
On définit ainsi l'**application réciproque** (ou **bijection réciproque**) par :

$$f^{-1} : \begin{array}{|ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

> ☞ **Pour info...**
> Les définitions quantifiées fournissent les méthodes de rédaction...

> **À retenir...**
> $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Propriétés 1

P1# Si f est une application bijective de E dans F, alors f^{-1} est bijective de F dans E.

P2# Si E et F sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et que f est bijective de E dans F, alors les courbes représentatives de f et f^{-1}, tracées dans un repère orthonormé, sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

> ✘ **Attention !**
> P2 est fausse si le repère n'est pas orthonormé !

★ Démonstration :

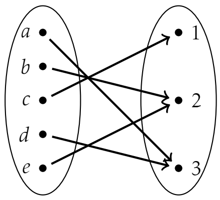
P1# Découle de la définition de bijection...

P2# Découle essentiellement du fait que $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$. Ainsi, si $(x, y) \in \mathcal{C}_f$, alors $(y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$... ★

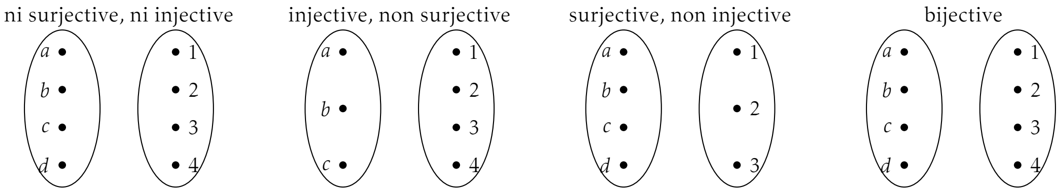
Exemples 3

E1 Toute application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est surjective de E dans $f(\mathrm{E})$.

E2 L'application $f : \{a; b; c; d; e\} \longrightarrow \{1; 2; 3\}$ définie par le schéma suivant est ....



E3 Définissons des applications (de la gauche vers la droite), via des flèches sur les schémas, afin qu'elles répondent aux critères donnés :



Précisons si les applications ci-dessous sont injectives, surjectives, bijectives de leur ensemble de départ dans leur ensemble d'arrivée.

> **Pour une fois...**
> Nous ne démontrerons pas ici les résultats énoncés... En revanche, nous nous entraine-rons sur des exercices.

E4 $f_4 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ ....

E5 $f_5 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ ....

E6 $f_6 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ ....

E7 $f_7 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ ....

E8 $f_8 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \right.$ ....

E9 $f_9 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array} \right.$ ....

E10 $f_{10} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right.$ ....

E11 $f_{11} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$ ....

E12 $f_{12} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ ....

E13 Reprenons les applications non bijectives ci-dessus et réduisons les ensembles d'arrivée et/ou de départ pour les rendre bijectives.

> **En gros...**
> On peut rendre f surjective en restreignant son ensemble d'arrivée ; et la rendre in-jective en restreignant son ensemble de départ !

> **♣ Méthode 1 ♣ Pour démontrer que f est bijective de E dans F et déterminer f^{-1} :**
> Résoudre, pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$.
> On trouvera alors $x = f^{-1}(y)$.

> **★Subtile...★**
> Cette méthode permet éga-lement de démontrer qu'une application est bijective d'un sous-ensemble de E dans un sous-ensemble de F qui seront déterminés pendant la résolu-tion...

Exemples 4

E1 Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. **Démontrons que f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et déterminons l'expression de f^{-1}.**

E2 Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. **Démontrons que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans un ensemble à déterminer, puis déterminons l'expression de f^{-1}.**

Pour terminer, trois propriétés classiques et parfois utiles :

Propriétés 2

Soient $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ deux applications.

P1# Si f est bijective de E dans F, alors : $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$; $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$

P2# f est bijective de E dans F si, et seulement si, il existe une application $\widetilde{f} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $\widetilde{f} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ ET $f \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.
Dans ce cas, l'application $\widetilde{f}$ est unique et donc égale à f^{-1}.

P3# Si f est bijective de E dans F et g bijective de F dans G, alors $g \circ f$ est bijective de E dans G et :

$$\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

✘ Attention !

Il faut vérifier les deux composées !!
En effet, si on considère $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$, on a bien $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}$ et pourtant $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$!

Démonstration :

P1# Supposons que f est bijective.

- Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons $y = f(x)$. On a ainsi :
$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(y)$$
Mais comme f est bijective, $f^{-1}(y) = x$, et ainsi :
$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$$
Autrement dit :
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$$
- Soit $y \in \mathrm{F}$. Puisque f est bijective de E dans F, il existe alors un unique $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$, c'est à dire tel que $x = f^{-1}(y)$. Ainsi :
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f(x) = y$$
Autrement dit : $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$

P2# En deux temps :

- L'équivalence, par double-implication :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si f est bijective de E dans F, alors l'application $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ convient d'après P1.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe une application $\widetilde{f} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $\widetilde{f} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ ET $f \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.

⇝ Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in \mathrm{E}$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons alors que $x = x'$.
Puisque $f(x) = f(x')$, en appliquant la fonction $\widetilde{f}$, on obtient :
$$\left(\widetilde{f} \circ f\right)(x) = \left(\widetilde{f} \circ f\right)(x')$$
Mais $\widetilde{f} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, d'où :
$$x = x'$$
Par conséquent, f est injective.

⇝ Montrons que f est surjective. Soit $y \in \mathrm{F}$. Montrons qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$.
Puisque $y \in \mathrm{F}$, $\widetilde{f}(y) \in \mathrm{E}$. Posons alors $x = \widetilde{f}(y)$ et vérifions que ce x convient :
$$f(x) = \left(f \circ \widetilde{f}\right)(y)$$
Mais $f \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$, d'où :
$$f(x) = y$$
Par conséquent, f est surjective.

Conclusion : f est bijective.

> **Petite remarque**
> Pour l'injectivité, on a seulement utilisé $\widetilde{f} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$...

> **Petite remarque**
> Pour la surjectivité, on a seulement utilisé $f \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$...

- Montrons maintenant l'unicité de $\widetilde{f}$.
Supposons qu'il existe deux applications $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$, de F dans E, telles que $\widetilde{f_1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ ET $f \circ \widetilde{f_1} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$ ainsi que $\widetilde{f_2} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ ET $f \circ \widetilde{f_2} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.
On a ainsi :
$$f \circ \widetilde{f_1} = f \circ \widetilde{f_2}$$
En composant par $\widetilde{f_1}$, on obtient :
$$\widetilde{f_1} \circ f \circ \widetilde{f_1} = \widetilde{f_1} \circ f \circ \widetilde{f_2}$$
Et comme $\widetilde{f_1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, il reste :
$$\mathrm{id}_{\mathrm{E}} \circ \widetilde{f_1} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \circ \widetilde{f_2}$$
C'est à dire
$$\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$$
Ce qui prouve l'unicité de $\widetilde{f}$; et comme on sait déjà que f^{-1} convient...

P3# Supposons que f est bijective de E dans F et que g est bijective de F dans G. Les applications f^{-1} et g^{-1} sont ainsi bien définies et :
$$\left(g \circ f\right) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g \underset{\mathrm{P1}}{=} g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{F}} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \underset{\mathrm{P1}}{=} \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$$
De même, on obtient :
$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ \left(g \circ f\right) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$$
Conclusion : d'après P2, l'application $g \circ f$ est bijective de E dans G et $\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exemples 5

E1 On retrouve : $\exp \circ \ln = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$ et $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

E2 Considérons l'application f définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x + 2$ et l'application g définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = -1 + \sqrt{x-1}$. **Déterminons $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?**