Exercices du chapitre 11
Applications...

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Image directe

Dans chaque cas, déterminer $f(A)$.

1. $f : x \longmapsto x^2 + 1$, $A = [0;1]$
   $f(A) = [1;2]$.
2. $f : x \longmapsto x^2 + 1$, $A = [-3;2]$
   $f(A) = [1;10]$.
3. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$, $A = \mathbb{R}^+$
   On démontre sans mal que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   Ainsi : $f(\mathbb{R}^+) = [f(0); \lim\limits_{+\infty} f[= [0;1[$.
4. $f : x \longmapsto xe^{-x}$, $A = \mathbb{R}$
   Après étude des variations de f, on obtient : $f(\mathbb{R}) =]-\infty; e^{-1}]$.

Petite remarque — Pour s'aider à comprendre le résultat de cette question, on peut tout simplement représenter l'allure de la courbe de f sur $[-3;2]$...

●●○○ Exercice 2 - Bijection et bijection réciproque

Dans chaque cas, montrer que f est bijective de son ensemble de départ dans un ensemble à déterminer, puis donner l'expression de sa bijection réciproque.

Dans chaque cas, commençons par déterminer l'image directe de l'ensemble de départ par la fonction. En faisant cela, nous évitons les disjonctions de cas dans la résolution de $y = f(x)$.
En effet, si $y \in f(E)$, alors par définition y possède un antécédent...

☞ Rappel... — Une application $f : E \longrightarrow F$ est, par définition de $f(E)$, surjective de E dans $f(E)$.

1. $$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{1+x^2} \end{array}\right.$$

- Posons $u : x \longmapsto x^2$ et $v : x \longmapsto 1 + x^2$, définies sur $\mathbb{R}^+$, de sorte que $f = \dfrac{u}{v}$.
  Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :
  $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(1+x^2) - 2x \times x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$
  D'où :(les limites étant obtenues directement par opération) :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $+$	
f	0 ↗	1

- Par conséquent :
  $$f(\mathbb{R}^+) = [0;1[$$
- Montrons donc que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0;1[$ et déterminons l'expression de sa bijection réciproque.
  Soit $y \in [0;1[$. Résolvons l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$.
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :
  $$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x^2}{1+x^2} = y \\ &\iff x^2 = y + yx^2 && \text{car } 1+x^2 \neq 0 \\ &\iff x^2(1-y) = y && y \in [0;1[, \text{ donc } 1-y \neq 0 \\ &\iff x^2 = \frac{y}{1-y} && y \in [0;1[, \text{ donc } \frac{y}{1-y} \geq 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\dfrac{y}{1-y}} \end{array}\right. && x \in \mathbb{R}^+ \\ &\iff x = \sqrt{\frac{y}{1-y}} \end{aligned}$$

Conclusion : f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0;1[$ et :
$$f^{-1} : \left|\begin{array}{ccc} [0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{y}{1-y}} \end{array}\right.$$

Pourquoi ? — On a trouvé, à tout $y \in [0;1[$, un et un seul antécédent dans $\mathbb{R}^+$ par f. C'est la définition même d'être bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0;1[$...

2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+2}{e^{-x}} \end{array} \right.$

- Remarquons que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x(e^x+2) = e^{2x} + 2e^x$$
La fonction f est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$f'(x) = 2e^{2x} + 2e^x$$
D'où (les limites étant obtenues directement par opération) :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$0 \nearrow$	$+\infty$

- Par conséquent :
$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_*^+$$
- Montrons donc que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$ et déterminons l'expression de sa bijection réciproque.
Soit $y \in \mathbb{R}_*^+$. Résolvons l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}
f(x) = y &\iff e^{2x} + 2e^x = y \\
&\iff (e^x)^2 + 2e^x - y = 0 \\
&\iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 + 2X - y = 0 \end{cases} & \quad y \in \mathbb{R}^+\text{, donc } 4+4y > 0 \\
&\iff \begin{cases} X = e^x \\ X = \dfrac{-2+\sqrt{4+4y}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \dfrac{-2-\sqrt{4+4y}}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = e^x \\ X = -1+\sqrt{1+y} \quad \text{ou} \quad X = -1-\sqrt{1+y} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} e^x = -1+\sqrt{1+y} \\ \text{ou } e^x = -1-\sqrt{1+y} \end{cases} & \quad -1-\sqrt{1+y} < 0 \text{ et, puisque } y > 0,\ -1+\sqrt{1+y} > 0 \\
&\iff e^x = -1+\sqrt{1+y} \\
&\iff x = \ln(-1+\sqrt{1+y})
\end{aligned}$$

Conclusion : f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$ et :
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln(-1+\sqrt{1+y}) \end{array} \right.$$

Pourquoi ?
On a trouvé, à tout $y \in \mathbb{R}_*^+$, un et un seul antécédent dans $\mathbb{R}$ par f. C'est la définition même d'être bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$...

3. $f : \left| \begin{array}{ccc} [-2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+4x+1 \end{array} \right.$

- La fonction f est polynomiale, elle est donc dérivable sur $[2;+\infty[$.
- Soit $x \in [-2;+\infty[$. On a :
$$f'(x) = 2x+4$$
D'où : (les limites étant obtenues directement par opération) :

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-3 \nearrow$	$+\infty$

- Par conséquent :
$$f([-2;+\infty[) = [-3;+\infty[$$
- Montrons donc que f est bijective de $[-2;+\infty[$ dans $[-3;+\infty[$ et déterminons l'expression de sa bijection réciproque.
Soit $y \in [-3;+\infty[$. Résolvons l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [-2;+\infty[$.
Soit $x \in [-2;+\infty[$. On a :
$$\begin{aligned}
f(x) = y &\iff x^2+4x+1 = y \\
&\iff x^2+4x+1-y = 0 & \quad y \geq -3\text{, donc } 12+4y \geq 0 \\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{-4+\sqrt{12+4y}}{2} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-4-\sqrt{12+4y}}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -2+\sqrt{3+y} \\ \text{ou} \\ x = -2-\sqrt{3+y} \end{cases}
\end{aligned}$$
  - Si $y = -3$, les deux solutions trouvées sont égales, et dans ce cas, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution sur $[-2;+\infty[$: -2.
  - Si $y > -3$, alors $-2-\sqrt{3+y} < -2$ et $-2+\sqrt{3+y} > -2$.
  Dans ce cas, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution sur $[-2;+\infty[$: $-2+\sqrt{3+y}$.

Par conséquent, dans les deux cas, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution sur $[-2;+\infty[$: $-2+\sqrt{3+y}$.

Conclusion : f est bijective de $[-2;+\infty[$ dans $[-3;+\infty[$ et :
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} [-3;+\infty[& \longrightarrow & [-2;+\infty[\\ y & \longmapsto & -2+\sqrt{3+y} \end{array} \right.$$

Pourquoi ?
On a trouvé, à tout $y \in [-3;+\infty[$, un et un seul antécédent dans $[-2;+\infty[$ par f. C'est la définition même d'être bijective de $[-2;+\infty[$ dans $[-3;+\infty[$...

4. $f: \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

D'où : (les limites étant obtenues directement par opération) :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

- Par conséquent :

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

- Montrons donc que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminons l'expression de sa bijection réciproque.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) = y \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\
& \Longleftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 2y \\
& \Longleftrightarrow \quad e^x - \frac{1}{e^x} = 2y \\
\text{Réflexe !} \quad & \Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 1 - 2ye^x = 0 && \text{car } e^x \neq 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2yX - 1 = 0 \end{cases} && 4y^2 + 4 > 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X = e^x \\ X = \dfrac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \dfrac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X = e^x \\ X = y + \sqrt{y^2+1} \quad \text{ou} \quad X = y - \sqrt{y^2+1} \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\ \text{ou } e^x = y - \sqrt{y^2+1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Or, on a :

$$y^2 + 1 > y^2$$

D'où, par stricte croissance de $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{y^2+1} > |y|$$

Autrement dit :

$$-\sqrt{y^2+1} < y < \sqrt{y^2+1}$$

Et ainsi :

$$y + \sqrt{y^2+1} > 0$$

alors que :

$$y - \sqrt{y^2+1} < 0$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(x) = y \quad & \Longleftrightarrow \quad e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\
& \Longleftrightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$f^{-1}: \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \end{array}$$

✘ Attention !
$\forall z \in \mathbb{R},\ \sqrt{z^2} = |z|$

Pourquoi ?
On a trouvé, à tout $y \in \mathbb{R}$, un et un seul antécédent dans $\mathbb{R}$ par f. C'est la définition même d'être bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$...

☞ Pour info...
La fonction f est impaire... c'est donc également le cas de f^{-1} ; même si c'est moins trivialement le cas ! Bon exercice que de le démontrer d'ailleurs.

●●○○ Exercice 3 - Sur d'autres ensembles...

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives de leur ensemble de départ dans leur ensemble d'arrivée ?

1. $f: \begin{array}{|ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$

- f n'est pas surjective, car 0 ne possède pas d'antécédent par f.
- Montrons que f est injective.
Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(n) = f(m)$.
Ainsi :

$$n + 1 = m + 1$$

D'où :

$$n = m$$

Ce qui prouve l'injectivité de f.

2. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}\right.$

Montrons que f est bijective.
Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} m = f(n) & \iff m = n+1 \\ & \iff n = m-1 \end{aligned}$$

> **Conclusion :** f est bijective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ et $f^{-1} : m \longmapsto m-1$.

3. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x,x) \end{array}\right.$

- f n'est pas surjective, car $(1,2)$ n'a pas d'antécédent par f.
- Montrons que f est injective.
  Soient $x, x' \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(x) = f(x')$.
  Ainsi :
  $$(x,x) = (x',x')$$
  D'où :
  $$x = x'$$
  Ce qui prouve l'injectivité de f.

4. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}\right.$

- f n'est pas injective, car $(0,0) \neq (1,-1)$ et pourtant $f(0,0) = f(1,-1)$.
- Montrons f est surjective.
  Soit $z \in \mathbb{R}$. Remarquons que $f(z,0) = z$.
  Par conséquent, $(z,0)$ est un antécédent de z.
  Ce qui prouve la surjectivité de f.

5. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}\right.$

Montrons que f est bijective.
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} (a,b) = f(x,y) & \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & - & y & = & b \end{array}\right. \\ & \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{2}(a+b) \\ y & = & \frac{1}{2}(a-b) \end{array}\right. \end{aligned}$$

> **Conclusion :** f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et : $f^{-1}(a,b) \longmapsto \left(\frac{1}{2}(a+b); \frac{1}{2}(a-b)\right)$.

6. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}\right.$

- f n'est pas injective, car $(1,0) \neq (0,1)$ et pourtant $f(1,0) = f(0,1)$.
- Montrons que $(1,1)$ n'a pas d'antécédent par f.
  Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $f(x,y) = (1,1)$, alors $x+y = 1$ et $xy = 1$.
  Ainsi, x et y sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{R}$.
  Or cette équation ne possède aucune solution réelle.
  Par conséquent, $(1,1)$ n'a pas d'antécédent par f et ainsi, f n'est pas surjective.

> ☞ **Rappel...**
> Si x et y sont deux réels tels que $S = x+y$ et $P = xy$, alors x et y sont les solutions de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$.
> Pour le justifier, on remarque déjà la symétrie des rôles de x et y, puis on part de $y = S - x$ que l'on injecte dans $P = xy$...

7. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}\right.$

Remarquons que pour toute partie A de E, on a :

$$f \circ f(A) = A$$

> **Conclusion :** f est bijective et $f^{-1} = f$.

●○○○ Exercice 4 - Vrai ou faux

1. La composée de deux injections est une injection.

VRAI
Soient E, F, G trois ensembles ainsi que $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux injections.
Montrons que $g \circ f : E \longrightarrow G$ est injective.
Soient $x, x' \in E$. Supposons que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Autrement dit, on a :

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$$

Mais, g étant injective de F dans G, on obtient :

$$f(x) = f(x')$$

Et, puisque f est injective de E dans F, on a finalement :

$$x = x'$$

Par conséquent : $g \circ f$ est injective.

2. la composée de deux surjections est une surjection.
VRAI
Soient E, F, G trois ensembles ainsi que $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux surjections.
Montrons que $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective.
Soit $y \in G$. Puisque g est surjective de F dans G, il existe un $x \in F$ tel que $y = g(x)$.
Mais, $x \in F$ et f est surjective de E dans F. Ainsi, il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$.
On obtient finalement :
$$y = g \circ f(z)$$
Par conséquent : $g \circ f$ est surjective.

3. La somme de deux bijections est une bijection.
FAUX
En effet, les applications $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ sont toutes deux bijectives et pourtant, leur somme, qui est la fonction constante égale à 0, n'est pas bijective.

●○○○ Exercice 5 - Bijection & cardinal

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application. Comparer les cardinaux de E et F dans les cas suivants :

1. f injective,
Démontrons alors que $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.
Puisque f est une application, chaque élément de E possède une image ; et puisque f est injective, chaque élément de E fournit une image différente dans F.
Par conséquent, il est impossible d'avoir $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$.

Conclusion : $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.

2. f surjective,
Démontrons alors que $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.
Puisque f est une surjective, chaque élément de F possède au moins un antécédent dans E. Les éléments de E ne pouvant chacun avoir plus d'une image, on obtient nécessairement $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.

Conclusion : $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.

3. f bijective.
Puisque f est bijective, elle est en particulier surjective et injective.
D'après les questions précédentes, on a ainsi :
$$\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$$
et
$$\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$$

Conclusion : $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

☞ Pour info...
On a même : si Card(E) = Card(F), alors il existe une bijection de E dans F.

●●●○ Exercice 6 - Nombre de bijections

Soit E un ensemble fini de cardinal n, avec $n \geq 1$. Combien existe-t-il de bijections de E dans lui-même ?
Notons $e_1, e_2, ..., e_n$ les éléments de E.
Créer une bijection de E dans E équivaut à :

- associer à e_1 un élément de E : il y a n choix,
- associer à e_2 un élément de E autre que celui déjà associé à e_1 : il y a $n-1$ choix,
- ...
- associer à e_n un élément de E : il n'en reste qu'un.

Conclusion : il y a $n!$ bijections différentes de E dans lui-même.

●●○○ Exercice 7

Soient E, F, G, trois ensembles ainsi que $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer que :

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective.
Soient x, x'. Supposons $f(x) = f(x')$.
En appliquant g, on obtient :
$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$$
Autrement dit :
$$g \circ f(x) = g \circ f(x')$$
Mais comme $g \circ f$ est injective, on a :
$$x = x'$$

Conclusion : f est injective.

2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective.
Soit $y \in G$.
Puisque $g \circ f$ est surjective de E dans G, il existe alors $x \in E$ tel que
$$y = g \circ f(x)$$
Pour un tel x, posons alors $z = f(x)$. On a ainsi :
$$z \in F \ ; \ y = g(z)$$

Conclusion : g est surjective

●●●○ Exercice 8

Soient E et F deux ensembles ainsi que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
Montrer que f est bijective. En déduire que g l'est aussi.

- Montrons que f est bijective.
  - ◇ Montrons que f est injective.
    Soient $x, x' \in \mathrm{E}$. Supposons que $f(x) = f(x')$.
    En appliquant $f \circ g$, on obtient :
    $$f \circ g \circ f(x) = f \circ g \circ f(x')$$
    Mais comme $f \circ g \circ f$ est bijective, elle est en particulier injective, et ainsi :
    $$x = x'$$
    Conclusion : f est injective.
  - ◇ Montrons que f est surjective.
    Soit $y \in \mathrm{F}$. Puisque $f \circ g \circ f$ est bijective de E dans F, elle est en particulier surjective.
    Par conséquent, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que :
    $$y = f \circ g \circ f(x)$$
    Pour un tel x, posons $z = g \circ f(x)$. Ainsi :
    $$z \in \mathrm{E} \;\; ; \;\; y = f(z)$$
    Conclusion : f est surjective.

  Conclusion : f est bijective.

- Notons $h = f \circ g \circ f$.
  On a démontré que f est bijective ; sa bijection réciproque $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ est ainsi bien définie et, on a ainsi :
  $$g = f^{-1} \circ h \circ f^{-1}$$
  Mais h est bijective et f^{-1} également. Par conséquent, g est une composée de bijections, elle est donc bijective.

  Conclusion : g est bijective de F dans E.

●●●○ Exercice 9

Soient E un ensemble ainsi que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective de E dans E.
Raisonnons par double-implication...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f est surjective et montrons qu'elle est injective.
Soient $x, x' \in \mathrm{E}$. Supposons que $f(x) = f(x')$.
Puisque f est surjective de E dans E, il existe $z, z' \in \mathrm{E}$ tels que $x = f(z)$ et $x' = f(z')$.
Pour de tels z, z', on a ainsi, en appliquant f :
$$f \circ f(z) = f(x) = f(x') = f \circ f(z)$$
Puis, en appliquant à nouveau f :
$$f \circ f \circ f(z) = f \circ f \circ f(z')$$
Mais $f \circ f \circ f = f$... D'où :
$$f(z) = f(z')$$
Autrement dit :
$$x = x'$$

Conclusion : f est injective.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f est injective et montrons qu'elle est surjective.
Soit $y \in \mathrm{E}$. Puisque $f \circ f \circ f = f$, on a :
$$f\big(f \circ f(y)\big) = f(y)$$
Mais f est injective. D'où :
$$f \circ f(y) = y$$
En posant $x = f(y)$, on a ainsi :
$$x \in \mathrm{E} \;\; ; \;\; f(x) = y$$

Conclusion : f est surjective.

●●●○ Exercice 10 - Injectivité et image directe

Soient E et F deux ensembles, ainsi qu'une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$.

1. Montrer que pour toutes parties $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on a $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.
   Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$.
   Soient $y \in f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. Montrons que $y \in f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.
   Puisque $y \in f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, il existe $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ tel que $y = f(x)$.
   Mais, pour un tel x, puisque $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, on a :
   $$x \in \mathrm{A} \quad \text{ET} \quad x \in \mathrm{B}$$
   D'où :
   $$x \in \mathrm{A} \;\; ; \;\; y = f(x) \quad \text{ET} \quad x \in \mathrm{B} \;\; ; \;\; y = f(x)$$
   Par conséquent :
   $$y \in f(\mathrm{A}) \quad \text{ET} \quad y \in f(\mathrm{B})$$
   D'où :
   $$y \in f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$$

   Conclusion : pour toutes parties $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on a $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.

2. Établir :

$$\big(f \text{ est injective}\big) \iff \big(\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\big)$$

Raisonnons pas double-implication...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons : "$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$". Montrons que f est injective.
Soient $x, x' \in E$. Supposons $f(x) = f(x')$.
Mais $f(x)$ est le seul élément de l'ensemble $f(\{x\})$ et $f(x')$ est le seul élément de l'ensemble $f(\{x'\})$. D'où :

$$f(\{x\}) = f(\{x'\})$$

Et comme $\{x\}, \{x'\} \in \mathcal{P}(E)$, par hypothèse, on obtient :

$$\{x\} = \{x'\}$$

Autrement dit :

$$x = x'$$

Conclusion : f est injective.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f est injective. Montrons : "$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$".
Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Pour montrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, raisonnons par double-inclusion.

$\boxed{\subset}$ Démontrée dans la question **1.**.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Ainsi :

$$y \in f(A) \quad \text{ET} \quad y \in f(B)$$

Par conséquent, il existe $x_A \in A$ et $x_B \in B$ tels que

$$y = f(x_A) \quad \text{ET} \quad y = f(x_B)$$

D'où :

$$f(x_A) = f(x_B)$$

Or f est injective. On obtient alors :

$$x_A = x_B$$

Notons $x = x_A = x_B$. On a finalement :

$$x \in A \cap B \ ; \ y = f(x)$$

Par conséquent :

$$y \in f(A \cap B)$$

Conclusion : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Conclusion : $\big(f \text{ est injective}\big) \iff \big(\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\big)$

●●●○ Exercice 11 - Ensembles dénombrables

Définition 1

Un ensemble E est **dénombrable** lorsqu'il existe une bijection de E dans $\mathbb{N}$.

On admet qu'il existe une injection d'un ensemble E dans $\mathbb{N}$, si, et seulement si, E est fini ou dénombrable. Un tel ensemble est dit ***au plus dénombrable****.*

En gros...
Un ensemble est dénombrable lorsque l'on peut compter ses éléments; autrement dit, les indexer comme les termes d'une suite...

1. Donner un ensemble qui soit au plus dénombrable, mais pas dénombrable; ainsi qu'un ensemble qui soit dénombrable mais pas au plus dénombrable.
   - $\{1;2\}$ est fini, donc au plus dénombrable, mais pas dénombrable.
   - $\mathbb{N}$ est en bijection avec lui-même (via l'identité) : il est dénombrable et infini, donc dénombrable mais pas au plus dénombrable.
2. Démontrer que l'ensemble des naturels pairs est dénombrable.
   Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des naturels pairs et définissons l'application :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}\right.$$

   Cette application f est clairement bijective...

   Conclusion : l'ensemble des naturels pairs est dénombrable.

Utile...
Dans la suite, pour montrer qu'un ensemble E est dénombrable, on pourra, au choix :
• trouver une bijection de E dans $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}$ dans E);
• trouver une injection de E dans $\mathbb{N}$ et justifier que E n'est pas fini.

3. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0\}$ est dénombrable.
   Considérons l'application :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n, 0) & \longmapsto & n \end{array}\right.$$

   Cette application est clairement bijective...

   Conclusion : l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0\}$ est dénombrable.

4. En considérant l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (m, n) & \longmapsto & 2^m 3^n \end{array}\right.$, démontrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
   Puisque $\mathbb{N}^2$ n'est pas fini, pour démontrer qu'il est dénombrable, il suffit de montrer que l'application proposée est injective.
   Soient $(m, n), (m', n') \in \mathbb{N}^2$. Supposons $f(m, n) = f(m', n')$. Ainsi :

$$2^m 3^n = 2^{m'} 3^{n'}$$

   D'où :

$$2^{m-m'} = 3^{n'-n}$$

   Or, le seul entier qui est à la fois une puissance de 2 et une puissance de 3 est 1. D'où :

$$m - m' = 0 \ ; \ n' - n = 0$$

Ainsi :

$$(m,n) = (m',n')$$

Par conséquent, f est injective.

Conclusion : $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

5. **En déduire que si E et F sont deux ensembles dénombrables, alors $E \times F$ l'est encore.**

Soient E et F deux ensembles dénombrables. *Commençons par démontrer qu'il existe une bijection de* $E \times F$ *dans* $\mathbb{N}^2$. *La question précédente nous permettra alors de conclure...*
Puisque E et F sont dénombrable, il existe deux bijections $g : E \longrightarrow \mathbb{N}$ et $h : \longrightarrow \mathbb{N}$.
Considérons maintenant l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (g(a),h(b)) \end{array} \right.$$

- En manipulant les définitions, on démontre aisément que φ est bijective...
- Reprenons f l'application de la question précédente... L'application $f \circ \varphi$ est alors la composée de deux bijections, elle est donc bijective, de $E \times F$, dans $\mathbb{N}$.

Conclusion : si E et F sont deux ensembles dénombrables, alors $E \times F$ l'est encore.

6. **En considérant l'application** $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{array} \right.$ **, démontrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.**

Commençons par remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $f(n) \geq 0 \iff n \geq 0$.
Puisque $\mathbb{Z}$ n'est pas fini, pour démontrer qu'il est dénombrable, il suffit de montrer que l'application proposée est injective.
Soient $n, n' \in \mathbb{Z}$. Supposons que $f(n) = f(n')$. Puisque $f(n) = f(n')$, les nombres $f(n)$ $f(n')$ sont nécessairement de même signe.

- **Premier cas : si $f(n)$ et $f(n')$ sont positifs ou nuls.**
  D'après la remarque initiale, on a ainsi $n, n' \geq 0$, et donc, l'égalité $f(n) = f(n')$ donne :
  $$2n = 2n'$$
  D'où
  $$n = n'$$
- **Deuxième cas : si $f(n)$ et $f(n')$ sont strictement négatifs.**
  D'après la remarque initiale, on a ainsi $n, n' < 0$, et donc, l'égalité $f(n) = f(n')$ donne :
  $$-2n-1 = -2n'-1$$
  D'où
  $$n = n'$$

Dans tous les cas, on a obtenu :

$$n = n'$$

.

Par conséquent, f est injective.

Conclusion : $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

7. **7.a. Justifier que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.**

Puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas finir, pour démontrer qu'il est dénombrable, il suffit de trouver une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

☞ **Rappel...** $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \ / \ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$.

Pour cela, considérons alors l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ \dfrac{m}{n} & \longmapsto & (m,n) \end{array} \right.$$

- L'application φ est évidemment injective... Mais on sait, d'après les questions précédentes, que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables. Ainsi, d'après la question **5.**, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ l'est également. Notons donc ψ une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$.

Par conséquent, l'application $\psi \circ \varphi$ est une composée de deux injections, elle est donc injective, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

Conclusion : $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

7.b. Démontrer que $\mathbb{Q}_*^+$ n'a pas de plus petit élément ; puis en déduire qu'il n'existe pas de suite croissante (q_n) de rationnels, tels que $\mathbb{Q}_*^+ = \{q_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

- Par l'absurde, supposons que $\mathbb{Q}_*^+$ possède un plus petit élément, noté a.
  Puisque $a > 0$, on obtient : $a > \dfrac{a}{2} > 0$. Mais, $a \in \mathbb{Q}$, donc il existe $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $a = \dfrac{m}{n}$.
  Ainsi : $\dfrac{a}{2} = \dfrac{m}{2n} \in \mathbb{Q}$...
  On a obtenu :
  $$a > \frac{a}{2} > 0 \ ; \ \frac{a}{2} \in \mathbb{Q}$$
  Par conséquent, $\dfrac{a}{2}$ est un élément de $\mathbb{Q}_*^+$, strictement plus petit que a : absurde !

  Conclusion : $\mathbb{Q}_*^+$ n'a pas de plus petit élément.
- Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite croissante (q_n) de rationnels, tels que $\mathbb{Q}_*^+ = \{q_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.
  Puisqu'une suite croissante est minorée par son premier terme, q_0 serait le plus petit élément de $\mathbb{Q}_*^+$... Ce qui contredit le point précédent.

  Conclusion : il n'existe pas de suite croissante (q_n) de rationnels, tels que $\mathbb{Q}_*^+ = \{q_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

8. **8.a.** Donner une bijection de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction $f x \longmapsto \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$, définie sur $]0;1[$, convient...

8.b. $\mathbb{R}$ est-il dénombrable ?

Par l'absurde, supposons que $\mathbb{R}$ est dénombrable.
Puisqu'il existe une bijection de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $]0;1[$ est également dénombrable. Notons alors $x_1, x_2, \ldots$ les éléments de $]0;1[$ et considérons les écritures décimales (éventuellement) infinies de ces réels.
Définissons maintenant a le réel de $]0;1[$ par : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la k-ième décimale de a est

- soit 7 si la i-ième décimale de x_i est différente de 7,
- soit 0 si la i-ième décimale de x_i est égale à 7

De cette façon, le réel a est bien dans $]0;1[$ mais également :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a \neq x_k$$

Ce qui contredit le fait que $]0;1[= \{x_k \ / \ k \in \mathbb{N}\}$.

Conclusion : $]0;1[$ n'est pas dénombrable, et $\mathbb{R}$ non-plus.

Pourquoi ?
$\mathbb{R}$ est dénombrable, il existe donc une bijection $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$. Mais alors, la fonction $\varphi \circ f$ (où f est la bijection exhibée à la question 8.a. est bijective, de $]0;1[$ dans $\mathbb{N}$...

★Subtile...★
Cette construction garantit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la k-ième décimale de a est différente de la k-ième décimale de x_k... Par conséquent, a est différent de tous les x_k.

•••• Exercice 12 - Théorème de Cantor-Bernstein

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein : si E et F sont deux ensembles tels qu'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E dans F.
Considérons deux ensembles E et F ainsi que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ deux injections.
On définit également :

$$\mathrm{A}_0 = \overline{g(\mathrm{F})} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}_{n+1} = \big(g \circ f\big)(\mathrm{A}_n) \ ; \ \mathrm{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_n$$

1. **Construction de l'application.**

1.a. Démontrer que pour tout $x \in \overline{\mathrm{B}}$, il existe un unique $z \in \mathrm{F}$ tel que $x = g(z)$. On notera $\varphi(x) = z$.

- **Unicité.**
  L'unicité d'un tel z découle immédiatement de l'injectivité de g.
- **Existence.**
  Soit $x \in \overline{\mathrm{B}}$.
  D'après les lois de Morgan, on a :
  $$\overline{\mathrm{B}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathrm{A}_n}$$
  Ainsi :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in \overline{\mathrm{A}_n}$$
  En particulier :
  $$x \in \overline{\mathrm{A}_0} = g(\mathrm{F})$$
  Par définition, il existe alors $z \in \mathrm{F}$ tel que $x = g(z)$. D'où l'existence recherchée.

Conclusion : pour tout $x \in \overline{\mathrm{B}}$, il existe un unique $z \in \mathrm{F}$ tel que $x = g(z)$. On notera $\varphi(x) = z$.

Important !
L'unicité de ce z est fondamentale pour pouvoir écrire $\varphi(x) = z$. C'est bien parce-que, pour tout x, ce z est unique, qu'on peut créer une fonction qui à x associe ce z.

1.b. Si $x \in \mathrm{B}$, on pose $\varphi(x) = f(x)$.
Démontrer que l'on a ainsi bien défini une application φ de E dans F.

Par définition de la famille d'ensembles $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}_n \subset \mathrm{E}$$

Par conséquent :

$$\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$$

Et puisque $(\mathrm{B}, \overline{\mathrm{B}})$ est une partition de E, l'application φ est entièrement définie sur E par la donnée de $\varphi(x)$ pour $x \in \mathrm{B}$ (dans l'énoncé de la question **1.b.**) et de $\varphi(x)$ pour $x \in \overline{\mathrm{B}}$ (défini dans la question précédente).

Conclusion : φ est bien une application, définie sur E, à valeurs dans F.

Vocabulaire
Une **partition** d'un ensemble E est une famille $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles de E telle que :
• les A_i sont d eux à deux disjoints
• $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_i = \mathrm{E}$.

2. **Injectivité de φ.**

2.a. Démontrer que $\varphi_{|\mathrm{B}}$ et $\varphi_{|\overline{\mathrm{B}}}$ sont injectives.

☞ Rappel...
$$\varphi_{|\mathrm{B}} : \left|\begin{array}{ccc} \mathrm{B} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}\right.$$

- Pour $\varphi_{|\mathrm{B}}$:
  Soient $x, x' \in \mathrm{B}$. Supposons que $\varphi_{\mathrm{B}}(x) = \varphi_{\mathrm{B}}(x')$.
  Mais $x, x' \in \mathrm{B}$, donc $\varphi_{|\mathrm{B}}(x) = f(x)$ et $\varphi_{|\overline{\mathrm{B}}}(x) = f(x)$. D'où :
  $$f(x) = f(x')$$
  Et par injectivité de f sur E, on obtient :
  $$x = x'$$
  Conclusion : $\varphi_{|\mathrm{B}}$ est injective.
- Pour $\varphi_{|\overline{\mathrm{B}}}$:
  Soient $x, x' \in \overline{\mathrm{B}}$. Supposons que $\varphi_{\overline{\mathrm{B}}}(x) = \varphi_{\overline{\mathrm{B}}}(x')$.
  D'où, en appliquant g :
  $$g\big(\varphi_{\overline{\mathrm{B}}}(x)\big) = g\big(\varphi_{\overline{\mathrm{B}}}(x')\big)$$

Mais, puisque $x \in \overline{B}$, $\varphi_{|\overline{B}}(x)$ est l'unique solution de l'équation $x = g(z)$; par conséquent, $g\big(\varphi_{\overline{B}}(x)\big) = x$. De même : $g\big(\varphi_{\overline{B}}(x')\big) = x'$. On obtient finalement :

$$x = x'$$

Conclusion : $\varphi_{|\overline{B}}$ est injective.

2.b. Soient $x \in \overline{B}$ et $y \in B$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Démontrer que $x = (g \circ f)(y)$.

Puisque $x \in \overline{B}$, $\varphi(x) = \varphi_{\overline{B}}(x)$, et donc, par définition :

$$g\big(\varphi_{\overline{B}}(x)\big) = x$$

Mais, puisque $\varphi(x) = \varphi(y)$, on a ainsi :

$$g\big(\varphi(y)\big) = x$$

Or, $y \in B$. Donc $\varphi(y) = f(y)$...

Conclusion : $g \circ f(y) = x$.

2.c. En déduire que φ est injective.

Soient $x, x' \in E$. Supposons que $\varphi(x) = \varphi(x')$. Trois cas se présentent :

- **Premier cas : $x, x' \in B$.**
  On obtient ainsi $x = x'$, par injectivité de φ_B.
- **Second cas : $x, x' \in \overline{B}$.**
  On obtient ainsi $x = x'$, par injectivité de $\varphi_{\overline{B}}$.
- **Troisième cas : quitte à échanger x et x', on considère que $x \in \overline{B}$ et $x' \in B$.**
  Puisque $x' \in B$, il existe $n \in \mathrm{N}$ tel que $x \in A_n$. Notons n_0 un tel entier.
  Mais, d'après la question précédente :
  $$x = g \circ f(x')$$
  Donc :
  $$x \in g \circ f(A_{n_0})$$
  Or, par définition de la suite (A_n), $g \circ f(A_{n_0}) = A_{n_0+1}$. Par conséquent :
  $$x \in A_{n_0+1}$$
  Et ainsi :
  $$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = B$$
  Ce qui est impossible puisque $x \in \overline{B}$.
  Par conséquent, il est impossible que $\varphi(x) = \varphi(x')$ dans le cas où $x \in \overline{B}$ et $x' \in B$.

Conclusion : φ est injective.

3. Démontrer que φ est surjective.

Soit $y \in F$. Ainsi, $g(y) \in E$.

- **Premier cas : si $g(y) \in B$.**
  Dans ce cas, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(y) \in A_n$. Notons n_0 un tel entier.
  - ◇ Remarquons que, nécessairement, $n_0 \neq 0$.
    En effet, si c'était le cas, alors on aurait $g(y) \in \overline{g(F)}$. Mais $y \in F$, donc $g(y) \in g(F)$. Absurde !
  - ◇ Ainsi, puisque $n_0 \geq 1$, on a $A_{n_0} = g \circ f(A_{n_0-1})$.
    Mais $g(y) \in A_{n_0}$, d'où :
    $$g(y) \in g \circ f(A_{n_0-1})$$
    Par conséquent, il existe $x \in A_{n_0-1}$ tel que $g(y) = g \circ f(x)$. Pour un tel x, on a ainsi :
    $$g(y) = g\big(f(x)\big)$$
    Et, par injectivité de g, on a :
    $$y = f(x)$$
    Enfin, puisque $x \in A_{n_0-1}$, on a $x \in B$, et dans ce cas, $f(x) = \varphi(x)$.

  Conclusion : nous avons trouvé un $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$.
- **Second cas : si $g(y) \in \overline{B}$.**
  D'après la question **1.a.**, il existe alors un unique $z \in F$ tel que $g(y) = g(z)$, avec $z = \varphi(g(y))$.
  Mais, par injectivité de g, puisque $g(y) = g(z)$, on obtient :
  $$y = z = \varphi(g(y))$$
  Conclusion : nous avons trouvé un $x \in E$ ($x = g(y)$) tel que $y = \varphi(x)$.

Conclusion : dans tous les cas, y possède un antécédent dans E par φ.

Conclusion : l'application φ est surjective.

Intéressant...
Nous avons fait plus que démontrer l'existence d'une application bijective entre E et F : nous en avons trouvé une !