Exercices du chapitre 11
Applications...

●○○○ Exercice 1 - Image directe
Dans chaque cas, déterminer $f(A)$.

1. $f : x \longmapsto x^2+1$, $A = [0;1]$
2. $f : x \longmapsto x^2+1$, $A = [-3;2]$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$, $A = \mathbb{R}^+$
4. $f : x \longmapsto xe^{-x}$, $A = \mathbb{R}$

●●○○ Exercice 2 - Bijection et bijection réciproque
Dans chaque cas, montrer que f est bijective de son ensemble de départ dans un ensemble à déterminer, puis donner l'expression de sa bijection réciproque.

1. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{1+x^2} \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+2}{e^{-x}} \end{array} \right.$
3. $f : \left| \begin{array}{rcl} [-2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+4x+1 \end{array} \right.$
4. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array} \right.$

●●○○ Exercice 3 - Sur d'autres ensembles...
Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives de leur ensemble de départ dans leur ensemble d'arrivée ?

1. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$
3. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x,x) \end{array} \right.$
4. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$
5. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array} \right.$
6. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x+y,xy) \end{array} \right.$
7. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array} \right.$

●○○○ Exercice 4 - Vrai ou faux
1. La composée de deux injections est une injection.
2. la composée de deux surjections est une surjection.
3. La somme de deux bijections est une bijection.

●○○○ Exercice 5 - Bijection & cardinal
Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application. Comparer les cardinaux de E et F dans les cas suivants :

1. f injective,
2. f surjective,
3. f bijective.

●●●○ Exercice 6 - Nombre de bijections
Soit E un ensemble fini de cardinal n, avec $n \geq 1$. Combien existe-t-il de bijections de E dans lui-même ?

●●○○ Exercice 7
Soient E, F, G, trois ensembles ainsi que $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer que :

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

●●●○ Exercice 8

Soient E et F deux ensembles ainsi que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
Montrer que f est bijective. En déduire que g l'est aussi.

●●●○ Exercice 9

Soient E un ensemble ainsi que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective de E dans E.

●●●○ Exercice 10 - Injectivité et image directe

Soient E et F deux ensembles, ainsi qu'une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$.

1. Montrer que pour toutes parties $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on a $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.
2. Établir :
$$\left(f \text{ est injective}\right) \iff \left(\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}),\ f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})\right)$$

●●●○ Exercice 11 - Ensembles dénombrables

Définition 1

Un ensemble E est **dénombrable** lorsqu'il existe une bijection de E dans $\mathbb{N}$.

On admet qu'il existe une injection d'un ensemble E *dans* $\mathbb{N}$, *si, et seulement si,* E *est fini ou dénombrable. Un tel ensemble est dit* ***au plus dénombrable****.*

1. Donner un ensemble qui soit au plus dénombrable, mais pas dénombrable ; ainsi qu'un ensemble qui soit dénombrable mais pas au plus dénombrable.
2. Démontrer que l'ensemble des naturels pairs est dénombrable.
3. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0\}$ est dénombrable.
4. En considérant l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (m,n) & \longmapsto & 2^m 3^n \end{array}\right.$, démontrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
5. En déduire que si E et F sont deux ensembles dénombrables, alors $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ l'est encore.
6. En considérant l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{array}\right.$, démontrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
7. 7.a. Justifier que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
   7.b. Démontrer que $\mathbb{Q}_*^+$ n'a pas de plus petit élément ; puis en déduire qu'il n'existe pas de suite croissante (q_n) de rationnels, tels que $\mathbb{Q}_*^+ = \{q_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.
8. 8.a. Donner une bijection de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$.
   8.b. $\mathbb{R}$ est-il dénombrable ?

●●●● Exercice 12 - Théorème de Cantor-Bernstein

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein : si E et F sont deux ensembles tels qu'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E dans F.
Considérons deux ensembles E et F ainsi que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ deux injections.
On définit également :
$$\mathrm{A}_0 = \overline{g(\mathrm{F})} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}_{n+1} = \left(g \circ f\right)(\mathrm{A}_n) \ ; \ \mathrm{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_n$$

1. **Construction de l'application.**
   1.a. Démontrer que pour tout $x \in \overline{\mathrm{B}}$, il existe un unique $z \in \mathrm{F}$ tel que $x = g(z)$. On notera $\varphi(x) = z$.
   1.b. Si $x \in \mathrm{B}$, on pose $\varphi(x) = f(x)$.
   Démontrer que l'on a ainsi bien défini une application φ de E dans F.
2. **Injectivité de φ.**
   2.a. Démontrer que $\varphi_{|\mathrm{B}}$ et $\varphi_{|\overline{\mathrm{B}}}$ sont injectives.
   2.b. Soient $x \in \overline{\mathrm{B}}$ et $y \in \mathrm{B}$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Démontrer que $x = (g \circ f)(y)$.
   2.c. En déduire que φ est injective.
3. Démontrer que φ est surjective.