Exercices du chapitre 12
Probabilités et variables aléatoires en univers fini

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●●○○ Exercice 1 - Vrai ou faux ?

1. On lance une pièce et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : "on n'obtient que des PILE pendant les n premiers lancers". On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{n+1} \subset A_n$.
   VRAI
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons que $A_{n+1} \subset A_n$.
   Soit $\omega \in A_{n+1}$. On peut ainsi assimiler ω à un ∞-uplet dont les $n+1$ premières composantes sont PILE. En particulier, les n premières composantes de ω sont PILE.
   Par conséquent $\omega \in A_n$.

> **Petite remarque**
> On peut rédiger autrement, avec une rédaction un peu moins mathématiques, mais tout à fait correcte :
> Supposons l'évènement A_{n+1} réalisée. Alors on n'a obtenu que des PILE sur les $n+1$ premiers lancers. En particulier, les n premiers lancers ne sont également que des PILE. Et donc l'évènement A_n est réalisé.
> D'où : $A_{n+1} \subset A_n$.

2. On lance une pièce et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : "on n'obtient au moins un PILE pendant les n premiers lancers". On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{n+1} \subset A_n$.
   FAUX
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $\omega = (F, F, ..., F, P, *, *, ...)$ un ∞-uplet dont les n premières composantes sont FACE. On a bien $\omega \in A_{n+1}$ et pourtant, $\omega \notin A_n$ puisque ω ne contient aucun PILE sur ces n premières composantes.

3. Si A et B sont deux évènements, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$.
   VRAI
   Si A et B sont deux évènements, alors $A \cap B \subset A$; et par croissance de $\mathbb{P}$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$.

4. Deux évènements A et B sont incompatibles si, et seulement si, $A \subset \overline{B}$.
   VRAI
   Soient A et B deux évènements. Il s'agit de démontrer une équivalence, raisonnons par double-implication.
   - $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A et B sont incompatibles. Soit $\omega \in A$. Montrons que $\omega \in \overline{B}$.
     Par l'absurde, supposons que $\omega \in B$. Dans ce cas, puisque $\omega \in A$, on aurait $\omega \in A \cap B$. Mais $A \cap B = \varnothing$: absurde !
     Par conséquent : $\omega \notin B$, autrement dit $\omega \in \overline{B}$.
   - $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $A \subset \overline{B}$. Ainsi : $A \cap B \subset \overline{B} \cap B = \varnothing$.
     D'où : $A \cap B = \varnothing$: A et B sont incompatibles.

> **Petite remarque**
> On utilise ici la propriété 3 du chapitre 7... mais on pourrait également raisonner par l'absurde en considérant un élément dans $A \cap B$...

5. Si $A \cap B \cap C = \varnothing$, alors au moins une des trois intersections $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ est vide.
   FAUX
   Considérons l'expérience consistant à lancer un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et à observer la face du dessous. Prenons les évènements : $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$ et $C = \{1; 3\}$. On a bien $A \cap B \cap C = \varnothing$, et pourtant, aucune des trois intersections $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ n'est vide.

> **Important !**
> Une expérience aléatoire, c'est deux choses : une action et une observation.

●○○○ Exercice 2 - Test de dépistage

On considère une population touchée par une maladie affecte une personne sur 100. Un test de dépistage est proposé dont voici les caractéristiques :

- sensibilité à 95 % : 95% des personnes malades ont un test positif
- spécificité à 99,9 % : 99,9% des personnes saines ont un test négatif

Discuter de la fiabilité du test en déterminant les deux valeurs suivantes :

- valeur prédictive positive (pourcentage de malades parmi les tests positifs)
- valeur prédictive négative (pourcentage de non malades parmi les tests négatifs)

On choisit un individu au hasard dans la population et on considère les évènements :

- M : "un individu, choisi au hasard, est malade"
- T : "un individu, choisi au hasard, a un test positif"

Les données de l'énoncé fournissent ainsi :

$$\mathbb{P}(M) = \frac{1}{100} \ ; \ \mathbb{P}_M(T) = \frac{95}{100} \ ; \ \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{999}{1000}$$

On cherche les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}_T(M) \ ; \ \mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{M})$$

- Calcul de $\mathbb{P}(T)$.
  D'après la formule des probabilités totales, avec $(M, \overline{M})$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T) \\
&= \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) \quad \text{$\mathbb{P}(M)$ et $\mathbb{P}(\overline{M})$ sont non nulles} \\
&= \frac{1}{100} \times \frac{95}{100} + \frac{99}{100} \times \frac{1}{1000} \\
&= \frac{950 + 99}{10^5} \\
&= \frac{1049}{10^5}
\end{aligned}$$

> **✓ Rigueur !**
> On justifie que les probabilités conditionnelles ont bien du sens...

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T(M) &= \frac{\mathbb{P}(M\cap T)}{\mathbb{P}(T)}\\ &= \frac{\frac{950}{100^2}}{\frac{1049}{10^5}}\\ &= \frac{950}{1049}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{M}) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{M}\cap\overline{T})}{\mathbb{P}(\overline{T})}\\ &= \frac{\frac{99\times 999}{10^5}}{\frac{10^5-1049}{10^5}}\\ &= \frac{99\times 999}{10^5-1049}\end{aligned}$$

Conclusion : VPP $\simeq 90,09\%$ et VPN $\simeq 99,94\%$

Petite remarque
Les valeurs approchées seraient données.

●○○○ Exercice 3

Un couple de parents a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On suppose qu'il y a équiprobabilité pour qu'un enfant soit une fille ou un garçon. On considère les évènements :

- A : "les deux enfants sont de sexes différents"
- B : "l'ainé est une fille"
- C : "le cadet est un garçon"

Montrer que les évènements A, B, C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Notons, pour $k \in \{1;2\}$, F_k l'évènement "le k-ième enfant est une fille".

- On a :

$$A = (G_1\cap F_2)\cup(F_1\cap G_2)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big((G_1\cap F_2)\cup(F_1\cap G_2)\big) && \text{par incompatibilité de } G_1\cap F_2 \text{ et } F_1\cap G_2\\ &= \mathbb{P}(G_1\cap F_2)+\mathbb{P}(F_1\cap G_2) && \text{par indépendance de } F_1 \text{ et } F_2\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

☞ Rappel...
Si A et B sont indépendants, alors il en est de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, mais aussi de A et $\overline{B}$.

- $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{2}$$
- $$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{2}$$
- On a aussi :

$$A\cap B = F_1\cap G_2$$

D'où :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{4}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$$

A et B sont indépendants.
- On a aussi :

$$A\cap C = F_1\cap G_2$$

D'où :

$$\mathbb{P}(A\cap C) = \frac{1}{4}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C)$$

A et C sont indépendants.
- On a aussi :

$$B\cap C = F_1\cap G_2$$

D'où :

$$\mathbb{P}(B\cap C) = \frac{1}{4}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(C)$$

B et C sont indépendants.

Petite remarque
On remarque que $A\cap B = A\cap C = B\cap C$.

- Enfin :

$$A\cap B\cap C = F_1\cap G_2$$

D'où :

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$

Les évènements A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants ; ils sont deux à deux indépendants, mais pas trois à trois indépendants.

●○○○ Exercice 4 - Probabilités & suites

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire ; ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, toutes indiscernables au toucher. On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans ces urnes comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U,
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne,
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement : "le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U" et $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Calculer u_3.

On sait que le premier tirage s'effectue dans l'urne U. Par conséquent, U_2 est réalisé si, et seulement si, on tire une boule noire dans l'urne U.
D'où :

$$\mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{3} \ ; \ \mathbb{P}(\overline{U_2}) = \frac{2}{3}$$

Enfin, d'après la formule des probabilités totales, avec $(U_2, \overline{U_2})$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned} u_3 &= \mathbb{P}(U_3) \\ &= \mathbb{P}(U_2 \cap U_3) + \mathbb{P}(\overline{U_2} \cap U_3) \\ &= \mathbb{P}(U_2) \times \mathbb{P}_{U_2}(U_3) + \mathbb{P}(\overline{U_2}) \times \mathbb{P}_{\overline{U_2}}(U_3) \quad && \mathbb{P}(U_2) \text{ et } \mathbb{P}(\overline{U_2}) \text{ sont non nulles} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. On admet que $\mathbb{P}(U_n)$ et $\mathbb{P}(\overline{U_n})$ sont non nulles. Donner les valeurs de $\mathbb{P}_{U_n}(U_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$.

- Supposons l'évènement U_n réalisé. Dans ce cas, l'évènement U_{n+1} est réalisé si, et seulement si, on tire une boule noire dans l'urne U.
Par conséquent :

$$\mathbb{P}_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{3}$$

- Supposons l'évènement $\overline{U_n}$ réalisé. Sous cette hypothèse, l'évènement U_{n+1} se réalise si, et seulement si, on tire une boule blanche dans l'urne V.
Par conséquent :

$$\mathbb{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

> ☞ **Pour info...**
> En général, l'énoncé ne mentionne pas le fait que $\mathbb{P}(U_n)$ et $\mathbb{P}(\overline{U_n})$ sont non nulles. Si besoin, on admettra que c'est bien le cas.

> ★ **Subtile...** ★
> Nous allons devoir utiliser la FPT, puis les proba conditionnelles. Or $\mathbb{P}(\overline{U_1}) = 0$... Nous devons donc distinguer deux cas !

3. Établir une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \geq 2$. D'après la formule des probabilités totales, avec $(U_n, \overline{U_n})$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{P}(U_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(U_n \cap U_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{U_n} \cap U_{n+1}) \quad && \mathbb{P}(U_n) \text{ et } \mathbb{P}(\overline{U_n}) \text{ sont non nulles car } n \geq 2 \\ &= \mathbb{P}(U_n) \times \mathbb{P}_{U_n}(U_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{U_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) \quad && \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{3} u_n + \frac{1}{4}(1 - u_n) \\ &= \frac{1}{12} u_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

> ➠ **Réflexe !**
> On pense à la FPT car il y a plusieurs façons d'arriver à U_{n+1} : en passant par U_n ou par $\overline{U_n}$...

- Mais, on sait que $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{1}{3}$. Ainsi :

$$\frac{1}{12} u_1 + \frac{1}{4} = u_2$$

Par conséquent, la relation établie au point précédent est encore valable si $n = 1$.

> ☞ **Pour info...**
> Ce sera toujours le cas... mais si l'on veut faire les choses proprement, la disjonction de cas est nécessaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = \frac{1}{12} u_n + \frac{1}{4}$.

4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est ainsi une suite arithmético-géométrique... On met en place la méthode habituelle.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x = \frac{1}{12} x + \frac{1}{4} \iff x = \frac{3}{11}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{3}{11} = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{3}{11} + \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{12} u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

D'où, en soustrayant les deux lignes :

$$u_{n+1} - \frac{3}{11} = \frac{1}{12}\left(u_n - \frac{3}{11}\right)$$

Par conséquent, la suite $\left(u_n - \dfrac{3}{11}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$ et de premier terme $u_1 - \dfrac{3}{11} = \dfrac{8}{11}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3}{11} + \dfrac{8}{11}\left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1}$.

PETITE REMARQUE
Sinon, on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \dfrac{3}{11}$. Puis on montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique...

✘ ATTENTION !
La suite débute au rang 1, pas 0 !!

●○○○ EXERCICE 5 - PROBABILITÉS & SUITES

Deux joueurs A et B jouent aux échecs. Le joueur B gagne la première partie. Ensuite, la probabilité que A remporte la partie sachant qu'il a remporté la précédente est de $\dfrac{3}{5}$; alors que la probabilité que B remporte la partie sachant qu'il a remporté la précédente est de $\dfrac{1}{2}$.

1. Si la troisième partie est remportée par A, quelle est la probabilité qu'il ait également remporté la deuxième partie ?

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k l'évènement "le joueur A remporte la k-ième partie". On cherche alors $\mathbb{P}_{A_3}(A_2)$.

- On sait que la première partie a été gagnée par le joueur B. Par conséquent, A_2 est réalisé si, et seulement si, le joueur B perd la deuxième partie.
D'où :

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}\ ;\ \mathbb{P}(\overline{A_2}) = \frac{1}{2}$$

- Puis, d'après la formule des probabilités totales, avec $(A_2, \overline{A_2})$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(\overline{A_2} \cap A_3) \quad \text{$\mathbb{P}(A_2)$ et $\mathbb{P}(\overline{A_2})$ sont non nulles} \\ &= \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(A_3) + \mathbb{P}(\overline{A_2}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_2}}(A_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{20} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{A_3}(A_2) &= \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_3)} \\ &= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{11}{20}} \\ &= \frac{6}{11} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}_{A_3}(A_2) = \dfrac{6}{11}$

★SUBTILE...★
Nous allons devoir utiliser la FPT, puis les proba conditionnelles. Or $\mathbb{P}(A_1) = 0$... Nous devons donc distinguer deux cas !

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que A remporte la n-ième partie. Déterminer le terme général de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - ◇ Si $n \geq 2$. D'après la formule des probabilités totales, avec $(A_n, \overline{A_n})$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) \quad \text{$\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(\overline{A_n})$ sont supposées non nulles} \\ &= \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n) \\ &= \frac{1}{10}p_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  - ◇ Mais, on sait que $p_1 = 0$ et $p_2 = \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$\frac{1}{10}p_1 + \frac{1}{2} = p_2$$

Par conséquent, la relation établie au point précédent est encore valable si $n = 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = \dfrac{1}{10}p_n + \dfrac{1}{2}$.

- La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi une suite arithmético-géométrique... On met en place la méthode habituelle.

➠RÉFLEXE !
On pense à la FPT car il y a plusieurs façons d'arriver à A_{n+1} : en passant par A_n ou par $\overline{A_n}$...

PETITE REMARQUE
• On doit *supposer* $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(\overline{A_n})$ non nulles (quand $n \geq 2$) car ce n'est pas mentionné dans l'énoncé...
• On ne justifie pas les valeurs des probas conditionnelles ici, c'est identique à ce qui a été fait lors de la question 1., c'est simple et ça ne fait pas l'objet de la question !

☞ POUR INFO...
Ce sera toujours le cas... mais si l'on veut faire les choses proprement, la disjonction de cas est nécessaire.

◇ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x = \frac{1}{10}x + \frac{1}{2} \iff x = \frac{5}{9}$$

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ainsi :

$$\begin{cases} \frac{5}{9} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \\ p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où, en soustrayant les deux lignes :

$$p_{n+1} - \frac{5}{9} = \frac{1}{10}\left(p_n - \frac{5}{9}\right)$$

Par conséquent, la suite $\left(p_n - \frac{5}{9}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $p_1 - \frac{5}{9} = \frac{-5}{9}$.

Petite remarque — Sinon, on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = p_n - \frac{5}{9}$. Puis on montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique...

✘ Attention ! — La suite débute au rang 1, pas 0 !!

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{5}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right)$.

●○○○ Exercice 6 - Probabilités & suites

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté PILE et un côté FACE. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé. Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté FACE.

Pour tout entier naturel n, on note :

- A_n l'évènement : "à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté FACE"
- B_n l'évènement : "à l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté PILE et l'autre côté FACE"
- C_n l'évènement : " à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté PILE"

De plus on note, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \mathbb{P}(A_n)$; $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. Donner les probabilités a_0 , b_0 et c_0 ; puis calculer a_1, b_1 et c_1.
   - Initialement, les deux pièces sont côté FACE, donc :
   $$a_0 = 1 \ ;\ b_0 = 0 \ ;\ c_0 = 0$$
   - Puisque les deux pièces sont initialement côté FACE, l'évènement A_1 est réalisé si, et seulement si, on obtient 5 ou 6 au lancer de dé. D'où, le dé étant équilibré :
   $$a_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{3}$$
   Également, l'évènement B_1 est réalisé si, et seulement si, on obtient 1,2,3, ou 4 au lancer de dé. Ainsi :
   $$b_1 = \frac{2}{3}$$
   Et l'évènement C_1 ne peut être réalisé :
   $$c_1 = 0$$

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'évènement A_n réalisé (donc de probabilité non nul).
   Dans ce cas :

   A_{n+1} est réalisé si, et seulement si, aucune pièce n'est retournée lors du $n+1$-ième lancer
   si, et seulement si, on obtient 5 ou 6 au $n+1$-ième lancer

   D'où, le dé étant équilibré :
   $$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer c_n en fonction de a_n et b_n.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque (A_n, B_n, C_n) est naturellement un système complet d'évènements, on a :
   $$a_n + b_n + c_n = 1$$

   . **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = 1 - a_n - b_n$.

★Subtile...★ — Nous allons devoir utiliser la FPT, puis les proba conditionnelles. Or $\mathbb{P}(C_0) = \mathbb{P}(C_1) = 0$... Nous devons donc distinguer des cas !

4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - Si $n \geq 2$:
   D'après la formule des probabilités totales, avec (A_n, B_n, C_n) comme système complet d'évènements, on a :
   $$\begin{aligned} b_{n+1} &= \mathbb{P}(B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(A_n \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n \cap B_{n+1}) && \text{on suppose } \mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n) \text{ et } \mathbb{P}(C_n) \text{ non nulles quand } n \geq 2 \\ &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) && \text{analogue à la question 2.} \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n && \text{car } c_n = 1 - a_n - b_n \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}b_n \\ &= -\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Si $n \in \{0;1\}$.
  - Si $n=0$:
$$\frac{-1}{3}b_0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=b_1$$
  - Si $n=1$:
$$\frac{-1}{3}b_1+\frac{2}{3}=\frac{-2}{9}+\frac{6}{9}=\frac{4}{9}$$
    Or, d'après la formule des probabilités totales avec (A_1, B_1, C_1) comme système complet d'évènements, on a :
$$\begin{array}{rcll} b_2 & = & \mathbb{P}(B_2) & \\ & = & \mathbb{P}(A_1\cap B_2)+\mathbb{P}(B_1\cap B_2)+\mathbb{P}(C_1\cap B_2) & \\ & = & \mathbb{P}(A_1\cap B_2)+\mathbb{P}(B_1\cap B_2) & C_1\cap B_2\subset C_1 \text{ et } \mathbb{P}(C_1)=0, \text{ donc } \mathbb{P}(C_1\cap B_2)=0 \\ & = & \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B_2)+\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) & \mathbb{P}(A_1) \text{ et } \mathbb{P}(B_1) \text{ sont non nulles} \\ & = & \frac{1}{3}\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{3} & \\ & = & \frac{4}{9} & \end{array}$$
    Par conséquent, on a bien :
$$\frac{-1}{3}b_1+\frac{2}{3}=b_2$$

  Conclusion : la relation établie est encore valable quand $n\in\{0;1\}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $b_{n+1}=-\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}$.

5. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de b_n en sortie.

```
def suite_b(n):
    b=0
    for k in range(1,n+1):
        b=-1/3*b+2/3
    return b
```

6. Déterminer le terme général de (b_n) puis en déduire sa limite. Interpréter le résultat.
La suite (b_n) est arithmético-géométrique... Méthode habituelle.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$.

Puisque $\frac{-1}{3}\in]-1;1[$, on a ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)=0$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{1}{2}$.
Au bout d'un grand nombre de répétition de l'expérience, il y aura 1 chance sur 2 qu'à chaque étape, une pièce soit côté PILE et l'autre côté FACE.

●●○○ Exercice 7 - Probabilités, suites & matrices

1. **Calcul matriciel.** On considère les deux matrices :
$$M=\begin{pmatrix}1&1/2&1/4\\0&1/2&1/2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1.a. Justifier que la matrice Q est inversible puis déterminer Q^{-1}.
Q est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible.
De plus, en mettant en place l'algorithme du pivot de Gauss, on trouve $Q^{-1}=Q$.

Conclusion : Q est inversible et $Q^{-1}=Q$.

1.b. Calculer la matrice QMQ. *On notera* D *la matrice obtenue.*

Conclusion : $D=QMQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}$.

1.c. Justifier que $M=QDQ$ puis démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ M^n=QD^nQ$.

- On sait que $D=QMQ$. Ainsi, $QDQ=Q^2MQ^2$. Mais $Q=Q^{-1}$, donc $Q^2=I_3$...

  Conclusion : $M=QDQ$.
- Par récurrence...
  - **Initialisation.** Pour $n=0$:
    $QD^0Q=QI_3Q=Q^2=I=M^0$: l'initialisation est vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Supposons que $M^n=QD^nQ$ et montrons que $M^{n+1}=QD^{n+1}Q$.
    On a :
$$\begin{array}{rcll} M^{n+1} & = & M\times M^n & \\ & = & QDQ\times QD^nQ & \text{par hypothèse de récurrence et premier point} \\ & = & QD\times D^nQ & \text{car } Q^2=I_3 \\ & = & QD^{n+1}Q & \end{array}$$
    L'hérédité est ainsi établie.

  Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ M^n=QD^nQ$.

2. **Étude d'une expérience aléatoire.** On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées et on effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :
   - à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
   - à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 1 (s'il en existe),
   - à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 2 (s'il en existe),

   et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.
   On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :
   - A_n : "obtenir 0 PILE à l'étape n"
   - B_n : "obtenir 1 PILE à l'étape n"
   - C_n : "obtenir 2 PILE à l'étape n"

   et on note $a_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$, $b_n = \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(\mathrm{C}_n)$.

2.a. Calculer a_1, b_1 et c_1.

A l'étape 1, on a encore 2 pièces... Les issues possibles sont alors : (P,P), (P,F), (F,P) et (F,F). Et puisque les pièces sont équilibrées, ces issues sont équiprobables.
D'où immédiatement :

$$a_1 = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) = \mathbb{P}(\{(\mathrm{P},\mathrm{P})\}) = \frac{1}{4} \quad ; \quad b_1 = \mathbb{P}(\mathrm{B}_1) = \mathbb{P}(\{(\mathrm{P},\mathrm{F});(\mathrm{F},\mathrm{P})\}) = \frac{1}{2} \quad ; \quad c_1 = \mathbb{P}(\mathrm{C}_1) = \mathbb{P}(\{(\mathrm{P},\mathrm{P})\}) = \frac{1}{4}$$

Conclusion : $a_1 = \frac{1}{4}$, $b_1 = \frac{1}{2}$ et $c_1 = \frac{1}{4}$.

2.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les trois probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$, $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$.

- $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$:
  Supposons A_n réalisé : à l'étape n, aucun PILE n'a été réalisé. Dans ce cas, nous sommes certains de n'obtenir aucun PILE à l'étape d'après.
  D'où : $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = 1$.
- $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$:
  Supposons B_n réalisé : à l'étape n, un seul PILE a été réalisé. Dans ce cas à l'étape $n+1$, le jeu se poursuit avec une seule pièce... Donc la probabilité de n'obtenir aucun PILE est alors de $\frac{1}{2}$.
  D'où : $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{1}{2}$.
- $\mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$:
  Supposons C_n réalisé : à l'étape n, deux PILE ont été réalisés. Dans ce cas, à l'étape $n+1$, le jeu se poursuit avec deux pièces... Donc la probabilité de n'obtenir aucun PILE est alors de $\frac{1}{4}$.
  D'où : $\mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

2.c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

Il faut appliquer trois fois la formule des probabilités totales ici... Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Pour A_{n+1} :**
  D'après la formule des probabilités totales, avec $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n)$ comme système complet d'évènement, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_{n+1}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{A}_{n+1}) + \mathbb{P}(\mathrm{C}_n \cap \mathrm{A}_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) + \mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathrm{C}_n) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(\mathrm{C}_n) \\ &= a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{aligned}$$

  on suppose $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$, $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{C}_n)$ non nulles
  d'après la question précédente

- **Pour B_{n+1} :**
  C'est identique, en utilisant les probabilités : $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = 0$, $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = \frac{1}{2}$...

  Conclusion : $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.

- **Pour C_{n+1} :**
  C'est identique, en utilisant les probabilités : $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{C}_{n+1}) = 0$, $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{C}_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{C}_{n+1}) = \frac{1}{4}$...

  Conclusion : $c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n$.

2.d. Que peut-on dire de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? En déduire son terme général.

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $c_1 = \frac{1}{4}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = c_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \frac{1}{4^n}$.

2.e. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = M^{n-1}X_1$, où M est la matrice étudiée dans la question **1.**.

Grâce au résultat de la question **2.c.**, nous pouvons déjà remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = MX_n$. Démontrons ensuite le résultat voulu par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  $M^{1-1}X_1 = M^0X_1 = I_3X_1 = X_1$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $X_n = M^{n-1}X_1$ et montrons que $X_{n+1} = M^nX_1$.
  On a :
  $$\begin{aligned} X_{n+1} &= MX_n \\ &= MM^{n-1}X_1 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= M^nX_1 \end{aligned}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = M^{n-1}X_1$.

2.f. **2.f.i.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, \quad \mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}, \quad \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{4^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On sait que $M^{n-1} = QD^{n-1}Q$.
  Comme D est diagonale, D^{n-1} s'obtient directement, puis on calcule ensuite M^{n-1}. On trouve :
  $$M^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{2^{n-1}} & 1 - \frac{2}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2}{4^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^{n-1}} \end{pmatrix}$$
- D'après la question précédente : $X_n = M^{n-1}X_1$.
  Or $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.
  D'où :
  $$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{2^{n-1}} & 1 - \frac{2}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2}{4^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
  Par conséquent :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n) &= c_n \\ &= \frac{1}{4^n} \end{aligned}$$
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= b_n \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2}{4^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{2}{4^n} \\ &= \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n} \end{aligned}$$
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= a_n \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} \\ &= 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n} \end{aligned}$$

2.f.ii. Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles. Interpréter le résultat obtenu.

- Sans mal, on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1$.
- Ensuite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = 0$.
  Cela signifie que, à terme, seuls les évènements A_n seront réalisés. C'est naturel : on s'attend à ne plus avoir de pièces...

●●○○ Exercice 8 - Avec ou sans remise ?

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n. Pour $k \in [\![1; n]\!]$, l'urne numéro k contient k balles blanches et $n - k$ balles noires.

1. On choisit au hasard une urne puis on tire simultanément 2 balles dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux balles blanches ?
   - Notons A l'évènement "obtenir 2 balles blanches à l'issue de l'expérience".
     Notons également, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, U_k l'évènement "le tirage s'effectue dans l'urne k".

- D'après la formule des probabilités totales, avec $(\mathrm{U}_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{A}) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{U}_k \cap \mathrm{A}) \\
&= \mathbb{P}(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{A}) + \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{U}_k \cap \mathrm{A}) && \text{U}_1 \text{ ne contient qu'une balle blanche, donc } \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{A} = \varnothing \\
&= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{U}_k \cap \mathrm{A}) && \forall k \in [\![2;n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{U}_k) \neq 0 \\
&= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{U}_k)\mathbb{P}_{\mathrm{U}_k}(\mathrm{A}) && \text{équiprobabilité du choix de l'urne} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n}\mathbb{P}_{\mathrm{U}_k}(\mathrm{A})
\end{aligned}$$

Petite remarque

On peut se dispenser de distinguer le cas où $k = 1$ en considérant que $\binom{1}{2} = 0$...

- Soit $k \in [\![2;n]\!]$. Supposons l'évènement U_k réalisé. Dans ce cas, A est réalisé si, et seulement si, on obtient 2 balles blanches dans l'urne k. Ceci équivaut à choisir un sous-ensembles constitué de deux balles blanches.
  Or, l'urne k est composée de k balles blanches et $n-k$ balles noires, il y a donc $\binom{k}{2}$ sous-ensembles constitués de 2 balles blanches ; sur un total de $\binom{n}{2}$ sous-ensembles possibles. Par équiprobabilité du choix du sous-ensemble, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathrm{U}_k}(\mathrm{A}) &= \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} \\
&= \frac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{!n}{2!(n-2)!}} \\
&= \frac{k(k-1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

☞ Pour info...

On pouvait procéder autrement en mentionnant qu'effectuer un tirage simultané de 2 balles équivaut à effectuer une succession de 2 tirages d'une balle sans remise (puisqu'on ne tient, ici, pas compte de l'ordre).

- Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{A}) &= \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) && k^2 - k = 0 \text{ quand } k = 1 \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k \right) \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \frac{(n+1)(2n-2)}{6} \\
&= \frac{n+1}{3n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{n+1}{3n}$.

2. Même question si le tirage des balles se fait successivement et avec remise.
   - Notons B l'évènement "obtenir 2 balles blanches à l'issue de l'expérience".
     Notons également, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, U_k l'évènement "le tirage s'effectue dans l'urne k".
   - D'après la formule des probabilités totales, avec $(\mathrm{U}_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{B}) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{U}_k \cap \mathrm{B}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{U}_k \cap \mathrm{B}) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{U}_k) \neq 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{U}_k)\mathbb{P}_{\mathrm{U}_k}(\mathrm{B}) && \text{équiprobabilité du choix de l'urne} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\mathbb{P}_{\mathrm{U}_k}(\mathrm{B})
\end{aligned}$$

✘ Attention !

Tirage avec remise ici. Donc même dans l'urne 1, l'évènement A peut se réaliser...

   - Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Notons, pour $i \in [\![1;2]\!]$, B_i l'évènement "obtenir une balle blanche au tirage i".
     Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathrm{U}_k}(\mathrm{B}) &= \mathbb{P}_{\mathrm{U}_k}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) && \text{indépendance de } \mathrm{B}_1 \text{ et } \mathrm{B}_2\text{, car tirage avec remise} \\
&= \mathbb{P}_{\mathrm{U}_k}(\mathrm{B}_1) \times \mathbb{P}_{\mathrm{U}_k}(\mathrm{B}_2) \\
&= \frac{k^2}{n^2}
\end{aligned}$$

- Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

3. Quelles sont les limites de ces deux probabilités quand n tend vers $+\infty$?
   Sans difficulté particulière, on remarque que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$$

●●○○ Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une expérience aléatoire telle dont l'univers est $[\![1;n]\!]$ et on suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([\![1;k]\!]) = \lambda k^2$$

Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la probabilité de l'évènement $\{k\}$.
Remarquons déjà que $\mathbb{P}([\![1;n]\!]) = 1$, d'où $\lambda n^2 = 1$.
Par conséquent :

$$\lambda = \frac{1}{n^2}$$

Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On a :

- Si $k = 1$:

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}([\![1;1]\!]) = \lambda 1^2 = \frac{1}{n^2}$$

- Si $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{k\}) &= \mathbb{P}([\![1;k]\!]) - \mathbb{P}([\![1;k-1]\!])\\ &= \lambda k^2 - \lambda(k-1)^2\\ &= \lambda(2k-1)\\ &= \frac{2k-1}{n^2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{2k-1}{n^2}$.

●○○○ Exercice 10

Pour chaque variable aléatoire ci-dessous, donner $X(\Omega)$.

1. X est le nombre de PILE obtenus en lançant quatre fois consécutives une pièce équilibrée.
   $X(\Omega) = [\![0;4]\!]$.
2. X est le minimum des nombres obtenus en lançant deux dés équilibrés.
   $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$.
3. X est le rang du premier PILE pour une succession infinie de lancers de pièces et X prend la valeur 0 si aucune PILE n'apparaît.
   $X(\Omega) = \mathbb{N}$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est le nombre de fois que l'on obtient 6 en lançant n fois un dé.
   $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

★Subtile...★
Nous verrons, dans le prochain chapitre de probabilités, que l'évènement "aucun PILE n'apparaît" est de probabilité nulle.
En toute rigueur, l'énoncé doit préciser la valeur que prend X dans le cas où aucun PILE n'apparaît (l'∞-uplet $(F,F,F,\ldots,)$ est la seule issue de cet évènement, qui est donc non vide); même si l'évènement $[X=0]$ est de probabilité nulle.

●○○○ Exercice 11

On considère la variable aléatoire X, dont la loi de probabilité est :

valeurs de X	1	5	8	10
probabilités	0,2	p	q	0,1

Déterminer les valeurs de p et q, de sorte que l'espérance de X soit égale à $5,6$.
On doit avoir :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]) = 1 \quad ; \quad \mathbb{E}(X) = 5,6$$

Or :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]) = 1 \\ \mathbb{E}(X) = 5,6 \end{cases} \iff \begin{cases} p + q = 0,7 \\ 5p + 8q = 4,4 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 0,4 \\ q = 0,3 \end{cases}$$

Conclusion : $p = 0,4$ et $q = 0,3$.

●●○○ Exercice 12

Soit $p \in]0;1[$. On lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p jusqu'à obtenir le premier PILE ; et dans tous les cas, on s'arrête après le cinquième lancer. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.

1. **Calcul préliminaire.** Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0;1[,\ \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}$$
Posons $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, définie sur $]0;1[$.
f étant une fonction polynomiale, elle est dérivable sur $]0;1[$.
Soit $x \in]0;1[$. Puisque $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k$, on obtient, par linéarité de la dérivation :
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$$
Mais on sait aussi, puisque $x \in]0;1[$, que $f(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$. D'où, en dérivant sous cette forme :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-nx^{n-1}(1-x)-(1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1}+nx^n+1-x^n}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2} \end{aligned}$$
En égalant ces deux expressions, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0;1[,\ \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \dfrac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}$.

2. Donner $X(\Omega)$.
Sans difficulté : $X(\Omega) = [\![1;5]\!]$. En effet :
   - l'inclusion $X(\Omega) \subset [\![1;5]\!]$ est immédiate ;
   - pour tout $k \in [\![1;5]\!]$, l'évènement $[X = k]$ est non vide, car réalisé (par exemple) par l'issue comportant PILE au k-ième lancer et FACE éventuellement avant ce lancer.
   D'où l'inclusion $[\![1;5]\!] \subset X(\Omega)$.

Petit à petit...
Vous devez tous être en mesure de donner $X(\Omega)$. En revanche, la justification demande un travail de rédaction et de justification non négligeable, qu'il ne doit pas être la priorité dans votre travail.

3. Que vaut $\mathbb{P}([X = 1])$?
Notons, pour tout $k \in [\![1;4]\!]$, P_k l'évènement "obtenir PILE au k-ième lancer" er $F_k = \overline{P_k}$.
   - L'évènement $[X = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient PILE au premier lancer.
   Ainsi :
   $$[X = 1] = P_1$$
   - D'où :
   $$\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(P_1) = p$$

4. Déterminer la loi de X.
   - On a déjà : $X(\Omega) = [\![1;5]\!]$ et $\mathbb{P}([X = 1]) = p$.
   - Ensuite :
     - Soit $k \in [\![2;4]\!]$.
       - L'évènement $[X = k]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient que des FACE jusqu'au k-ième lancer, qui donne PILE.
       Ainsi :
       $$[X = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$$
       - Par conséquent :
       $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k\right) && \text{par indépendance des lancers} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1}(1-p)\right)p \\ &= (1-p)^{k-1}p \end{aligned}$$
     - L'évènement $[X = 5]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient le premier PILE au 5ème lancer OU si l'on n'a obtenu aucun PILE.
       Ainsi :
       $$[X = 5] = \left(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap P_5\right) \cup \left(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5\right)$$
       - Par conséquent :
       $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 5]) &= \mathbb{P}\left(\left(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap P_5\right) \cup \left(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5\right)\right) && P_5 \cap F_5 = \varnothing\text{, donc } F_1 \cap \ldots \cap F_4 \cap P_5 \text{ et } F_1 \cap \ldots \cap F_5 \text{ sont incompatibles} \\ &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap P_5) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5) && \text{par indépendance des lancers} \\ &= \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_4) \times \mathbb{P}(P_5) + \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_5) \\ &= (1-p)^4 p + (1-p)^5 \\ &= (1-p)^4(p+1-p) \\ &= (1-p)^4 \end{aligned}$$

Petite remarque
On aurait pu raisonner autrement en disant que $[X = 5]$ est réalisé si, et seulement si, aucun PILE n'a été obtenu à l'issue du 4ème lancer.
Par conséquent :
$$[X = 5] = F_1 \cap \ldots \cap F_4$$

Conclusion : $X(\Omega) = [\![1;5]\!]$;
$\forall k \in [\![1;4]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1}p \quad ; \quad \mathbb{P}([X = 5]) = (1-p)^4$.

5. Calculer l'espérance de X.

$X(\Omega) = [\![1;5]\!]$ est fini, donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{5} k\mathbb{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{4} k(1-p)^{k-1}p + 5\mathbb{P}([X=5]) \\
&= p\sum_{k=1}^{4} k(1-p)^{k-1} + 5(1-p)^4 \\
&= p\frac{1-5(1-p)^4+4(1-p)^4}{(1-(1-p))^2} + 5(1-p)^4 \\
&= \frac{1-5(1-p)^4+4(1-p)^5}{p} + 5(1-p)^4 \\
&= \frac{1-5(1-p)^4+4(1-p)^5+5p(1-p)^4}{p} \\
&= \frac{1+(1-p)^4\big(-5+4(1-p)+5p\big)}{p} \\
&= \frac{1+(1-p)^4(-1+p)}{p} \\
&= \frac{1-(1-p)^5}{p}
\end{aligned}$$

$p \neq 0$, donc $1-p \neq 1$

d'après la question **1.**

✘ Attention !
On doit décomposer la somme, car il y a deux expressions de $\mathbb{P}([X = k])$ selon que $k = 5$ ou $k \in [\![1;4]\!]$.

Conclusion : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-(1-p)^5}{p}$.

6. Reprendre l'exercice en considérant au plus n lancers, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans ce cas, on a : $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$.
- $[X = 1] = P_1$, donc $\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(P_1) = p$
- Soit $k \in [\![2;n-1]\!]$. On a :

$$[X = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) P_k$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=k]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1}(1-p)\right)p \\
&= (1-p)^{k-1}p
\end{aligned}$$

par indépendance des lancers

- L'évènement $[X = n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient le premier PILE au n-ième lancer OU si l'on n'a obtenu aucun PILE.
Ainsi :

$$[X = n] = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap P_n\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=n]) &= \mathbb{P}\left(\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap P_n\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap P_n\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \\
&= (1-p)^{n-1}p + (-p)^n \\
&= (1-p)^{n-1}(p+1-p) \\
&= (1-p)^{n-1}
\end{aligned}$$

$P_n \cap F_n = \varnothing$, donc il s'agit d'une union d'évènements incompatibles

par indépendance des lancers

Petite remarque
On aurait pu raisonner autrement en disant que $[X = n]$ est réalisé si, et seulement si, aucun PILE n'a été obtenu à l'issue du $n-1$-ième lancer.
Par conséquent :

$$[X = n] = \bigcap_{i=1}^{n-1} F_i$$

Conclusion : $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$
$\forall k \in [\![1;n-1]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1}p \quad ; \quad \mathbb{P}([X = n]) = (1-p)^{n-1}$.

- $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ est fini, donc :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1}p + n\mathbb{P}([X=n]) \\
& = & p\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1} + n(1-p)^{n-1} \\
& = & p\dfrac{1-n(1-p)^{n-1}+(n-1)(1-p)^n}{(1-(1-p))^2} + n(1-p)^{n-1} \\
& = & \dfrac{1-n(1-p)^{n-1}+(n-1)(1-p)^n}{p} + n(1-p)^{n-1} \\
& = & \dfrac{1-n(1-p)^{n-1}+(n-1)(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}}{p} \\
& = & \dfrac{1+(1-p)^{n-1}\big(-n+(n-1)(1-p)+np\big)}{p} \\
& = & \dfrac{1+(1-p)^{n-1}(-1+p)}{p} \\
& = & \dfrac{1-(1-p)^n}{p}
\end{array}$$

$p \neq 0$, donc $1-p \neq 1$

d'après la question **1.**

✘ Attention !
On doit décomposer la somme, car il y a deux expressions de $\mathbb{P}([X=k])$ selon que $k=n$ ou $k \in [\![1;n-1]\!]$.

●●○○ Exercice 13 - C'est faux !

Chacune des affirmations suivantes est fausse. Dans chaque cas, fournir un contre-exemple permettant de l'infirmer.

1. Si X ne prend que deux valeurs opposées, alors nécessairement $\mathbb{E}(X) = 0$.
   Considérons la variable aléatoire X, sur un certain univers Ω, telle que $X(\Omega) = \{-1;1\}$ ainsi que $\mathbb{P}([X=-1]) = 0,1$ et $\mathbb{P}([X=1]) = 0,9$.
   X ne prend que deux valeurs opposées, et pourtant $\mathbb{E}(X) = 0,8 \neq 0$.
2. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)^2$.
   D'après la formule de Koenig-Huygens, il suffit, pour fournir un contre-exemple, de trouver une variable aléatoire telle que $\mathbb{V}(X) \neq 0$.
   Pour cela, il suffit de prendre une variable aléatoire non constante... Prenons la même variable aléatoire que dans la question précédente.
   On avait :
   $$\mathbb{E}(X) = 0,8$$
   Et, par théorème de transfert :
   $$\begin{array}{rcl}
   \mathbb{E}(X^2) & = & (-1)^2\mathbb{P}([X=-1]) + 1^2\mathbb{P}([X=1]) \\
   & = & 1
   \end{array}$$
   Par conséquent : $\mathbb{E}(X^2) \neq E(X)^2$.
3. Pour toute variable aléatoire X, les lois de X et X^2 sont différentes.
   En effet, il est possible de trouver une variable aléatoire X telle que X et X^2 ont même loi. Exemples :
   - Les variables aléatoires constantes égales à 0 et constantes égale à 1 conviennent.
   - Toute variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{0;1\}$ convient.

   Petite remarque
   Pour résumer, toute variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \{0;1\}$ vérifie "X et X^2 ont la même loi".
4. Si X et Y ont même espérance et même variance, alors elles ont la même loi de probabilité.
   Considérons les variables aléatoires X et Y définies par :
   - $X(\Omega) = \{-2;2\}$, $\mathbb{P}([X=-2]) = \mathbb{P}([X=2]) = \dfrac{1}{2}$
   - $Y(\Omega) = \{-3;-1;1;3\}$, $\mathbb{P}([X=-3]) = \mathbb{P}([X=3]) = \dfrac{3}{16}$ et $\mathbb{P}([X=-1]) = \mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{5}{16}$

   On a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = 4$, pourtant X et Y n'ont pas la même loi.
   Comment trouver de tels contre-exemples ?
   - Prendre déjà des cas simples en imposant $\mathbb{E}(X) = 0$. Ainsi, par la formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2)$ (que l'on obtient aisément par théorème de transfert).
   - Une variable aléatoire symétrique a une espérance nulle... On en prend un avec deux valeurs pour X. On trouve sa variance (ici 4).
   - Puis on prend une autre variable aléatoire Y qui prend ses valeurs "autour" de celles de X (pour espérer avoir la même variance...)
   - Ici, on a pris $Y(\Omega) = \{-3;-1,1,3\}$. En notant $a = \mathbb{P}([Y=-3]) = \mathbb{P}([Y=3])$ et $b = \mathbb{P}([Y=-1])) = \mathbb{P}([Y=1])$, on doit avoir : $2a+2b = 1$ et $\mathbb{V}(Y) = 4$, d'où $\mathbb{E}(Y^2) = 4$, d'où $18a+2b = 4$...

   Pourquoi ?
   Si Y ne prend que deux valeurs opposées : soit elles sont à l'extérieures de celles de X et la variance sera plus grande, soit à l'intérieur et la variance sera plus petite...

●●○○ Exercice 14 - Suites de variables aléatoires & matrice

On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.
On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages.
On a donc $X_1 = 1$ et par exemple, si les premiers tirages donnent $2,2,1,2,1,4,3$ alors on a : $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$, $X_4 = 2$, $X_5 = 2$, $X_6 = 3$, $X_7 = 4$.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire Z sont notées respectivement $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \\ \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$.

1. **1.a.** Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

Notons, pour tout $i \in [\![1;4]\!]$ et $j \in \mathbb{N}^*$, $B_{i,j}$ l'évènement "on tire la boule numéro i lors du j-ième tirage".

- Commençons par remarquer que $X_2(\Omega) = [\![1;2]\!]$.
- ◇ L'évènement $[X_2 = 1]$ est réalisé si, et seulement si, les deux tirages ont fourni la même boule. Ainsi :

$$[X_2 = 1] = \bigcup_{i=1}^{4} (B_{i,1} \cap B_{i,2})$$

◇ Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_2 = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} (B_{i,1} \cap B_{i,2})\right) && \text{par incompatibilité, pour } i \neq k \text{ de } B_{i,1} \text{ et } B_{k,1} \\
&= \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(B_{i,1} \cap B_{i,2}) && \text{par indépendances des tirages, car effectués avec remise} \\
&= \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(B_{i,1})\mathbb{P}(B_{i,2}) && \text{par équiprobabilité des boules} \\
&= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- On en déduit, puisque $X_2(\Omega) = \{1;2\}$, et donc que $\big([X_2 = 1], [X_2 = 2]\big)$ est un système complet d'évènements :

$$\mathbb{P}([X_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{3}{4}$$

Conclusion : $X_2(\Omega) = \{1;2\}$
$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{3}{4}$.

1.b. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

Puisque $X_2(\Omega) = \{1;2\}$, on a :

- $$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_2) &= 1\mathbb{P}([X_2 = 1]) + 2\mathbb{P}([X_2 = 2]) \\
&= \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

- Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_2^2) &= 1^2\mathbb{P}([X_2 = 1]) + 2^2\mathbb{P}([X_2 = 2]) \\
&= \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

- D'où, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_2) &= \mathbb{E}(X_2^2) - \big(\mathbb{E}(X_2)\big)^2 \\
&= \frac{13}{4} - \frac{49}{16} \\
&= \frac{52 - 49}{16} \\
&= \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X_2) = \frac{7}{4}$ et $\mathbb{V}(X_2) = \frac{3}{16}$.

1.c. On note F la fonction de répartition de X_2. Déterminer l'expression, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de $F(x)$ en fonction de x, puis tracer sa courbe représentative.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(x) = \mathbb{P}([X_2 \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in [1;2[\\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

D'où on déduit sa courbe, que je n'ai pas envie de tracer.

2. **2.a.** Déterminer U_1.

On sait que X_1 est constante égale à 1.

Conclusion : $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.b. Préciser l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n = 1$, alors $X_n(\Omega) = \{1\}$.
- Si $n = 2$, alors $X_n(\Omega) = \{1;2\}$.
- Si $n = 3$, alors $X_n(\Omega) = \{1;2;3\}$.
- Si $n \geq 4$, alors $X_n(\Omega) = \{1;2;3;4\}$.

2.c. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation suivante : $U_{n+1} = AU_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Petite remarque

Même dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$, la famille $([X_n = k])_{k\in[\![1;4]\!]}$ est un sce (au pire, certains évènements sont vides).

- D'après la formule des probabilités totales, avec $([X_n = k])_{k\in[\![1;4]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [X_{n+1} = 1]) && \text{si } k \in \{2;3;4\}, \text{ alors } [X_n = k] \cap [X_{n+1} = 1] = \varnothing \\
&= \mathbb{P}([X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1]) && \mathbb{P}([X_n = 1]) \neq 0 \\
&= \mathbb{P}([X_n = 1])\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1])
\end{aligned}$$

Supposons l'évènement $[X_n = 1]$ réalisé.
Dans ce cas, l'évènement $[X_{n+1} = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on tire encore la même boule au $n+1$-ième tirage (la même qu'aux n tirages précédents).
Par équiprobabilité des boules, on a ainsi :

$$\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{4}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{4}\mathbb{P}([X_n = 1])$$

- De manière analogue, on obtient (sous réserve que $\mathbb{P}([X_n = 2]) \neq 0$) :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \mathbb{P}([X_n = 1])\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 2])\mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 2])$$

Ensuite :
  - Supposons l'évènement $[X_n = 1]$ réalisé.
    Dans ce cas, l'évènement $[X_{n+1} = 2]$ est réalisé si, et seulement si, on tire une boule qui n'est pas celle tirée jusqu'alors.
    Par conséquent :
    $$\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 2]) = \frac{3}{4}$$
  - Supposons l'évènement $[X_n = 2]$ réalisé.
    Dans ce cas, l'évènement $[X_{n+1} = 2]$ est réalisé si, et seulement si, on tire une boule qui a déjà été tirée
    Par conséquent :
    $$\mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \frac{3}{4}\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 2])$$

- Et de la même façon, puisque $[X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 3] = \varnothing$, on obtient :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 2]) + \frac{3}{4}\mathbb{P}([X_n = 3])$$

- Ainsi que :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 4]) = \frac{1}{4}\mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} = AU_n$.

3. On considère les quatre matrices V_1, V_2, V_3, V_4 à 4 lignes et 1 colonne, définies par : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.a. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4$$

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}\right)^{1-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} V_3 + V_4 &= V_1 + 3V_2 + 3V_3 + V_4 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4$ et montrons que $U_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n} V_3 + V_4$.
D'après la question 2., on a :

$$\begin{array}{rcl} U_{n+1} & = & AU_n \\ & = & A\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} AV_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} AV_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} AV_3 + AV_4 \end{array}$$

Or, après calculs, on trouve :

$$AV_1 = \frac{1}{4}V_1 \;\; ; \;\; AV_2 = \frac{1}{2}V_2 \;\; ; \;\; AV_3 = \frac{3}{4}3V_3 \;\; ; \;\; AV_4 = V_4$$

D'où :

$$U_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n} V_3 + V_4$$

L'hérédité est ainsi vérifiée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4$.

3.b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire X_n.
Pas de difficulté particulière, mais long à écrire...

4. 4.a. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$.
Pareil...

4.b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$. Commenter.

- De tête, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 4$$

- Au bout d'un grand nombre de lancers, les 4 boules auront été tirées (c'est plutôt normal !).

●●○○ Exercice 15

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0;1[$ et donnant FACE avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose les lancers indépendants et on note :

- pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, P_k l'évènement : "obtenir PILE au k-ième lancer" et $F_k = \overline{P_k}$;
- X_n la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenues avant l'apparition du premier PILE. On convient que X_n prend la valeur n si aucun PILE n'est obtenu au cours des n lancers.

1. Préciser $X_n(\Omega)$.
Assimilons chaque issue de cette expérience à un n-uplet composé de P (PILE) ou de F (FACE).
   - Soit $\omega \in \Omega$. Sans difficulté, $X_n(\Omega)$ est un entier compris entre 0 et n. Ainsi : $X_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
   - Réciproquement, soit $k \in [\![0;n]\!]$.
     - Si $k = 0$: on remarque que l'issue, qui est un n-uplet, $(P, P, ..., P)$ réalise l'évènement $[X_n = 0]$.
     - Si $k = n$: on remarque que l'issue $(F, F, ..., F)$ réalise l'évènement $[X_n = n]$.
     - Si $k \in [\![1;n-1]\!]$: on remarque que l'issue $(F, ..., F, P, ..., P)$ composée de k FACE puis des PILE réalise l'évènement $[X_n = k]$.

   Par conséquent, l'évènement $[X_n = k]$ est toujours non vide.
   On a ainsi établir :
   $$[\![0;n]\!] \subset X_n(\Omega)$$

Petit à petit...
Vous devez tous être en mesure de donner $X_n(\Omega)$. En revanche, la justification demande un travail de rédaction et de justification non négligeable, qui n'est pas la priorité dans votre travail.

Conclusion : $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

2. Calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ ainsi que $\mathbb{P}([X_n = n])$.
   - $[X_n = 0] = P_1$, donc $\mathbb{P}([X_n = 0]) = \mathbb{P}(P_1) = p$.
   -
     - L'évènement $[X_n = n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n FACE sans jamais obtenir PILE. Ainsi :
     $$[X_n = n] = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$$
     - Par conséquent :
     $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_n = n]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) \quad \text{par indépendance des lancers} \\ & = & = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(F_k) \\ & = & = q^n \end{array}$$

➠Réflexe !
On travaille sur les évènements avant de calculer les probabilités !

Petite remarque
L'écriture avec $\bigcap$ et $\prod$ n'est pas indispensable (même si elle ne devrait pas trop poser souci) ; on peut se contenter de l'écriture avec les pointillés.

Conclusion : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = p$ et $\mathbb{P}([X_n = n]) = q^n$.

3. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = k])$.
Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$.

- L'évènement $[X_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient k-FACE puis un PILE. Ainsi :

$$[X_n = k] = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right) \cap P_{k+1}$$

- Pr conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right) \cap P_{k+1}\right) && \text{par indépendance des lancers} \\ &= q^k p \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = q^k p$.

4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P}([X_n = 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}([X_n = n]) \\ &= p + \sum_{k=1}^{n-1} q^k p + q^n && q^0 = 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k p + q^n \\ &= p \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n && q \neq 1 \\ &= p\frac{1-q^n}{1-q} + q^n && p = 1-q \\ &= 1 - q^n + q^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Attention ! Il n'y a pas qu'une seule expression de $\mathbb{P}([X_n = k])$ pour tous les k de $[\![0; n]\!]$ (même si les cas $\mathbb{P}([X_n = 0])$ peut être inclus dans le cas de la question précédente.

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

5. Considérons la fonction f définie sur $]0;1[$ par : $\forall x \in]0;1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

5.a. Soit $x \in]0;1[$. En exprimant de deux façons différentes $f'(x)$, établir :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

- f étant une fonction polynomiale, elle est dérivable sur $]0;1[$. Et comme $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x^k$, on obtient, par linéarité de la dérivation :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$$

- Mais on sait aussi, puisque $x \in]0;1[$, que $f(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$. D'où, en dérivant sous cette forme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-nx^{n-1}(1-x) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1} + nx^n + 1 - x^n}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

En égalant ces deux expressions, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

Puis, on obtient le résultat voulu en multipliant par x.

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

5.b. En déduire l'espérance de X_n.

Puisque $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X_n = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X_n = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} kq^k p + nq^n \\
&= p\sum_{k=1}^{n-1} kq^k + nq^n && \text{question précédente, } q \in]0;1[\\
&= p\frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1}}{(1-q)^2} + nq^n && p = 1-q \\
&= \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1}}{1-q} + nq^n \\
&= \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1} + nq^n(1-q)}{1-q} \\
&= \frac{q + q^n(-n + (n-1)q + n(1-q))}{1-q} \\
&= \frac{q + q^n(-q)}{1-q} \\
&= \frac{q - q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{q - q^{n+1}}{1-q}$.

✘ Attention ! L'expression de $\mathbb{P}([X_n = n])$ n'est pas la même que celle des $\mathbb{P}([X_n = k])$, avec $k \in [\![1;n-1]\!]$.

5.c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Puisque $q \in]0;1[$, on a : $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{q}{1-q} = \dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{p} - 1$.

●●●○ Exercice 16 - Loi d'un minimum

Dans toute l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On dit qu'une variable aléatoire X, définie sur Ω, suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ lorsque :

- $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$
- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{n}$

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On note $M = \min(X, Y)$.

1.a. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}([X \geq k])$.

Soit $k \in [\![1;n]\!]$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \geq k]) &= \sum_{i=k}^{n} \mathbb{P}([X = i]) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n} \\
&= \frac{n-k+1}{n}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}([X \geq k])$.

1.b. Justifier que M est une variable aléatoire sur Ω.

Puisque X et Y sont deux applications définies sur Ω et à valeurs réelles, alors M l'est également.

Conclusion : M est une variable aléatoire.

1.c. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}([M \geq k])$.

Soit $k \in [\![1;n]\!]$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([M \geq k]) &= \mathbb{P}([\min(X,Y) \geq k]) \\
&= \mathbb{P}([X \geq k] \cap [Y \geq k]) && \text{par indépendance de X et Y} \\
&= \mathbb{P}([X \geq k])\mathbb{P}([Y \geq k]) && \text{d'après la question 1.a. et comme X et Y ont même loi} \\
&= \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([M \geq k]) = \left(\dfrac{n-k+1}{n}\right)^2$.

Pourquoi ? $x \geq \min(a,b) \iff (x \geq a \text{ et } x \geq b)$

1.d. En déduire la loi de M.

- Remarquons déjà que, puisque $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$, alors $M(\Omega) \subset [\![1;n]\!]$.
- Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
  - Si $k = n$:
    Puisque $M(\Omega) \subset [\![1;n]\!]$, on a :
    $$[M \geq n] = [M = n]$$
    D'où :
    $$\begin{aligned} \mathbb{P}([M = n]) &= \mathbb{P}([M \geq n]) && \text{question précédente} \\ &= \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$
  - Si $k \in [\![1;n-1]\!]$:
    On a :
    $$[M \geq k] = [M = k] \cup [M \geq k+1]$$
    Puis, par incompatibilité des évènements $[M = k]$ et $[M \geq k+1]$, on obtient :
    $$\mathbb{P}([M \geq k]) = \mathbb{P}([M = k]) + \mathbb{P}([M \geq k+1])$$
    D'où :
    $$\begin{aligned} \mathbb{P}([M = k]) &= \mathbb{P}([M \geq k]) - \mathbb{P}([M \geq k+1]) && \text{question précédente} \\ &= \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 \\ &= \frac{(n-k+1-(n-k))(n-k+1+n-k)}{n^2} \\ &= \frac{2n-2k+1}{n^2} \end{aligned}$$

  Les deux cas peuvent se regrouper pour conclure...

> **Conclusion :** $M(\Omega) = [\![1;n]\!]$
> $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([M = k]) = \dfrac{2n-2k+1}{n^2}$.

Important !
Cette écriture de $[M \geq k]$ est très utile pour retrouver la loi à partir de la fonction de répartition (il y en a une analogue sur $[\max(X,Y) \leq k]$... voir exercice suivant).

✓ Rigueur !
On voit bien qu'il fallait procéder à une disjonction de cas : pour utiliser le résultat de la question précédente sur $\mathbb{P}([X \geq k+1])$ il faut que $k+1 \leq n$...

Pourquoi ?
On peut maintenant conclure que $M(\Omega) = [\![1;n]\!]$, car pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $[M = k] \neq \varnothing$ (car de probabilité non nulle).

2. Soient maintenant $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On note $M = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

2.a. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}([M \geq k])$.

Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
On a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([M \geq k]) &= \mathbb{P}([\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \geq k]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \geq k] \cap [X_2 \geq k] \cap \ldots \cap [X_n \geq k]) && \text{par indépendance des variables aléatoires } X_i \\ &= \mathbb{P}([X_1 \geq k])\mathbb{P}([X_2 \geq k]) \times \ldots \times \mathbb{P}([X_n \geq k]) && \text{d'après la question \textbf{1.a.} et comme les } X_i \text{ suivent toute la loi uniforme sur } [\![1;n]\!] \\ &= \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([M \geq k]) = \left(\dfrac{n-k+1}{n}\right)^n$.

2.b. En déduire la loi de M.

- Remarquons déjà que, puisque, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $X_i(\Omega) = [\![1;n]\!]$, alors $M(\Omega) \subset [\![1;n]\!]$.
- Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
  - Si $k = n$:
    Puisque $M(\Omega) \subset [\![1;n]\!]$, on a :
    $$[M \geq n] = [M = n]$$
    D'où :
    $$\begin{aligned} \mathbb{P}([M = n]) &= \mathbb{P}([M \geq n]) && \text{question précédente} \\ &= \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$
  - Si $k \in [\![1;n-1]\!]$:
    On a :
    $$[M \geq k] = [M = k] \cup [M \geq k+1]$$
    Puis, par incompatibilité des évènements $[M = k]$ et $[M \geq k+1]$, on obtient :
    $$\mathbb{P}([M \geq k]) = \mathbb{P}([M = k]) + \mathbb{P}([M \geq k+1])$$
    D'où :
    $$\begin{aligned} \mathbb{P}([M = k]) &= \mathbb{P}([M \geq k]) - \mathbb{P}([M \geq k+1]) && \text{question précédente} \\ &= \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n-k}{n}\right)^n \\ &= \frac{(n-k+1)^n - (n-k)^n}{n^n} \end{aligned}$$

  Les deux cas peuvent se regrouper pour conclure...

> **Conclusion :** $M(\Omega) = [\![1;n]\!]$
> $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([M = k]) = \dfrac{(n-k+1)^n - (n-k)^n)}{n^n}$.

✓ Rigueur !
On voit bien qu'il fallait procéder à une disjonction de cas : pour utiliser le résultat de la question précédente sur $\mathbb{P}([X \geq k+1])$ il faut que $k+1 \leq n$...

Pourquoi ?
On peut maintenant conclure que $M(\Omega) = [\![1;n]\!]$, car pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $[M = k] \neq \varnothing$ (car de probabilité non nulle).

2.c. Notons $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 1]$. Démontrer : $\mathbb{P}(A) \geq 1 - e^{-1}$.
Indication : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ \ln(1+x) \leq \ldots$.

- On rappelle que :
$$\forall x \in]-1;+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$$

Trivial ! Bien entendu, tout le monde sait redémontrer ce résultat en moins de 2 minutes si besoin.

- $$\begin{array}{lll} \text{L'évènement A est réalisé} & \text{si, et seulement si,} & \text{il existe } i \in [\![1;n]\!] \text{ tel que } A_i \text{ soit réalisé} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{l'évènement } [M=1] \text{ est réalisé} \end{array}$$

  Par conséquent :
$$A = [M = 1]$$
  On en déduit :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(A) & = & \mathbb{P}([M=1]) & \\ & = & \dfrac{n^n - (n-1)^n}{n^n} & \text{d'après la question précédente} \\ & = & 1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n & \end{array}$$

- Or, en utilisant le rappel donné, avec $x = \dfrac{-1}{n} \in]-1;+\infty[$ (car $n \geq 2$), on a :
$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{-1}{n}$$
  D'où, puisque $n > 0$ et par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:
$$\exp\left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \leq e^{-1}$$
  Autrement dit :
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{-1}$$
  Ainsi :
$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 - e^{-1}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(A) \geq 1 - e^{-1}$.

●●●○ Exercice 17 - Loi d'un maximum

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On considère une urne composée de n boules, numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

1. Justifier que pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}([X \leq k]) = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
   - L'expérience consiste au tirage de 2 boules dans une urne en contenant n, toutes indiscernables au toucher.

     Par conséquent, Ω est l'ensemble des sous-ensembles de $[\![1;n]\!]$ à 2 éléments; donc $\text{Card}(\Omega) = \dbinom{n}{2}$.
   - Soit $k \in [\![2;n]\!]$.
$$\begin{array}{lll} \text{L'évènement } [X \leq k] \text{ est réalisé} & \text{si, et seulement si,} & \text{le plus grand des deux nombres est inférieur ou égal à } k \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{on a tiré 2 boules parmi les boules 1 à } k \end{array}$$
     Or, puisque $k \geq 2$, il y a $\dbinom{k}{2}$ sous-ensembles de $[\![1;k]\!]$ à deux éléments. Ainsi : $\text{Card}\big([X \leq k]\big) = \dbinom{k}{2}$.

     Par équiprobabilité (boules indiscernables au toucher), on a ainsi :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X \leq k]) & = & \dfrac{\text{Card}\big([X \leq k]\big)}{\text{Card}(\Omega)} \\ & = & \dfrac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} \\ & = & \dfrac{k!2!(n-2)!}{2!(k-2)!n!} \\ & = & \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)} \end{array}$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}([X \leq k]) = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.

2. En déduire la loi de X.
   - Commençons par remarquer que, puisqu'il est impossible que les deux boules tirées soient toutes deux numérotées 1, on a $X(\Omega) = [\![2;n]\!]$.
   - Soit $k \in [\![2;n]\!]$.
     - Si $k = 2$:

       Puisque $X(\Omega) = [\![2;n]\!]$, on a :
$$[M \leq 2] = [M = 2]$$
       D'où :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([M=2]) & = & \mathbb{P}([M \leq 2]) & \\ & = & \dfrac{2}{(n-1)} & \text{question précédente} \end{array}$$

♡ Astuce du chef ! ♡ On peut retrouver $X(\Omega)$ à partir de la fonction de répartition, donc à partir du résultat de la question précédente (même si nous n'avons l'expression de la fonction de répartition que sur $[\![2;n]\!]$ et pas sur $\mathbb{R}$).
En effet, la fonction de répartition est nulle "avant" $X(\Omega)$, constante égale à 1 "après" $X(\Omega)$, et possède des discontinuités en chaque élément de $X(\Omega)$.

◇ Si $k \in [\![3;n]\!]$. On a :

$$[M \leq k] = [M = k] \cup [M \leq k-1]$$

Puis, par incompatibilité des évènements $[M = k]$ et $[M \leq k-1]$:

$$\mathbb{P}([M \leq k]) = \mathbb{P}([M = k]) + \mathbb{P}([M \leq k-1])$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([M = k]) &= \mathbb{P}([M \leq k]) - \mathbb{P}([M \leq k-1]) && \text{question précédente, car } k-1 \geq 2 \\
&= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} \\
&= \frac{(k-1)(k-(k-2))}{n(n-1)} \\
&= \frac{2(k-1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Les deux cas peuvent se regrouper pour conclure...

> **Conclusion :** $X(\Omega) = [\![2;n]\!]$
> $\forall k \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$.

Important ! Cette écriture de $[M \leq k]$ est très utile pour retrouver la loi à partir de la fonction de répartition.

✓ Rigueur ! On voit bien qu'il fallait procéder à une disjonction de cas : pour utiliser le résultat de la question précédente sur $\mathbb{P}([X \leq k-1])$ il faut que $k-1 \geq 2$...

3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Puisque $X(\Omega) = [\![2;n]\!]$, on a :

-
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}([X = k]) && \text{question précédente et linéarité de la somme} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} k - 1 \right) \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{2}{n-1} \frac{(n+1)(2n+1) - 3(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n-2)}{3(n-1)} \\
&= \frac{2(n+1)}{3}
\end{aligned}$$

- Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=2}^{n} k^2\mathbb{P}([X = k]) && \text{question précédente et linéarité de la somme} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k^2(k-1) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=2}^{n} k^3 - \sum_{k=2}^{n} k^2 \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^3 - 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - 1 \right) \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{2}{n-1} \frac{3n(n+1)^2 - 2(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(3n(n+1) - 2(2n+1))}{6(n-1)} \\
&= \frac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{6(n-1)} && 1 \text{ est racine de } x \longmapsto 3x^2 - x - 2 \\
&= \frac{(n+1)(n-1)(3n+2)}{6(n-1)} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{6}
\end{aligned}$$

- D'où, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4(n+1)^2)}{9} \\
&= \frac{(n+1)\big(3(3n+2) - 8(n+1)\big)}{18} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{18}
\end{aligned}$$

Vérification ! Deux vérifications pour se conforter :
Puisque $n \geq 2$, la variance est bien positive...
Pour $n = 2$, la variable aléatoire X 'est constante égale à 2 : son espérance doit donc valoir 2 et sa variance 0...

●●○○ Exercice 18

On dispose d'une urne U_0 contenant deux boules noires et deux boules blanches, et d'urnes $U_1, U_2, U_3, \ldots$ contenant chacune deux boules blanches. On effectue des tirages selon le protocole suivant :

- on pioche au hasard deux boules dans l'urne U_0, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_1 ;
- on pioche au hasard deux boules dans l'urne U_1, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_2 ;
- on pioche au hasard deux boules dans l'urne U_2, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_3 ; et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne U_{n-1}, mais avant de procéder au tirage suivant. On pose $X_0 = 2$.

1. **Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance.**

   Notons, pour $i \in [\![1;n]\!]$, N_i l'évènement "on pioche une balle noire lors du i-ième tirage dans l'urne U_0".
   - Commençons déjà par remarquer que $X_1(\Omega) = \{0;1;2\}$.
   - ◇ L'évènement $[X_1 = 0]$ est réalisé si, et seulement si, aucune balle noire n'a été piochée dans l'urne U_0.
     D'où :
     $$[X_1 = 0] = \overline{N_1} \cap \overline{N_2}$$
     Par conséquent :
     $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_1 = 0]) & = & \mathbb{P}(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) & \mathbb{P}(\overline{N_1}) \neq 0 \\ & = & \mathbb{P}(\overline{N_1})\mathbb{P}_{\overline{N_1}}(\overline{N_2}) & \text{tirage sans remise} \\ & = & \frac{1}{2}\frac{1}{3} & \\ & = & \frac{1}{6} & \end{array}$$
     ◇ L'évènement $[X_1 = 1]$ est réalisé si, et seulement si, une seule balle noire a été piochée dans l'urne U_0.
     D'où :
     $$[X_1 = 1] = (N_1 \cap \overline{N_2}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2)$$
     Par conséquent :
     $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_1 = 1]) & = & \mathbb{P}\Big((N_1 \cap \overline{N_2}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2)\Big) & \text{par incompatibilité de } \mathbb{N}_1 \text{ et } \overline{N_1}\text{, donc de } N_1 \cap \overline{N_2} \text{ et } \overline{N_1} \cap N_2 \\ & = & \mathbb{P}(N_1 \cap \overline{N_2}) + \mathbb{P}(\overline{N_1} \cap N_2) & \mathbb{P}(N_1) \neq 0,\ \mathbb{P}(\overline{N_1}) \neq 0 \\ & = & \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(\overline{N_2}) + \mathbb{P}(\overline{N_1})\mathbb{P}_{\overline{N_1}}(N_2) & \text{tirage sans remise} \\ & = & \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} & \\ & = & \frac{2}{3} & \end{array}$$
     ◇ L'évènement $[X_1 = 2]$ est réalisé si, et seulement si, les deux balles noires ont été piochées dans l'urne U_0.
     D'où :
     $$[X_1 = 2] = N_1 \cap N_2$$
     Par conséquent :
     $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_1 = 2]) & = & \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) & \mathbb{P}(N_1) \neq 0 \\ & = & \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) & \text{tirage sans remise} \\ & = & \frac{1}{2}\frac{1}{3} & \\ & = & \frac{1}{6} & \end{array}$$

   Petite remarque

   On aurait aussi pu calculer deux probabilités, puis déduire la troisième du fait que $X_1(\Omega) = \{0;1;2\}$. L'avantage de la méthode proposée, bien que plus longue : elle permet une vérification des résultats (la somme des trois probabilités doit être égale à 1).

   Conclusion : $X_1(\Omega) = \{0;1;2\}$
   $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}([X_1 = 2]) = \frac{1}{6}$.

2. **Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'évènement $[X_n = 2]$.**
   - Puisque X_0 est constante égale à 2, on a $\mathbb{P}([X_0 = 2]) = 1$.
   - On sait déjà que $\mathbb{P}([X_1 = 2]) = \frac{1}{6}$.
   - Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$.
     Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k l'évènement "on pioche les deux balles noires dans l'urne U_k".
     ◇ L'évènement $[X_n = 2]$ est réalisé si, et seulement si, pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a pioché les deux balles noires dans l'urne U_k.
     Ainsi :
     $$[X_n = 2] = \bigcap_{k=0}^{n-1} A_k$$
     ◇ D'après la formule des probabilités composées (les conditionnements étant effectués par des évènements de probabilité non nulle) :
     $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_n = 2]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} A_k\right) \\ & = & \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}(A_1) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_0 \cap \ldots \cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \end{array}$$
     Or, pour tout $i \in [\![0;n-2]\!]$, l'évènement $\bigcap_{k=0}^{i} A_i$ est égal à l'évènement "l'urne U_{i+1} contient les deux balles noires".
     De plus, le tirage étant effectué sans remise, la probabilité, de piocher les deux balles noires dans

une urne les contenant, et contenant également les deux balles blanches, est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n = 2]) &= \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \ldots \times \frac{1}{6}}_{n \text{ facteurs}} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n\end{aligned}$$

Les trois cas peuvent se regrouper en un seul...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 2]) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

3. **3.a.** Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'on a : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

> **Petite remarque**
> Le résultat à établir est également valable si $n = 0$...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\big)$ comme système complet d'évènements, on a :

> **Pourquoi ?**
> C'est bien le cas, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \{0;1;2\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2] \cap [X_{n+1} = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2] \cap [X_{n+1} = 1]) &&\text{car } [X_n = 0] \cap [X_{n+1} = 1] = \varnothing \\ &= \mathbb{P}([X_n = 1])\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2])\mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 1]) &&\text{les évènements } [X_n = 1] \text{ et } [X_n = 2] \text{ sont de p} \\ &= \mathbb{P}([X_n = 1])\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 1])\left(\frac{1}{6}\right)^n &&\text{question précédente}\end{aligned}$$

Or :

- Supposons l'évènement $[X_n = 1]$ réalisé. Dans ce cas, l'urne U_n contient, avant d'y effectuer les tirages, trois balles blanches et une balle noire.
  Par conséquent :

  $$\begin{aligned}\text{l'évènement } [X_{n+1} = 1] \text{ est réalisé} \quad &\text{si, et seulement si,} \quad \text{l'urne } X_{n+1} \text{ contient, avant d'y effectuer les tirages, trois balles blanches et un} \\ &\text{si, et seulement si,} \quad \text{la balle noire a été tirée dans l'urne } U_n\end{aligned}$$

  Or, les tirages étant effectués sans remise, la probabilité de tirer la balle noire dans l'urne U_n est égale à $\frac{1}{4} \times \frac{3}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
- Supposons l'évènement $[X_n = 2]$ réalisé. Dans ce cas, l'urne U_n contient, avant d'y effectuer les tirages, deux balles blanches et deux balles noires.
  Par conséquent :

  $$\begin{aligned}\text{l'évènement } [X_{n+1} = 1] \text{ est réalisé} \quad &\text{si, et seulement si,} \quad \text{l'urne } X_{n+1} \text{ contient, avant d'y effectuer les tirages, deux balles blanches et un} \\ &\text{si, et seulement si,} \quad \text{une balle noire a été tirée dans l'urne } U_n\end{aligned}$$

  Or, les tirages étant effectués sans remise, la probabilité de tirer une balle noire dans l'urne U_n est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n non nul : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

3.b. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1]) + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([X_n = 1])$ en fonction de n.
Cette expression est-elle encore valable pour $n = 0$?

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

  $$\begin{aligned}u_{n+1} &= \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} &&\text{question précédente} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} &&\mathbb{P}([X_n = 1]) = u_n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}u_n - \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\left(-1 + \frac{2}{3} + 2\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2}u_n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\left(-1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}u_n\end{aligned}$$

  Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = \mathbb{P}([X_1 = 1]) + \frac{1}{3} = 1$.
- On en déduit :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

  D'où :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n = 1]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- Or :

  $$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^0 = 2 - 2 = 0 = \mathbb{P}([X_0 = 1])$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 1]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n.$

3.c. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}([X_n = 0])$ en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\big([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\big)$ est un système complet d'évènements, on a :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) + \mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) = 1$$

Puis, on utilise les résultats des questions 2. et 3.b....

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^n.$

Vérification !
On vérifie le résultat pour $n = 0$ et $n = 1$ en utilisant le fait que $\mathbb{P}([X_0 = 0]) = 0$ et $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \frac{1}{6}$... C'est bon !

4. Calculer, pour tout entier naturel n, l'espérance de X_n. Déterminer la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $X_n(\Omega) = \{0;1;2\}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_n) & = & 0\mathbb{P}([X_n = 0]) + 1\mathbb{P}([X_n = 1]) + 2\mathbb{P}([X_n = 2]) \quad \text{questions précédentes} \\ & = & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{array}$$

- Puisque $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$$

Vérification !
On vérifie le résultat pour $n = 0$: puisque X_0 est constante égale à 2, on a $\mathbb{E}(X_0) = 2$... c'est bon !

Petite remarque
Il est normal que cette espérance tende vers 0... En fait, la variable aléatoire X_n va tendre (si l'on définit une notion de limite de variable aléatoire...) vers la variable aléatoire suivant la loi certaine égale à 0.
Au bout d'un "grand nombre" de tirages, les urnes ne contiendront presque-sûrement pas de balle noire.

●●●○ Exercice 19

Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k, alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0;1[$, sur le point d'abscisse 0 sinon. On appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1.
   - $X_1(\Omega) = \{0;1\}$
   - De plus :
     - $[X_1 = 1]$ ="le mobile est passé du point 0 au point 1"; d'où $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$
     - et ainsi : $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p$

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 1$.
     On a vu, à la question précédente, que $X_1(\Omega) = \{0;1\}$: l'initialisation est ainsi vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et montrons que $X_{n+1}(\Omega) = [\![0;n+1]\!]$.
     Par hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Donc, à l'instant n, il existe $k \in [\![0;n]\!]$ tel que le mobile se situe en position k.
     Par conséquent, à l'étape $n+1$, le mobile peut se déplacer en position 0 ou en position $k+1$. Ainsi, les points possibles pour la position du mobile à l'instant $n+1$ sont : 0 et tous les $k+1$, avec $k \in [\![0;n]\!]$.
     Autrement dit : $X_{n+1}(\Omega) = [\![0;n+1]\!]$: l'hérédité est établie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1;n]\!]$: $\mathbb{P}([X_n = k]) = p\mathbb{P}([X_{n-1} = k-1])$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1;n]\!]$.
   D'après la question précédente, $X_{n-1}(\Omega) = [\![0;n-1]\!]$. Ainsi, la famille $\big([X_{n-1} = i]\big)_{i \in [\![0;n-1]\!]}$ est un système complet d'évènements, et d'après la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\Big([X_{n-1} = i] \cap [X_n = k]\Big)$$

   Or, le mobile se déplace seulement de deux façons différentes : soit d'un point i au suivant, soit d'un point i au point 0. Par conséquent, puisque $k \neq 0$, pour être au point k à l'instant n, il faut avoir été au point $k-1$ à l'instant $n-1$.
   D'où :

$$\forall i \neq k-1,\ [X_{n-1} = i] \cap [X_n = k] = \varnothing$$

   Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_n = k]) & = & \mathbb{P}\Big([X_{n-1} = k-1] \cap [X_n = k]\Big) \\ & = & \mathbb{P}\Big([X_{n-1} = k-1]\Big) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1} = k-1]}([X_n = k]) \\ & = & p\mathbb{P}\Big([X_{n-1} = k-1]\Big) \end{array}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1;n]\!]$: $\mathbb{P}([X_n = k]) = p\mathbb{P}([X_{n-1} = k-1])$.

Pourquoi ?
Tous les termes de la somme pour $i \neq k-1$ sont nuls.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = p\mathbb{E}(X_{n-1}) + p$; puis déterminer l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et p.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X_n = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X_n = k]) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kp\mathbb{P}([X_{n-1} = k-1]) && \text{changement d'indice } i = k-1 \\
&= p\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\mathbb{P}([X_{n-1} = i]) \\
&= p\sum_{i=0}^{n-1} i\mathbb{P}([X_{n-1} = i]) + p\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = i]) && X_{n-1}(\Omega) = [\![0;n-1]\!] \\
&= p\mathbb{E}(X_{n-1}) + p \times 1
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = p\mathbb{E}(X_{n-1}) + p$

- On remarque alors que la suite $\left(\mathbb{E}(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique...
  - Point fixe de $x \longmapsto px + p$: $\dfrac{p}{1-p}$ (car $p \neq 1$).
  - Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{E}(X_n) - \dfrac{p}{1-p}$. On vérifie sans mal que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique, de raison p et de premier terme $u_1 = \mathbb{E}(X_1) - \dfrac{p}{1-p} = p - \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{-p^2}{1-p}$.

    D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{-p^2}{1-p}p^{n-1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p}{1-p}\left(1 - \dfrac{p}{1-p}p^{n-1}\right) = \dfrac{p}{1-p}\left(1 - \dfrac{p^n}{1-p}\right)$.

5. **5.a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n])$ et $\mathbb{P}([X_n = 0])$.

- L'évènement $[X_n = n]$ est réalisé si, et seulement si, à chaque étape, le mobile s'est déplacé sur le point suivant. Par conséquent : $\mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$.
- Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec $\left([X_{n-1} = i]\right)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = 0]) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [X_{n-1} = i]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = i) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}([X_n = 0]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = i]) \times (1-p) \\
&= (1-p)\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = i]) && X_{n-1}(\Omega) = [\![0;n-1]\!] \\
&= 1-p
\end{aligned}$$

5.b. En utilisant la question **3.**, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.

Par récurrence...

✘ Attention ! La récurrence porte ici sur n... et le résultat à établir inclut la quantification en k !

- **Initialisation.** Pour $n = 1$.
  Ainsi $n - 1 = 0$, et donc $[\![0;n-1]\!] = \{0\}$.
  Or, on sait que $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$ d'après la question précédente.
  Et comme $p^0(1-p) = 1-p$, on a bien : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = p^0(1-p)$. L'initialisation est bien vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons "$\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$" et montrons "$\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p^k(1-p)$".
  Soit $k \in [\![0;n]\!]$.
  - Si $k = 0$, le résultat est valable, d'après la question **5.a.**
  - Si $k \in [\![1;n]\!]$, d'après la question **3.**, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) &= p\mathbb{P}([X_n = k-1]) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= pp^{k-1}(1-p) \\
&= p^k(1-p)
\end{aligned}$$

  L'hérédité est établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.

5.c. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}([X_n = n]) && \text{questions } \textbf{5.a.} \text{ et } \textbf{5.b.}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n \\
&= (1-p)\sum_{k=0}^{n-1} p^k + p^n && p \neq 1\\
&= (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} + p^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

●●●○ Exercice 20

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On dispose d'un paquet de n cartes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$ selon le protocole suivant :

- la première carte C_1 est donnée à J_1 ;
- la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;
- la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;
- et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs $J_1, \ldots, J_n$.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n-1])$.

- X_n prend des valeurs entières entre 0 et n ; et le joueur J_1 a toujours au moins une carte. Par conséquent : $X_n(\Omega) \subset [\![0; n-1]\!]$.
  Réciproquement :
  - L'évènement $[X_n = 0]$ est réalisé en donnant, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la carte C_i au joueur J_i.
  - Pour réaliser l'évènement $[X_n = 1]$, il suffit que pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, la carte C_i soit donnée au joueur J_i et que la carte C_n soit donnée à J_1.
  - Soit $k \in [\![2; n-2]\!]$. Pour réaliser l'évènement $[X_n = k-2]$, il suffit que, pour tout $i \in [\![1; n-k]\!]$, la carte C_i soit donnée au joueur J_i et que pour tout $i \in [\![n-k+1; n-1]\!]$, la carte C_i soit donnée au joueur J_1.
  - L'évènement $[X_n = n-1]$ est réalisé en donnant toutes les cartes au joueur J_1.

  Ainsi, pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, $[X_n = k] \neq \varnothing$.

  Conclusion : $X_n(\Omega) = [\![0; n-1]\!]$.

Petite remarque

Il s'agit de démontrer l'égalité de deux ensembles. On procède par double-inclusion. Pour vérifier que $[\![0; n-1]\!] \subset X_n(\Omega)$, il faut démontrer que chaque entier de $[\![0; n-1]\!]$ est dans $X_n(\Omega)$. Mais, "$k \in X_n(\Omega)$" équivaut à "k est l'image d'au moins une issue par X_n", ce qui équivaut à également "$[X_n = k]$ est non vide" (on rappelle que $[X_n = k]$ est en fait l'ensemble des issues dont l'image par X_n est égale à k).

- L'évènement $[X_n = 0]$ est réalisé si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, la carte C_i est donnée au joueur J_i.
  Notons justement, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, l'évènement A_i : "la carte C_i est donnée au joueur J_i.
  Par conséquent :

$$[X_n = 0] = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

  Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = 0]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) && \text{indépendance des distributions}\\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) && \text{équiprobabilité du choix des joueurs : 1 favorable } (J_i)\text{, sur } i \text{ joueurs au moment de distribuer } C_i\\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \\
&= \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

- L'évènement $[X_n = n-1]$ est réalisé si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, la carte C_i est donnée au joueur J_1.
  Notons justement, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, l'évènement A'_i : "la carte C_i est donnée au joueur J_1.
  Par conséquent :

$$[X_n = n-1] = \bigcap_{i=1}^{n} A'_i$$

  Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = n-1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A'_i\right) && \text{indépendance des distributions}\\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A'_i) && \text{équiprobabilité du choix des joueurs : 1 favorable } (J_1)\text{, sur } i \text{ joueurs au moment de distribuer } C_i\\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \\
&= \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

2. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
Déterminer la loi de B_i. Exprimer X_n en fonction des B_i et en déduire l'espérance de X_n.

- Soit $i \in [\![1;n]\!]$.
  - Puisque le joueur J_1 reçoit toujours au moins une carte, on a $B_1 = 0$.
  - Soit $i \in [\![2;n]\!]$.

    l'évènement $[B_i = 1]$ est réalisé si, et seulement si, J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution
    si, et seulement si, J_i n'a reçu aucune des cartes $C_i, C_{i+1}, ..., C_n$ — J_i n'est pas présent lors des précé

    Pour tout $j \in [\![i;n]\!]$, notons $D_{i,j}$ l'évènement "la carte C_j n'est pas donnée au joueur J_i". Ainsi :

    $$[J_i = 1] = \bigcap_{j=i}^{n} D_{i,j}$$

    Et ainsi :

    $$\begin{aligned}\mathbb{P}([B_i = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i}^{n} D_{i,j}\right) && \text{par indépendance des distributions}\\ &= \prod_{j=i}^{n} \mathbb{P}(D_{i,j}) && \text{équiprobabilité du choix des joueurs : } j-1 \text{ favorables sur } j\\ &= \prod_{j=i}^{n} \frac{j-1}{j} && \text{télescopage}\\ &= \frac{i-1}{n}\end{aligned}$$

    Et puisque $B_i(\Omega) = \{0;1\}$, on a ainsi :

    $$\mathbb{P}([B_i = 0]) = 1 - \frac{i-1}{n}$$

Conclusion : B_1 est constante égale à 0 ;
$\forall i \in [\![2;n]\!]$, $B_i(\Omega) = \{0;1\}$, $\mathbb{P}([B_i = 1]) = \dfrac{i-1}{n}$ et $\mathbb{P}([B_i = 0]) = 1 - \dfrac{i-1}{n}$.

- Puisque X_n est le nombre de joueurs n'ayant reçu aucune carte, on a :

  $$X_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$$

- On a ainsi :

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) && \text{par linéarité de l'espérance}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(B_i) && B_1 = 0 \text{ et } \forall i \in [\![2;n]\!],\ B_i(\Omega) = \{0;1\}\\ &= 0 + \sum_{i=2}^{n} (0\mathbb{P}([B_i = 0]) + 1\mathbb{P}([B_i = 1]))\\ &= \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{n} && \text{changement d'indice } k = i-1\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\\ &= \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

3. Donner la loi de X_4.

- On sait déjà que $X_4(\Omega) = [\![0;3]\!]$.
- On sait également que :
  - $\mathbb{P}([X_4 = 0]) = \dfrac{1}{24}$
  - $\mathbb{P}([X_4 = 3]) = \dfrac{1}{24}$

  Or, on doit avoir :

  $$\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}([X_4 = k]) = 1$$

  mais aussi, puisque $\mathbb{E}(X_4) = \dfrac{3}{2}$, on doit avoir :

  $$\sum_{k=0}^{3} k\mathbb{P}([X_4 = k])$$

  Autrement dit, on doit avoir : $\begin{cases} \mathbb{P}([X_4 = 1]) + \mathbb{P}([X_4 = 2]) = \dfrac{11}{12} \\ \mathbb{P}([X_4 = 1]) + 2\mathbb{P}([X_4 = 2]) = \dfrac{11}{8} \end{cases}$ Après résolution de ce système,

  on obtient : $\begin{cases} \mathbb{P}([X_4 = 1]) = \dfrac{11}{24} \\ \mathbb{P}([X_4 = 2]) = \dfrac{11}{24} \end{cases}$

Conclusion : $X_4(\Omega) = [\![0;3]\!]$
$\mathbb{P}([X_4=0]) = \mathbb{P}([X_4=3]) = \dfrac{1}{24}$; $\mathbb{P}([X_4=1]) = \mathbb{P}([X_4=2]) = \dfrac{11}{24}$.

4. **4.a.** Montrer que pour i et j dans $[\![1,n]\!]$ tels que $i<j$, on a :

$$\mathbb{P}\big([B_i=1]\cap[B_j=1]\big) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

Soient $i,j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i<j$.
L'évènement $[B_i=1]\cap[B_j=1]$ est réalisé si, et seulement si, les cartes $C_i, C_{i+1}, \ldots, C_{j-1}$ ne sont pas données à J_i ET les cartes $C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n$ ne sont données ni à J_i ni à J_j.
Par une démarche analogue à celle mise en place en question 2., on a ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([B_i=1]\cap[B_j=1]\big) &= \prod_{k=i}^{j-1}\frac{k-1}{k} \times \prod_{k=j}^{n}\frac{k-2}{k} \quad \text{télescopages}\\ &= \frac{i-1}{j-1}\times\frac{(j-2)(j-1)}{(n-1)n}\\ &= \frac{(i-1)(j-2))}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Conclusion : pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i<j$, on a $\mathbb{P}\big([B_i=1]\cap[B_j=1]\big) = \dfrac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$.

4.b. Soient $i,j\in[\![1;n]\!]$, avec $i\neq j$. Les évènements $[B_i=1]$ et $[B_j=1]$ sont-ils indépendants ?
Quitte à échanger i et j (rôles symétriques), on peut supposer que $i<j$.
D'après la question précédente, on a :

$$\mathbb{P}\big([B_i=1]\cap[B_j=1]\big) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

Et, d'après la question 2. :

$$\mathbb{P}([B_i=1]) = \frac{i-1}{n} \quad ; \quad \mathbb{P}([B_j=1]) = \frac{j-1}{n}$$

- Si $i=1$:
  Alors on a :
  $$\mathbb{P}\big([B_1=1]\cap[B_j=1]\big) = 0 = \mathbb{P}\big([B_1=1]\big)\times\mathbb{P}\big([B_j=1]\big)$$
  Dans ce cas, les évènements $[B_i=1]$ et $[B_j=1]$ sont indépendants.

Petite remarque
On sait que $[B_1=1]=\varnothing$ et que l'évènement impossible est indépendant de tous les autres... C'est cohérent !

- Si $i\neq 1$:
  Alors :
  $$\begin{aligned}\big([B_i=1] \text{ et } [B_j=1] \text{ sont indépendants}\big) &\iff \mathbb{P}\big([B_i=1]\cap[B_j=1]\big) = \mathbb{P}([B_1=1])\times\mathbb{P}([B_j=1])\\ &\iff \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)} = \frac{(-1)(j-1)}{n^2} \quad i-1\neq 0,\ n\neq 0\\ &\iff \frac{j-2}{n-1}\,\frac{j-1}{n} \quad n\neq 0,\ n\neq 1\\ &\iff n(j-2) = (n-1)(j-1)\\ &\iff nj-2n = nj-j-n+1\\ &\iff j = n+1\end{aligned}$$
  Or on sait que $j\in[\![1;n]\!]$, donc $j\neq n+1$. Par équivalences, on a ainsi :
  $$\mathbb{P}\big([B_i=1]\cap[B_j=1]\big) \neq \mathbb{P}\big([B_1=1]\big)\times\mathbb{P}\big([B_j=1]\big)$$
  Les évènements $[B_i=1]$ et $[B_j=1]$ ne sont pas indépendants.

Conclusion : pour tout $j\in[\![2;n]\!]$, les évènements $[B_1=1]$ et $[B_j=1]$ sont indépendants
pour tous $i,j\in[\![2;n]\!]$ tels que $i\neq j$, les évènements $[B_i=1]$ et $[B_j=1]$ ne sont pas indépendants.

●●●○ Exercice 21

On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise. On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- X_1 est une variable aléatoire constante égale à 1,
- pour $k\in[\![2;+\infty[\![$, $X_k=1$ si le numéro obtenu au k-ième tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents, et $X_k=0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_2.
   - Remarquons déjà que $X_2(\Omega)=\{0;1\}$.
   - Ensuite :
     l'évènement $[X_2=1]$ est réalisé si, et seulement si, le numéro obtenu au deuxième tirage n'a pas été obtenu au premier tirage
     si, et seulement si, on pioche une des n balles non tirées au premier tirage

   Par équiprobabilité du tirage des boules, on a ainsi :
   $$\mathbb{P}([X_2=1]) = \frac{n}{n+1}$$
   - Puisque $X_2(\Omega)=\{0;1\}$ et que $\big([X_2=0],[X_2=1]\big)$ est alors un système complet d'évènements, on a :
   $$\mathbb{P}([X_2=0]) = 1-\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $X_2(\Omega) = \{0;1\}$
$\mathbb{P}([X_2 = 0]) = \dfrac{1}{n+1}$; $\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \dfrac{n}{n+1}$.

2. Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$. Montrer :

$$X_k(\Omega) = \{0;1\} \ ; \ \mathbb{P}([X_k = 1]) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1}$$

En déduire l'espérance de X_k.

- Montrons que $X_k(\Omega) = \{0;1\}$.
  - $\boxed{\subset}$ De façon immédiate, on a $X_k(\Omega) \subset \{0;1\}$.
  - $\boxed{\supset}$ Montrons que $\{0;1\} \subset X_k(\Omega)$.
    - $\rightsquigarrow$ Pour réaliser l'évènement $[X_k = 0]$, il suffit que la boule 1 soit tirée aux tirages 1 à k. Ainsi $[X_k = 0] \neq \varnothing$.
    - $\rightsquigarrow$ Pour réaliser l'évènement $[X_k = 1]$, il suffit que la boule 1 soit tirée aux tirages 1 à $k-1$ et que la boule 2 soit tirée au tirage k. Ainsi $[X_k = 1] \neq \varnothing$.

  Conclusion : $X_k(\Omega) = \{0;1\}$.

- Notons pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, et tout $i \in [\![1;k]\!]$, $B_{i,j}$ l'évènement "le numéro obtenu au i-ième tirage n'est pas le numéro j".
  On a ainsi :

$$\begin{aligned}
[X_k = 1] &= \left(B_{1,0} \cap B_{2,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0} \cap \overline{B_{k,0}}\right) \cup \left(B_{1,1} \cap B_{2,1} \cap \ldots \cap B_{k-1,1} \cap \overline{B_{k,1}}\right) \cup \ldots \cup \left(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap \ldots \cap B_{k-1,n} \cap \overline{B_{k,n}}\right) \\
&= \bigcup_{j=0}^{n}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_{i,j}\right) \cap \overline{B_{k,j}}\right)
\end{aligned}$$

  Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_k = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{n}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_{i,j}\right) \cap \overline{B_{k,j}}\right)\right) && \text{pour tous } j, j' \in [\![0;n]\!] \text{, les évènements } \overline{B_{k,j}} \text{ et } \overline{B_{k,j'}} \text{ sont incompatibles...} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_{i,j}\right) \cap \overline{B_{k,j}}\right) && \text{tirages avec remise, d'où indépendance des évènements} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(B_{i,j})\right)\mathbb{P}(\overline{B_{k,j}}) && \text{équiprobabilité des choix de la boule} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1}\frac{1}{n+1} \\
&= (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1}\frac{1}{n+1} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

  Conclusion : $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{k-1}$.

  AUTRE MÉTHODE POUR CALCULER CETTE PROBABILITÉ
  Ensuite, commençons par remarquer que, puisque les tirages sont effectués avec remise, il y a toujours $n+1$ boules dans l'urne.
  Aussi :

> **Petite remarque**
> On procède ici à rebours...
> On peut, puisque pour tous évènements $A_1, A_2, \ldots, A_k$, on a : $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = A_k \cap A_{k-1} \cap \ldots \cap A_1$.

l'évènement $[X_k = 1]$ est réalisé	si, et seulement si,	le numéro obtenu au k-ième tirage n'a pas été obtenu aux précédents tirages
	si, et seulement si,	pour tout $i \in [\![1;k-1]\!]$, le numéro obtenu au i-ème tirage n'est pas celui obtenu au k-ièm
	si, et seulement si,	pour tout $i \in [\![1;k-1]\!]$, on pioche au i-ième tirage une des n balles non tirées au k-ième

  Par indépendance des tirages (ceux-ci étant effectués avec remise), puis équiprobabilité des boules tirées :

$$\mathbb{P}([X_k = 1]) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1}$$

- Puisque $X_k(\Omega) = \{0;1\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_k) &= 0\mathbb{P}([X_k = 0]) + 1\mathbb{P}([X_k = 1]) \\
&= \mathbb{P}([X_k = 1]) \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

  Conclusion : $\mathbb{E}(X_k) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{k-1}$.

3. **3.a.** Montrer :

$$\forall i < j, \ \mathbb{P}\Big([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\Big) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i < j$.
En reprenant les évènements définis à la question précédente et en notant, pour tous $N, N' \in [\![0;n]\!]$ et

tout $m \in [\![1;n]\!]$, $B_{m,N,N'}$ l'évènement "le numéro obtenu au m-ième tirage n'est ni le numéro N ni le numéro N′", on a :

$$[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \bigcup_{N'=0}^{n} \left(\bigcup_{\substack{N=0\\N\neq N'}}^{n} \left(\left(\bigcap_{m=1}^{i-1} B_{m,N,N'} \right) \cap \overline{B_{i,N}} \cap \left(\bigcap_{m=i+1}^{j-1} B_{m,N'} \right) \cap \overline{B_{j,N}} \right) \right)$$

Par incompatibilité puis indépendance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) &= \sum_{N'=0}^{n} \left(\sum_{\substack{N=0\\N\neq N'}}^{n} \left(\left(\prod_{m=1}^{i-1} \mathbb{P}(B_{m,N,N'}) \right) \times \mathbb{P}(\overline{B_{i,N}}) \times \left(\prod_{m=i+1}^{j-1} \mathbb{P}(B_{m,N'}) \right) \times \mathbb{P}(\overline{B_{j,N}}) \right) \right) \\
&= \sum_{N'=0}^{n} \left(\sum_{\substack{N=0\\N\neq N'}}^{n} \left(\left(\prod_{m=1}^{i-1} \frac{n-1}{n+1} \right) \times \frac{1}{n+1} \times \left(\prod_{m=i+1}^{j-1} \frac{n}{n+1} \right) \times \frac{1}{n+1} \right) \right) \\
&= \sum_{N'=0}^{n} \left(\sum_{\substack{N=0\\N\neq N'}}^{n} \left(\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{i-1} \times \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{n}{n+1} \right)^{j-i-1} \times \frac{1}{n+1} \right) \right) \\
&= \sum_{N'=0}^{n} \left(\sum_{\substack{N=0\\N\neq N'}}^{n} \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i-1}}{(n+1)^j} \right) \\
&= \sum_{N'=0}^{n} \left(n \times \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i-2}}{(n+1)^{j-1}} \right) \\
&= (n+1) \times n \times \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i-1}}{(n+1)^j} \\
&= \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}
\end{aligned}$$

équiprobabilité des choix de la boule

Petite remarque

Champagne !!!
Sinon, on aurait pu "expliquer" cette probabilité...

3.b. En déduire, pour tous $i < j$, la loi du produit $X_i X_j$.

Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i < j$.

- Puisque $X_i(\Omega) = \{0;1\}$ et $X_j(\Omega) = \{0,1\}$, on a $X_i X_j(\Omega) \subset \{0;1\}$.
- Ensuite puisque X_i et X_j ne prennent que 0 et 1 comme valeurs, l'évènement $[X_i X_j = 1]$ est réalisé si, et seulement si, les évènements $[X_i = 1]$ et $[X_j = 1]$ sont simultanément réalisés.
  Ainsi :
  $$[X_i X_j = 1] = [X_i = 1] \cap [X_j = 1]$$
  Par conséquent, d'après la question précédente :
  $$\mathbb{P}([X_i X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$
  On en déduit $[X_i X_j = 0] \neq \varnothing$ et :
  $$\mathbb{P}([X_i X_j = 0]) = 1 - \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

Conclusion : $X_i X_j(\Omega) = \{0;1\}$,
$\mathbb{P}([X_i X_j = 0]) = 1 - \dfrac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$ et $\mathbb{P}([X_i X_j = 1]) = \dfrac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.

4. Soit $N \in [\![2;+\infty[\![$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction des X_k et en déduire son espérance.

- De façon immédiate, on a $Z_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$.
- Ensuite, on avait obtenu :
  $$\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{E}(X_k) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{k-1}$$
  Et on sait que X_1 est constante égale à 1, donc $\mathbb{E}(X_1) = 1$.
  Puisque $\left(\dfrac{n}{n+1} \right)^{1-1} = 1$, ces deux cas peuvent se regrouper :
  $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_k) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{k-1}$$

- On a enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_N) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) && \text{linéarité de l'espérance}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) && \text{par ce qui précède}\\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1} && \text{changement d'indice } k=i-1\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k} && \frac{n}{n+1} \neq 1\\
&= \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^N}{1-\frac{n}{n+1}}\\
&= (n+1)\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^N\right)
\end{aligned}$$

Petite remarque
On a ainsi $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}(Z_N) = (n+1)$. Au bout d'un grand nombre de tirages, on obtiendra en moyenne $n+1$ boules différentes. C'est normal : si on effectue un grand nombre de tirages, on tirera vraisemblablement toutes les boules possibles...

●●●○ Exercice 22 - Variables aléatoires indicatrices

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Que dire de $\mathbb{1}_\Omega$ et $\mathbb{1}_\varnothing$?

Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ prend la valeur 1 si l'évènement A est réalisé, 0 sinon. Ainsi :
- $\mathbb{1}_\Omega$ est constante égale à 1 ;
- $\mathbb{1}_\varnothing$ est constante égale à 0.

Vocabulaire
Si une variable aléatoire est constante égale à un réel c, on dit qu'elle suite la loi certaine égale à c.

★Subtile...★
Il n'y a pas $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0;1\}$ si $A = \Omega$ ou $A = \varnothing$ par exemple...

2. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_A$ ainsi que son espérance.

- On sait déjà que $\mathbb{1}_A(\Omega) \subset \{0;1\}$.
- Par définition, on a, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\omega \in [\mathbb{1}_A = 1] \iff \omega \in A$$

D'où :

$$[\mathbb{1}_A = 1] = A$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 1]) = \mathbb{P}(A)$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 0]) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) &= 0\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 0]) + 1\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 1])\\
&= \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

3. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Établir :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A \quad ; \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \quad ; \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$$

- Montrons que $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
Soit $\omega \in \Omega$.
  - Si $\omega \in A$.
    - ⇝ Par définition, on a ainsi $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$.
    - ⇝ Mais, puisque $\omega \in A$, on a $\omega \notin \overline{A}$. D'où $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$.

    Ainsi :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$

  - Si $\omega \in \overline{A}$.
    - ⇝ Puisque $\omega \in \overline{A}$, on a $\omega \notin A$, d'où $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$.
    - ⇝ Or $\omega \in \overline{A}$, donc, par définition : $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$.

    Ainsi :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$

Attention !
Il s'agit d'établir une égalité entre deux applications X et Y toutes deux définies sur Ω. On montre donc que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = Y(\omega)$.

> **Conclusion :** $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$.
> Autrement dit : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

- Montrons que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
Soit $\omega \in \Omega$.
  - Si $\omega \in A \cap B$.
    - ⇝ Alors, par définition, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1$.
    - ⇝ Aussi, puisque $\omega \in A \cap B$, on a $\omega \in A$ ET $\omega \in B$.
    Par définition, on a alors : $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ ET $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$.
    D'où :

$$\mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega) = 1$$

    Ainsi :

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$

- ◇ Si $\omega \in \overline{A \cap B}$.
  - ⇝ Alors, par définition, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$.
  - ⇝ De plus, on sait, d'après la loi de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
    Ainsi, puisque $\omega \in \overline{A} \cup \overline{B}$, on a $\omega \in \overline{A}$ ou $\omega \in \overline{B}$.
    D'où, par définition : $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$. Ce qui donne (règle du produit nul) :
    $$\mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) = 0$$

  Ainsi :
  $$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$

Conclusion : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$.
Autrement dit : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

- Montrons que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
  Utilisons les deux points précédents pour établir celui-ci...
  On sait que $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{1}_{A\cup B} & = & \mathbb{1}_{\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}} & \text{premier point de la question} \\
& = & 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}} & \text{deuxième point de la question} \\
& = & 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}} \times \mathbb{1}_{\overline{B}} & \text{premier point de la question} \\
& = & 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) & \\
& = & 1 - (1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{A\cap B}) & \\
& = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} &
\end{array}$$

Conclusion : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

Remarque

AUTRE MÉTHODE POSSIBLE :
Soit $\omega \in \Omega$.

- ◇ Si $\omega \in A \cup B$.
  - ⇝ Alors, par définition, $\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1$.
  - ⇝ Aussi, remarquons que $A \cup B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap B\right)$; et que c'est une union de trois évènements deux à deux incompatibles... Trois cas se présentent alors :
    - — Si $\omega \in A \cap B$.
      Alors par définition, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1$. Mais on a aussi $\omega \in A$ ET $\omega \in B$, donc $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ ET $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$.
      Ce qui donne :
      $$\mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 + 1 - 1 = 1$$
    - — Si $\omega \in A \cap \overline{B}$.
      Alors on a $\mathbb{1}_A(\omega) = 1, \mathbb{1}_B(\omega) = 0$, et puisque $\omega \notin B$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$. Ce qui donne :
      $$\mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 + 0 - 0 = 1$$
    - — Si $\omega \in B \cap \overline{A}$: analogue au cas précédent :
      $$\mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0 + 1 - 0 = 1$$

    Ainsi :
    $$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega)$$

  Ainsi :
  $$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$
- ◇ Si $\omega \in \overline{A \cup B}$.
  - ⇝ Alors, par définition, $\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 0$.
  - ⇝ De plus, on sait, d'après la loi de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
    Ainsi, puisque $\omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$, on a $\omega \in \overline{A}$ ET $\omega \in \overline{B}$.
    D'où, par définition : $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ ET $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$.
    Puisque $\omega \notin A$, on a$\omega \notin A \cap B$, donc $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$. D'où :
    $$\mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0 + 0 - 0 = 0$$

  Ainsi :
  $$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$

Conclusion : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
Autrement dit : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

4. Soit A un évènement tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini, on définit la **variable aléatoire**, notée $\mathbb{E}_A(X)$, par :

$$\mathbb{E}_A(X) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) \times \mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}}) \times \mathbb{1}_{\overline{A}}$$

✘ **Attention !**
$\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)$ et $\frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}})$ sont des réels !
Donc $\mathbb{E}_A(X)$ est bien une variable aléatoire : c'est une combinaison linéaire des variables aléatoires $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\overline{A}}$.

4.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\mathbb{E}_A(\mathbb{1}_A)$.
On a déjà :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}_A(\mathbb{1}_A) & = & \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A) \times \mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{\overline{A}}) \times \mathbb{1}_{\overline{A}} & \text{d'après les questions précédentes : } \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A\cap A} = \mathbb{1}_A \text{ et } \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{\overline{A}} = \mathbb{1}_{A\cap\overline{A}} = \mathbb{1}_\varnothing = 0 \\
& = & \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) \times \mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(0) \times \mathbb{1}_{\overline{A}} & \text{question 2. : } \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A) \\
& = & \mathbb{1}_A + 0 & \\
& = & \mathbb{1}_A &
\end{array}$$

★Subtile...★

Si on note $\mathcal{V}(\Omega,\mathbb{R})$ l'ensemble des variables aléatoires définies sur Ω, on a :

- L'application $\mathbb{E}: \begin{array}{|ccc} \mathcal{V}(\Omega,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & \mathbb{E}(X)\end{array}$ est une application linéaire (voir chapitre).
- Dans cette question, on demande presque (il faudrait travailler sur une combinaison linéaire de X et Y, pas juste sur X + Y) de montrer que l'application $\mathbb{E}_A: \begin{array}{|ccc} \mathcal{V}(\Omega,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{V}(\Omega,\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & \mathbb{E}_A(X)\end{array}$ est également linéaire.

Conclusion : $\mathbb{E}_A(\mathbb{1}_A)$ et $\mathbb{1}_A$ suivent la même loi, donnée en question 2..

4.b. Soient X et Y deux variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs. Démontrer :

$$\mathbb{E}_A(X+Y) = \mathbb{E}_A(X) + \mathbb{E}_A(Y)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_A(X+Y) &= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}((X+Y)\mathbb{1}_A)\times\mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}((X+Y)\mathbb{1}_{\overline{A}})\times\mathbb{1}_{\overline{A}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A+Y\mathbb{1}_A)\times\mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}}+Y\mathbb{1}_{\overline{A}})\times\mathbb{1}_{\overline{A}} && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\Big(\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)+\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)\Big)\times\mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\Big(\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}})+\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{\overline{A}})\Big)\times\mathbb{1}_{\overline{A}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)\mathbb{1}_A+\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)\times\mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}})\mathbb{1}_{\overline{A}}+\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{\overline{A}})\times\mathbb{1}_{\overline{A}} \\
&= \mathbb{E}_A(X)+\mathbb{E}_A(Y)
\end{aligned}$$

4.c. Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. Démontrer :

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_A(X)\Big) = \mathbb{E}(X) \quad ; \quad \mathbb{E}_A\Big(X\mathbb{1}_A\Big) = \mathbb{E}_A(X)\times\mathbb{1}_A$$

- Puisque $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ sont des variables aléatoires discrètes finies, $E_A(X)$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires discrètes finies : elle est donc également discrète finie, et admet ainsi une espérance. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_A(X)\Big) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)\times\mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}})\times\mathbb{1}_{\overline{A}}\right) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)\times\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}})\times\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\overline{A}}) && \text{question 2. : } \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)=\mathbb{P}(A) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)\times\mathbb{P}(A) + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}})\times\mathbb{P}(\overline{A}) \\
&= \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)+\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}}) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}(X(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_{\overline{A}})) && \text{question 3. : } \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_{\overline{A}}=1 \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

- Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_A\Big(X\mathbb{1}_A\Big) &= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A)\times\mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\overline{A}})\times\mathbb{1}_{\overline{A}} && \mathbb{1}_A^2=\mathbb{1}_A \text{ et } \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\overline{A}}=0 \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)\times\mathbb{1}_A
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_A(X)\times\mathbb{1}_A &= \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A)\times\mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\overline{A}})\times\mathbb{1}_{\overline{A}}\right)\mathbb{1}_A \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A)\times\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\overline{A}})\times\mathbb{1}_{\overline{A}}\mathbb{1}_A && \mathbb{1}_A^2=\mathbb{1}_A \text{ et } \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\overline{A}}=0 \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)\times\mathbb{1}_A
\end{aligned}$$

On a bien :

$$\mathbb{E}_A\Big(X\mathbb{1}_A\Big) = \mathbb{E}_A(X)\times\mathbb{1}_A$$