Exercices du chapitre 12
Probabilités et variables aléatoires en univers fini

●●○○ Exercice 1 - Vrai ou faux ?

1. On lance une pièce et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : "on n'obtient que des PILE pendant les n premiers lancers". On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{n+1} \subset A_n$.
2. On lance une pièce et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : "on n'obtient au moins un PILE pendant les n premiers lancers". On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{n+1} \subset A_n$.
3. Si A et B sont deux évènements, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$.
4. Deux évènements A et B sont incompatibles si, et seulement si, $A \subset \overline{B}$.
5. Si $A \cap B \cap C = \varnothing$, alors au moins une des trois intersections $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ est vide.

●○○○ Exercice 2 - Test de dépistage

On considère une population touchée par une maladie affecte une personne sur 100. Un test de dépistage est proposé dont voici les caractéristiques :

- sensibilité à 95 % : 95% des personnes malades ont un test positif
- spécificité à 99,9 % : 99,9% des personnes saines ont un test négatif

Discuter de la fiabilité du test en déterminant les deux valeurs suivantes :

- valeur prédictive positive (pourcentage de malades parmi les tests positifs)
- valeur prédictive négative (pourcentage de non malades parmi les tests négatifs)

●○○○ Exercice 3

Un couple de parents a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On suppose qu'il y a équiprobabilité pour qu'un enfant soit une fille ou un garçon. On considère les évènements :

- A : "les deux enfants sont de sexes différents"
- B : "l'ainé est une fille"
- C : "le cadet est un garçon"

Montrer que les évènements A, B, C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

●○○○ Exercice 4 - Probabilités & suites

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire ; ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, toutes indiscernables au toucher. On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans ces urnes comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U,
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne,
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement : "le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U" et $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Calculer u_3.
2. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On admet que $\mathbb{P}(U_n)$ et $\mathbb{P}(\overline{U_n})$ sont non nulles. Donner les valeurs de $\mathbb{P}_{U_n}(U_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$.
3. Établir une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

●○○○ Exercice 5 - Probabilités & suites

Deux joueurs A et B jouent aux échecs. Le joueur B gagne la première partie. Ensuite, la probabilité que A remporte la partie sachant qu'il a remporté la précédente est de $\dfrac{3}{5}$; alors que la probabilité que B remporte la partie sachant qu'il a remporté la précédente est de $\dfrac{1}{2}$.

1. Si la troisième partie est remportée par A, quelle est la probabilité qu'il ait également remporté la deuxième partie ?
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que A remporte la n-ième partie. Déterminer le terme général de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

●○○○ Exercice 6 - Probabilités & suites

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté PILE et un côté FACE. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé. Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté FACE.
Pour tout entier naturel n, on note :

- A_n l'évènement : "à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté FACE"

- B_n l'évènement : "à l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté PILE et l'autre côté FACE"
- C_n l'évènement : " à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté PILE"

De plus on note, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \mathbb{P}(A_n)$; $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. Donner les probabilités a_0 , b_0 et c_0 ; puis calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer c_n en fonction de a_n et b_n.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = -\dfrac{1}{3}b_n + \dfrac{2}{3}$.
5. Écrire une fonction `Python` qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de b_n en sortie.
6. Déterminer le terme général de (b_n) puis en déduire sa limite. Interpréter le résultat.

●●○○ Exercice 7 - Probabilités, suites & matrices

1. **Calcul matriciel.** On considère les deux matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - **1.a.** Justifier que la matrice Q est inversible puis déterminer Q^{-1}.
   - **1.b.** Calculer la matrice QMQ. *On notera* D *la matrice obtenue.*
   - **1.c.** Justifier que $M = QDQ$ puis démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = QD^nQ$.

2. **Étude d'une expérience aléatoire.** On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées et on effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :
   - à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
   - à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 1 (s'il en existe),
   - à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 2 (s'il en existe),

   et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.
   On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :
   - A_n : "obtenir 0 PILE à l'étape n"
   - B_n : "obtenir 1 PILE à l'étape n"
   - C_n : "obtenir 2 PILE à l'étape n"

   et on note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.
   - **2.a.** Calculer a_1, b_1 et c_1.
   - **2.b.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les trois probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$.
   - **2.c.** Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}c_n \end{cases}$$

   - **2.d.** Que peut-on dire de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? En déduire son terme général.
   - **2.e.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = M^{n-1}X_1$, où M est la matrice étudiée dans la question 1..
   - **2.f.** **2.f.i.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, \quad \mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}, \quad \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{4^n}$$

     2.f.ii. Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles. Interpréter le résultat obtenu.

●●○○ Exercice 8 - Avec ou sans remise ?

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, l'urne numéro k contient k balles blanches et $n-k$ balles noires.

1. On choisit au hasard une urne puis on tire simultanément 2 balles dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux balles blanches ?
2. Même question si le tirage des balles se fait successivement et avec remise.
3. Quelles sont les limites de ces deux probabilités quand n tend vers $+\infty$?

●●○○ Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une expérience aléatoire telle dont l'univers est $[\![1;n]\!]$ et on suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([\![1;k]\!]) = \lambda k^2$$

Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la probabilité de l'évènement $\{k\}$.

●○○○ Exercice 10

Pour chaque variable aléatoire ci-dessous, donner $X(\Omega)$.

1. X est le nombre de PILE obtenus en lançant quatre fois consécutives une pièce équilibrée.
2. X est le minimum des nombres obtenus en lançant deux dés équilibrés.
3. X est le rang du premier PILE pour une succession infinie de lancers de pièces et X prend la valeur 0 si aucune PILE n'apparaît.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est le nombre de fois que l'on obtient 6 en lançant n fois un dé.

●○○○ Exercice 11

On considère la variable aléatoire X, dont la loi de probabilité est :

valeurs de X	1	5	8	10
probabilités	0,2	p	q	0,1

Déterminer les valeurs de p et q, de sorte que l'espérance de X soit égale à $5,6$.

●●○○ Exercice 12

Soit $p \in]0;1[$. On lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p jusqu'à obtenir le premier PILE ; et dans tous les cas, on s'arrête après le cinquième lancer. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.

1. **Calcul préliminaire.** Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0;1[,\ \sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1} = \frac{1 - n x^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

2. Donner $X(\Omega)$.
3. Que vaut $\mathbb{P}([X=1])$?
4. Déterminer le loi de X.
5. Calculer l'espérance de X.
6. Reprendre l'exercice en considérant au plus n lancers, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

●●○○ Exercice 13 - C'est faux !

Chacune des affirmations suivantes est fausse. Dans chaque cas, fournir un contre-exemple permettant de l'infirmer.

1. Si X ne prend que deux valeurs opposées, alors nécessairement $\mathbb{E}(X) = 0$.
2. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)^2$.
3. Pour toute variable aléatoire X, les lois de X et X^2 sont différentes.
4. Si X et Y ont même espérance et même variance, alors elles ont la même loi de probabilité.

●●○○ Exercice 14 - Suites de variables aléatoires & matrice

On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées $1, 2, 3$ et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.
On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages.
On a donc $X_1 = 1$ et par exemple, si les premiers tirages donnent $2, 2, 1, 2, 1, 4, 3$ alors on a : $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$, $X_4 = 2$, $X_5 = 2$, $X_6 = 3$, $X_7 = 4$.
L'espérance et la variance d'une variable aléatoire Z sont notées respectivement $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \\ \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$.

1. 1.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.
   1.b. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.
   1.c. On note F la fonction de répartition de X_2. Déterminer l'expression, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de $F(x)$ en fonction de x, puis tracer sa courbe représentative.
2. 2.a. Déterminer U_1.
   2.b. Préciser l'ensemble des valeurs prises par X_n.
   2.c. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation suivante : $U_{n+1} = AU_n$.
3. On considère les quatre matrices V_1, V_2, V_3, V_4 à 4 lignes et 1 colonne, définies par : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.a. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4$$

3.b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire X_n.

4. 4.a. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$.

4.b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$. Commenter.

●●○○ Exercice 15

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0;1[$ et donnant FACE avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose les lancers indépendants et on note :

- pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, P_k l'évènement : "obtenir PILE au k-ième lancer" et $F_k = \overline{P_k}$;
- X_n la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenues avant l'apparition du premier PILE. On convient que X_n prend la valeur n si aucun PILE n'est obtenu au cours des n lancers.

1. Préciser $X_n(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ ainsi que $\mathbb{P}([X_n = n])$.
3. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = k])$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.
5. Considérons la fonction f définie sur $]0;1[$ par : $\forall x \in]0;1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

5.a. Soit $x \in]0;1[$. En exprimant de deux façons différentes $f'(x)$, établir :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

5.b. En déduire l'espérance de X_n.

5.c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

●●●○ Exercice 16 - Loi d'un minimum

Dans toute l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On dit qu'une variable aléatoire X, définie sur Ω, suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ lorsque :

- $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$
- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{n}$

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On note $M = \min(X, Y)$.

1.a. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}([X \geq k])$.

1.b. Justifier que M est une variable aléatoire sur Ω.

1.c. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}([M \geq k])$.

1.d. En déduire la loi de M.

2. Soient maintenant $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On note $M = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

2.a. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}([M \geq k])$.

2.b. En déduire la loi de M.

2.c. Notons $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 1]$. Démontrer : $\mathbb{P}(A) \geq 1 - e^{-1}$.

Indication : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ \ln(1+x) \leq ....$

●●●○ Exercice 17 - Loi d'un maximum

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On considère une urne composée de n boules, numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

1. Justifier que pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}([X \leq k]) = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

●●○○ Exercice 18

On dispose d'une urne U_0 contenant deux boules noires et deux boules blanches, et d'urnes $U_1, U_2, U_3, \ldots$ contenant chacune deux boules blanches. On effectue des tirages selon le protocole suivant :

- on pioche au hasard deux boules dans l'urne U_0, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_1 ;
- on pioche au hasard deux boules dans l'urne U_1, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_2 ;
- on pioche au hasard deux boules dans l'urne U_2, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_3 ; et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne U_{n-1}, mais avant de procéder au tirage suivant. On pose $X_0 = 2$.

1. Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'évènement $[X_n = 2]$.
3. **3.a.** Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'on a : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

   3.b. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1]) + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([X_n = 1])$ en fonction de n.
   Cette expression est-elle encore valable pour $n = 0$?

   3.c. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}([X_n = 0])$ en fonction de n.
4. Calculer, pour tout entier naturel n, l'espérance de X_n. Déterminer la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.

●●●○ Exercice 19

Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k, alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0;1[$, sur le point d'abscisse 0 sinon. On appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1;n]\!]$: $\mathbb{P}([X_n = k]) = p\mathbb{P}([X_{n-1} = k-1])$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = p\mathbb{E}(X_{n-1}) + p$; puis déterminer l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et p.
5. **5.a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n])$ et $\mathbb{P}([X_n = 0])$.

   5.b. En utilisant la question 3., démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.

   5.c. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

●●●○ Exercice 20

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On dispose d'un paquet de n cartes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$ selon le protocole suivant :

- la première carte C_1 est donnée à J_1 ;
- la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;
- la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;
- et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs $J_1, \ldots, J_n$.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n-1])$.
2. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
   Déterminer la loi de B_i. Exprimer X_n en fonction des B_i et en déduire l'espérance de X_n.
3. Donner la loi de X_4.
4. **4.a.** Montrer que pour i et j dans $[\![1,n]\!]$ tels que $i < j$, on a :
   $$\mathbb{P}\Big([B_i = 1] \cap [B_j = 1]\Big) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

   4.b. Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$, avec $i \neq j$. Les évènements $[B_i = 1]$ et $[B_j = 1]$ sont-ils indépendants ?

●●●○ Exercice 21

On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise. On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- X_1 est une variable aléatoire constante égale à 1,
- pour $k \in [\![2;+\infty[\![$, $X_k = 1$ si le numéro obtenu au k-ième tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents, et $X_k = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$. Montrer :
   $$X_k(\Omega) = \{0;1\} \ \ ; \ \ \mathbb{P}([X_k = 1]) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1}$$
   En déduire l'espérance de X_k.

3. **3.a.** Montrer :

$$\forall i < j,\ \mathbb{P}\Big([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\Big) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

   3.b. En déduire, pour tous $i < j$, la loi du produit $X_i X_j$.

4. Soit $N \in [\![2;+\infty[\![$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction des X_k et en déduire son espérance.

●●●○ Exercice 22 - Variables aléatoires indicatrices

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Que dire de $\mathbb{1}_\Omega$ et $\mathbb{1}_\varnothing$?
2. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_A$ ainsi que son espérance.
3. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Établir :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A \quad ; \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \quad ; \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$$

4. Soit A un évènement tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini, on définit la **variable aléatoire**, notée $\mathbb{E}_A(X)$, par :

$$\mathbb{E}_A(X) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) \times \mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}}) \times \mathbb{1}_{\overline{A}}$$

   4.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\mathbb{E}_A(\mathbb{1}_A)$.

   4.b. Soient X et Y deux variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs. Démontrer :

$$\mathbb{E}_A(X+Y) = \mathbb{E}_A(X) + \mathbb{E}_A(Y)$$

   4.c. Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. Démontrer :

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_A(X)\Big) = \mathbb{E}(X) \quad ; \quad \mathbb{E}_A\Big(X\mathbb{1}_A\Big) = \mathbb{E}_A(X) \times \mathbb{1}_A$$