13

Fonctions

Continuité locale et globale des fonctions

Introduction...

Comment pourrait-on expliquer la continuité d'une fonction à un enfant ? En disant que la courbe représentative de cette fonction pourrait se représenter sans lever le crayon de la feuille. Cette interprétation est importante et demeurera ; mais la notion de continuité, bien que très intuitive, a pourtant été difficile à formaliser, comme l'a été celle de limite.
Cauchy disait : "*la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même*".
Depuis Weierstrass, la continuité d'une fonction f (définie sur un intervalle I contenant un réel a) en a se traduit par l'écriture quantifiée :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in \mathrm{I},\ \Big(|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Et l'on voit ainsi le lien avec la notion de limite déjà étudiée.

La continuité d'une fonction est une qualité importante qui lui garantit en particulier les deux propriétés bien utiles que nous verrons dans ce chapitre : le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des bornes.

Pour bien démarrer...

1 # Revoir l'étude globale des fonctions (dérivée, variations, limites).

2 # Rappeler les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \ldots \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ldots \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ldots$$

3 # Représenter la courbe de la fonction $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ -x+1 & \text{si } x \in [0;1] \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array} \right.$

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définitions 1 - Continuité

Soient f une fonction définie sur I et $x_0 \in$ I.

D1# On dit que f **est continue en x_0** lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

D2# On dit que f **est continue à gauche en x_0** lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$.

D3# On dit que f **est continue à droite en x_0** lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$.

D4# On dit que f **est continue sur I** lorsque f est continue en tout réel de I.

Utile...

Rappelons la composition de limite : si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} f(X) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big) = c$.
Avec la continuité, on peut écrire directement : si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et f est continue en b, alors $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big) = c$.
En gros : *la continuité permet de faire rentrer la limite à l'intérieur...*
Avec les suites, on a en particulier : si (u_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Nous retrouvons naturellement le lien "à gauche" / "à droite" :

Propriété 1

Soient f une fonction définie sur I et $x_0 \in$ I. On a :

f est continue en x_0 si, et seulement si, elle est continue à gauche et à droite en x_0.

Autrement dit :

f est continue en x_0 si, et seulement si, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$.

★ Classique ! ★

C'est comme cela qu'on étudie la continuité de f si son expression est donnée selon plusieurs cas...

Exemples 1

E1 **Étudions la continuité en 0 de la fonction** $f : x \longmapsto \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Conclusion : la fonction f

E2 **Étudions la continuité en -1 de la fonction** $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

Conclusion : la fonction f

E3 **Étudions la continuité en 1 de la fonction** $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Conclusion : la fonction f

I Fonctions usuelles et opérations

En pratique, nous n'étudierons en détail la continuité des fonctions qu'en les points qui "posent problème". Le reste est géré par les propriétés suivantes :

Propriétés 2 - continuité des fonctions usuelles

P1# Les fonctions polynomiales, valeur absolue, racine carrée, logarithme, exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition (qui est un intervalle à chaque fois). La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

P2# Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue sur $[n;n+1[$, discontinue en n (elle y est continue à droite mais pas à gauche).

> ✍ **Rédaction**
> Ce sont ces propriétés qui justifieront que les fonctions étudiées seront continues sur des intervalles. Il faudra en revanche souvent examiner un point en particulier.

Propriétés 3 - continuité & opérations

Soient f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in \mathrm{I}$.

P1# Si f et g sont continues en x_0, alors les fonctions $f+g$, λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont continues en x_0.

P2# Si f et g sont continues en x_0 telles que $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.

P3# Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.

> **Petite remarque**
> Ces résultats sont encore vrais sur des intervalles d'après "définitions 1, D4"

II Prolongement par continuité

Examinons maintenant un cas un peu différent : quand f n'est pas définie en x_0...

Définition 2 - Fonction prolongeable par continuité

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$ et continue sur tout intervalle de $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$.
On dit que f est **prolongeable par continuité sur I** lorsqu'il existe une fonction $\widetilde{f}$ définie sur I telle que :

- $\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\},\ \widetilde{f}(x) = f(x)$
- $\widetilde{f}$ est continue sur I

> **En gros...**
> $\widetilde{f}$ est identique à f partout sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$ et bouche (si possible) "le trou" en x_0.

Théorème 1 - de prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$ et continue sur tout intervalle de $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$.
On a :

f est prolongeable par continuité sur I si, et seulement si, f admet une limite **finie** ℓ en x_0

De plus, la fonction $\widetilde{f} : \begin{array}{|lcl} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$ est l'unique fonction qui prolonge f de façon continue sur I.

★ **Démonstration** : En deux temps :

- L'équivalence, par double-implication...
  - $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f est prolongeable par continuité sur I. Il existe ainsi une fonction $\widetilde{f}$ définie sur I telle que :
    - ⇝ $\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\},\ \widetilde{f}(x) = f(x)$
    - ⇝ $\widetilde{f}$ est continue sur I

    Puisque $\widetilde{f}$ est continue en x_0, on peut passer à la limite dans l'égalité, et on obtient :
    $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \widetilde{f}(x_0)$$
    Conclusion : f admet une limite finie en x_0.
  - $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f possède une limite finie ℓ en x_0. Posons alors $\widetilde{f} : \begin{array}{|lcl} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$ et vérifions que $\widetilde{f}$ est un prolongement continu de f sur I.
    - ⇝ On a déjà : $\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\},\ \widetilde{f}(x) = f(x)$.
    - ⇝ Puisque f est continue partout sauf en x_0 et que f et $\widetilde{f}$ coïncident partout sauf en x_0, $\widetilde{f}$ est également continue partout sauf en x_0.
      De plus, puisque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, on a également $\lim\limits_{x \to x_0} \widetilde{f}(x) = \ell$: $\widetilde{f}$ est continue en x_0.
      Par conséquent : $\widetilde{f}$ est continue sur I.

    Conclusion : f est prolongeable par continuité sur I, et la fonction $\widetilde{f}$ définie en est un prolongement.
- L'unicité du prolongement découle de l'unicité de la limite... Si $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$ sont deux prolongements continus de f sur I, alors on aura déjà :
$$\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\},\quad \widetilde{f_1}(x) = f(x) = \widetilde{f_2}(x)$$

En passant à la limite dans cette égalité, et puisque $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$ sont continues en x_0, on obtient : :

$$\widetilde{f_1}(x_0) = \widetilde{f_2}(x_0)$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \ \widetilde{f_1}(x) = \widetilde{f_2}(x)$$

Conclusion : s'il existe, le prolongement continu d'une fonction est unique.

★

Exemples 2

E1 Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$; et de plus :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ldots$$

Ainsi, la fonction $\widetilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \ldots & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \neq 0,\ \widetilde{f}(x) = f(x)$.

Conclusion : la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$).

E2 La fonction $f : x \longmapsto x\ln(x)$, définie sur $]0;+\infty[$, est-elle prolongeable par continuité sur $[0;+\infty[$?

Conclusion : la fonction f est prolongeable par continuité sur $[0;+\infty[$, en posant $f(0) = \ldots$

E3 La fonction $f : x \longmapsto e^{-1/x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?

Conclusion : la fonction f

✍ **Rédaction**
Bien souvent, on conservera la même lettre pour la fonction et pour son prolongement...

III Théorèmes sur les fonctions continues...

III.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2 - des valeurs intermédiaires

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Si f est une fonction continue sur le segment $[a;b]$, alors tous les réels compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possèdent *au moins* un antécédent dans $[a;b]$ par f.
Autrement dit, si f est continue sur le segment $[a;b]$ et si k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$, d'inconnue $x \in [a;b]$, admet *au moins* une solution sur $[a;b]$.

★ Démonstration : Nous la verrons en fin de chapitre... ★

✘ **Attention !**
Ce théorème permet de justifier l'existence d'une solution à une équation... il ne permet pas :
• de justifier l'unicité de la solution
• de donner la valeur de la (ou des) solution(s)
• de justifier la non-existence de solutions ! Dans ce cas, ce sont toujours des arguments plus simples...

Petite remarque
Encore valable si l'intervalle n'est pas un segment : considérer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ à la place de $f(a)$ et/ou $\lim\limits_{x\to} f(x)$ à la place de $f(b)$.

Voici une autre version, plus théorique dans son énoncé, mais qui est équivalente au TVI :

Théorème 3 - Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

★ Démonstration : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Montrer que $f(\mathrm{I})$ est un intervalle équivaut à montrer que :

$$\forall x, y \in f(\mathrm{I}),\ \Big(x \leq y \Longrightarrow \forall z \in [x,y],\ z \in f(\mathrm{I})\Big)$$

☞ **Pour info...**
• La démonstration que Cauchy (qui était une référence en analyse de son temps) donnait lors de son cours d'analyse à l'Ecole Polytechnique : ici.
• La continuité est une condition suffisante pour qu'une fonction vérifie la propriété des valeurs intermédiaires ; mais ce n'est pas une condition nécessaire. Les curieux pourront regarder le théorème de Gaston Darboux (1842-1917, français).

Soient alors $x, y \in f(\text{I})$. Supposons que $x \leq y$. Soit $z \in [x, y]$. Puisque $x, y \in f(\text{I})$, il existe $a, b \in \text{I}$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. En appliquant la version précédente du TVI à f, continue sur le segment $[a;b]$ (qui est inclus dans I puisque I est un intervalle), on obtient que tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent dans $[a;b]$ par f. C'est donc en particulier le cas de z. Il existe donc $c \in [a;b]$ tel que $z = f(c)$.
Or $[a;b] \subset \text{I}$, donc $c \in \text{I}$. Par conséquent, z est l'image par f d'un réel de I ; autrement dit, $z \in f(\text{I})$.
Conclusion : si f est continue sur l'intervalle I, alors $f(\text{I})$ est un intervalle.

★

PETITE REMARQUE

Nous n'avons pas démontré l'équivalence des deux versions. Sens réciproque :
- Puisque f est continue sur $[a;b]$, $f([a;b])$ est un intervalle.
- $f(a), f(b) \in f([a;b])$.
- Ainsi : $[f(a); f(b)] \subset f([a;b])$.
- Soit $k \in [f(a); f(b)]$. Ainsi, $k \in f([a;b])$. D'où : $\exists x_0 \in [a;b] \,/\, k = f(x_0)$.

EXEMPLE 3

Considérons $f : x \longmapsto x^3 e^{-x}$. **Démontrons que l'équation $f(x) = 1$ a au moins une solution sur $[3;+\infty[$.**

- f est continue sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- De plus, on remarque que $f(3) = 3^3 e^{-3} =$........................et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$........................

  Or 1 ∈....................

Conclusion :

✓ RIGUEUR !

On pense bien à vérifier toutes les hypothèses du théorème...

III.2 THÉORÈME DES BORNES

Un autre théorème parfois utile sur les fonctions continues :

THÉORÈME 4 - DES BORNES

Si f est une fonction continue sur un *segment*, alors f est bornée et atteint ses bornes.

★ DÉMONSTRATION : Nous en verrons une démonstration en exercice...

★

☞ RAPPEL...

Un segment est un intervalle fermé et bornée, c'est à dire de la forme $[a;b]$.

UTILE

Deux autres formulations de ce théorème :
- "l'image d'un segment par une fonction continue est un segment"
- "si f est continue sur $[a,b]$, alors f admet un maximum et un minimum" (notés respectivement $\max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ et $\min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$)

EXEMPLE 4

Montrons qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

DÉFI !

En revanche, il en existe de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$: trouvez-en !

III.3 THÉORÈME DE LA BIJECTION

THÉORÈME 5 - DE LA BIJECTION

Soit f une fonction définie sur I.
SI f est :

- continue sur I,
- strictement monotone sur I,

ALORS f est bijective de I dans $f(\text{I})$. De plus, f^{-1} est strictement monotone et continue sur l'intervalle $\text{J} = f(\text{I})$, de même monotonie que f ; et leurs courbes sont symétriques (dans un repère orthonormé du plan) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

☞ POUR INFO...

C'est ce théorème qui justifie l'existence de la fonction logarithme népérien telle qu'elle a été introduite...

★ DÉMONSTRATION : Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Plusieurs choses à démontrer ici...

- Montrons que f est bijective de I dans $f(\text{I})$.
  - ◇ Par définition, f est déjà surjective de I dans $f(\text{I})$.
  - ◇ Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in \text{I}$ tels que $x \neq x'$. Supposons (sans perte de généralité) que $x < x'$. Puisque f est strictement monotone sur I, alors soit $f(x) < f(x')$, soit $f(x) > f(x')$. Dans les deux cas :
  $$f(x) \neq f(x')$$
  Par conséquent : f est injective.

  Conclusion : f est bijective de I dans $f(\text{I})$.

- Montrons que f^{-1} est strictement monotone sur l'intervalle $\text{J} = f(\text{I})$, de même monotonie que f.
  Déjà, puisque I est un intervalle et que f est continue sur I, alors $f(\text{I})$ est un intervalle (TVI version 2). Soient ensuite $y_1, y_2 \in \text{J}$ tels que $y_1 < y_2$.
  Supposons que f est strictement croissante (l'autre cas se démontre de la même façon) sur I.
  Puisque $y_1, y_2 \in \text{J} = f(\text{I})$ et que f est bijective de I dans $f(\text{I})$, il existe deux uniques $x_1, x_2 \in \text{I}$ tels que $y_1 = f(x_1$ et

PETITE REMARQUE

Pour cette partie, la continuité de f n'est pas utile...

$y_2 = f(x_2)$.
On a ainsi :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Mais f est strictement croissante sur I, alors nécessairement [1] :

$$x_1 < x_2$$

C'est à dire :

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Conclusion : si f est strictement croissante sur I, alors f^{-1} est strictement croissante sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.

[1] Sinon, en 2 lignes, par l'absurde...

- Montrons que f^{-1} est continue sur J.
  Soit $y_0 \in \mathrm{J}$. Puisque f^{-1} est strictement monotone sur J, d'après le théorème de limite monotone, f^{-1} possède une limite en y_0, notée ℓ. Il reste donc à prouver que $\ell = f^{-1}(y_0)$.
  Puisque f est bijective de I dans $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$, il existe u n unique $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que $y_0 = f(x_0)$.
  f étant continue sur I, on a :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Et comme $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y_0) = \ell$, cela revient à dire :

$$\lim_{y \to f(x_0)} f^{-1}(x_0) = \ell$$

Ainsi, par composition de limites :

$$\lim_{x \to x_0} \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = \ell$$

Mais $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{J}}$... D'où :

$$\lim_{x \to x_0} x = \ell$$

C'est à dire $x_0 = \ell$, soit :

$$f^{-1}(y_0) = \ell$$

Conclusion : f^{-1} est continue en tout réel de J, donc continue sur J.

★

♣ Méthode 1 ♣

1. Si l'énoncé dit "Montrer que f est bijective de I dans ..." : on utilise le théorème de bijection.
2. Si l'énoncé dit "Montrer que f est bijective de I dans ... et déterminer l'expression de sa bijection réciproque." : on détermine $f(\mathrm{I})$ puis pour tout $y \in f(\mathrm{I})$, on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathrm{I}$.

Exemples 5

E1 Considérons $f : x \longmapsto xe^{-x}$. **Montrons que f est bijective de $[1;+\infty[$ dans un intervalle à préciser; puis donnons le tableau de variations de f^{-1}.**

E2 Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{1-\ln(x)}{x}$, définie sur $]0;+\infty[$.

★ CLASSIQUE! ★
Un des exercices type sur les suites implicites...

- **Montrons que f est bijective de $]0;e^2[$ dans un intervalle à préciser.**

- **Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution, notée α_n, dans $]0;e^2[$.**

- **Établissons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \alpha_n \leq e$.**

- **Exprimons α_n en fonction de n et f^{-1}.**

- **Déduisons les variations de la suite (α_n), ainsi que sa limite.**

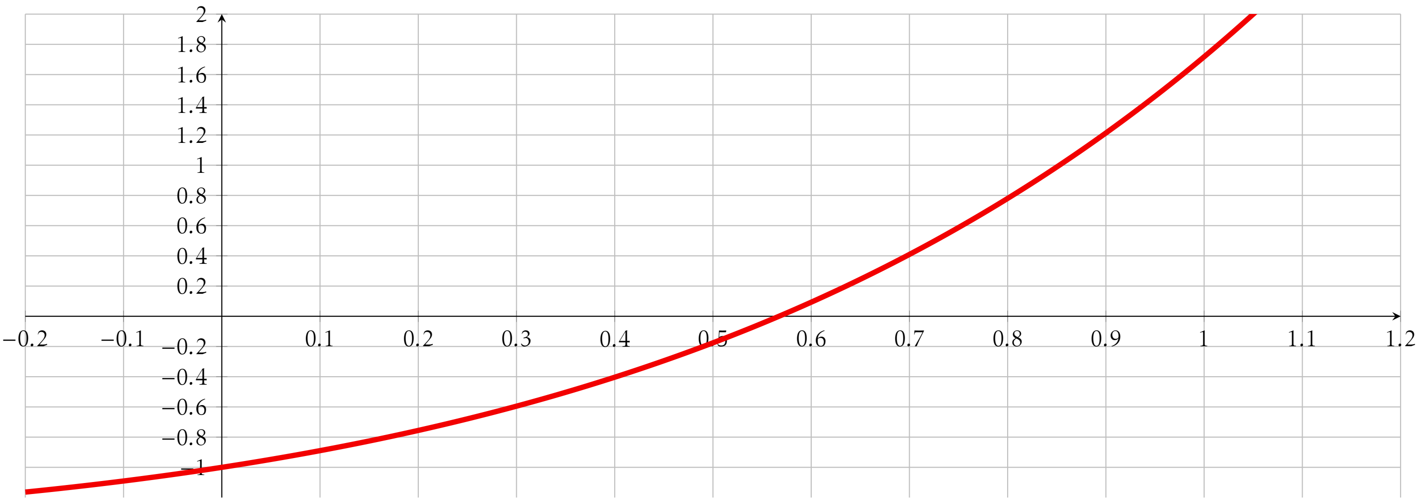
IV Encadrement d'une solution de $f(x) = 0$ par la méthode de dichotomie

- **Pourquoi ?** Pourquoi chercher des solutions de l'équation $f(x) = 0$? Tout simplement parce-que toutes les équations à une inconnue peuvent se mettre sous cette forme là !
- **Comment ?** Par la méthode du juste prix !

Pourquoi ?
$g(x) = k \iff g(x) - k = 0$
ou encore :
$g(x) = h(x) \iff g(x) - h(x) = 0$

Plaçons-nous dans le cas où f est continue sur $[a;b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$.

Illustration : Considérons la fonction $f : x \longmapsto xe^x - 1$, dont on a représenté une portion de la courbe :



La **méthode de dichotomie** se présente ainsi :
On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$;
- si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$, alors on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$;
- si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$, alors on pose $a_{n+1} = b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$.

Cette construction garantit que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$,
- les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers un réel α tel que $f(\alpha) = 0$,
- et en conséquence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_n;b_n]$ est un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à $\dfrac{b-a}{2^n}$.

☞ **Pour info...**
Ce procédé permet ainsi de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires...

★ Démonstration :

⋆