Exercices du chapitre 13
Continuité locale et globale des fonctions

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Études de continuité locale

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ dans chaque cas.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
   - f est continue sur $]-\infty;0]$, comme fonction affine sur cet intervalle,
   - f est continue sur $]0;+\infty[$, comme fonction exponentielle sur cet intervalle,
   - En 0 :
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = 1 \ ; \ f(0) = 1 \ ; \ \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 1$$
   Par conséquent, f est continue en 0.

   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

> ✓ **Rigueur !** On demande la continuité sur $\mathbb{R}$... On commence donc par régler la continuité sur les plus grands intervalles possible, puis on s'intéresse précisément à la continuité en les points "problématiques".

2. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$
   - f est continue sur $]-\infty;1]$, comme fonction carrée sur cet intervalle,
   - f est continue sur $]1;+\infty[$, comme fonction logarithme népérien sur cet intervalle,
   - En 1 :
   $$\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = 1 \ ; \ f(1) = 1 \ ; \ \lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = 0$$
   Par conséquent, f n'est pas continue en 1.

   Conclusion : f n'est pas continue en 1, donc n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

3. $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
   - f est continue sur $]-\infty;0]$, comme fonction constante sur cet intervalle,
   - f est continue sur $]0;+\infty[$, comme composée de fonctions continues sur les intervalles adéquats,
   - En 0 :
   On sait que :
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{-1}{x} = -\infty \ ; \ \lim_{X\to -\infty} e^X = 0$$
   D'où, par composition :
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{-1/x} = 0$$
   Or :
   $$f(0) = 0 \ ; \ \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$$
   Par conséquent, f est continue en 0.

   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

> ✗ **Attention !** Pas de "composée de fonctions continues sur $]0;+\infty[$". C'est comme pour la dérivabilité : à chaque fois qu'il y a une composée, il doit y avoir correspondance des intervalles d'arrivée de u et de départ de v pour parler de $v \circ u$. Deux façons de rédiger :
> • soit on pose clairement les fonctions et on détaille,
> • soit on se contente d'une phrase plus large en mentionnant nécessairement "les intervalles adéquats".

4. $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
   - f est continue sur $]-\infty;0[$, comme fonction constante sur cet intervalle,
   - f est continue sur $[0;+\infty[$, comme sommes d'une fonction constante et de $x \longmapsto e^{-x}$, toutes deux continues sur $[0;+\infty[$.
   - En 0 :
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = 0 \ ; \ f(0) = 0 \ ; \ \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$$
   Par conséquent, f est continue en 0.

   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

●○○○ Exercice 2 - Prolongement par continuité

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

- La fonction $x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^-$ et sur $\mathbb{R}_*^+$; donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_*^-$ et sur $\mathbb{R}_*^+$.
- En 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{-1}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

Et :

$$\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$$

D'où, par composition :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$$

Par conséquent : f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 0$.

Conclusion : f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, en posant $f(0) = 0$.

✍ **Rédaction**
On prend le temps de bien détailler les compostions de limites, dont la rédaction s'est dégradée depuis quelques temps...

2. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $]-1;+\infty[$.
   - La fonction f est définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.
   - La fonction f est continue sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, comme quotient de deux fonctions continues sur ces intervalles, dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.
   - En 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Par conséquent : f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$.

Conclusion : f est prolongeable par continuité sur $]-1;+\infty[$, en posant $f(0) = 1$.

Pourquoi ?
C'est une limite usuelle !

3. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \frac{x^2-5x-6}{x+1}$ est vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction f est définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.
   - La fonction $f$est continue sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur ces intervalles, dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.
   - En -1 :
   Remarquons que, pour tout $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+1)(x-6)}{x+1} \\ &= x-6 \qquad x+1 \neq 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x\to-1} (x-6) = -7$$

Ainsi :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\x>-1}} f(x) = -7$$

Par conséquent : f est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = -7$.

Conclusion : f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, en posant $f(-1) = -7$.

☞ **Rappel...**
Dans le cas d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes), la FI "$\frac{0}{0}$" en un réel x_0 implique que x_0 est racine du numérateur et du dénominateur...

4. Déterminer l'ensemble de définition de : $x \longmapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $[-1;+\infty[$.
   - La fonction f est définie sur $[-1;0[\cup]0;+\infty[$.
   - La fonction f est continue sur $[-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, comme quotient de deux fonctions continues sur ces intervalles, dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.
   - En 0 :
   Pour x suffisamment proche de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} \qquad x \neq 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+x} = \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \frac{1}{2}$$

Par conséquent : f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

Conclusion : f est prolongeable par continuité sur $[-1;+\infty[$, en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

5. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$?

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, donc la fonction $x \longmapsto e^{\sqrt{x}}$ l'est également.
  Ainsi, la fonction f est un quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_*^+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$, elle est donc également continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
- En 0 :
  Pour x suffisamment proche de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

  Or :

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \ ; \ \lim_{X\to 0} \frac{e^X-1}{X} = 1$$

  Ainsi, par composition :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} = 1$$

  D'où, par produit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

  Par conséquent : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Conclusion : f n'est pas prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$, car ne l'est pas en 0.

Pourquoi ? Limite usuelle !

●●○○ Exercice 3 - Théorème de bijection

Dans chaque cas :

- dresser le tableau de variations complet de f sur I
- démontrer que f est bijective de I dans un intervalle à préciser
- donner le tableau de variations complet de f^{-1}

1. $f : x \longmapsto (x+2)e^{-x}$ sur $[-1;+\infty[$
   - La fonction f est le produit de deux fonctions usuelles dérivables sur $[-1;+\infty[$, elle est donc dérivable sur cet intervalle.
   - Soit $x \in [-1;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - (x+2)e^{-x} \\ &= -e^{-x}(x+1) \end{aligned}$$

   D'où :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
f	e	$\searrow$	0

   Justification de la limite en $+\infty$:
   Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{e^x} \\ &= \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \end{aligned}$$

   Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

   D'où, par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   - On sait que :
     - f est continue sur $[-1;+\infty[$ car dérivable sur cet intervalle,
     - f est strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$.

   D'après le théorème de bijection, f est bijective de $[-1;+\infty[$ dans $f([-1;+\infty[) =]0;e]$.
   Et :

x	0		e
f^{-1}	‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

✘ Attention ! Ne pas oublier la **stricte** monotonie dans les hypothèse du théorème de bijection !

2. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ sur $]0;1[$.
   - La fonction f est le quotient de deux fonctions usuelles dérivables sur $]0;1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;1[$, elle est donc dérivable sur cet intervalle.

- Soit $x \in]0;1[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln(x) - x\frac{x}{x}}{\left(\ln(x)\right)^2} \\ &= \frac{\ln(x)-1}{\left(\ln(x)\right)^2} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \ln(x) - 1 \geq 0 &\iff \ln(x) \geq 1 \\ &\iff x \geq e \end{aligned}$$

par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$

Or, on sait que $x \in]0;1[$...
D'où :

x	0		1
$f'(x)$	‖	$-$	‖
f	‖ 0	$\searrow$	$-\infty$ ‖

Limites :
- En 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x = 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$$

D'où, par quotient :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$$

- En 1 :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} x = 1 > 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \ln(x) = 0^-$$

Important !
On précise les signes pour conclure !

D'où, par quotient :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = -\infty$$

- On sait que :
  - f est continue sur $]0;1[$ car dérivable sur cet intervalle,
  - f est strictement décroissante sur $]0;1[$.

D'après le théorème de bijection, f est bijective de $]0;1[$ dans $f(]0;1[) =]-\infty;0[$.
Et :

x	$-\infty$		0
f^{-1}	1	$\searrow$	0 ‖

●●○○ Exercice 4 - Des histoires de point fixe...

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$. Démontrer que f possède au moins un point fixe.

Posons $g : x \longmapsto f(x) - x$, définie sur $[0;1]$. On sait que :
- g est continue sur $[0;1]$ (car f l'est)
- $g(0) = f(0)$ et $g(1) = f(1) - 1$.
  Or f est à valeurs dans $[0;1]$, donc pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.
  Par conséquent : $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$. D'où : $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$.

➠Réflexe !
Une histoire de point fixe de f ? On travaille sur $g = f - \mathrm{id}$.
Ainsi : α est point fixe de f ssi $g(\alpha) = 0$.
Ensuite : soit un TVI soit un théorème de bijection (selon que l'on souhaite une unicité ou non).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède donc au moins une solution sur $[0;1]$.

Conclusion : f possède au moins un point fixe.

2. Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f possède un unique point fixe.

Posons $g : x \longmapsto f(x) - x$, définie sur $[0;1]$. On sait que :
- g est continue sur $\mathbb{R}$ (car f l'est)
- Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de limite monotone, elle admet une limite en $-\infty$ et en $+\infty$; et de plus, $\lim\limits_{-\infty} f \neq -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f \neq +\infty$.
  D'où, pas de forme indéterminée pour les limites de g et, par opérations :

$$\lim_{-\infty} g = +\infty \quad ; \quad \lim_{+\infty} g = -\infty$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède donc au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : f possède au moins un point fixe.

3. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$ telle que $f \circ f = f$. Préciser l'ensemble des points fixes de f.

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points fixes de f.
- Puisque f est définie sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$, l'intervalle $[0;1]$ est stable par f ; donc $f \circ f$ est bien définie sur $[0;1]$.
- - De plus :

$$\forall x \in [0;1],\ f(f(x)) = f(x)$$

Donc pour tout $x \in [0;1]$, $f(x)$ est un point fixe de f. Autrement dit :

$$f([0;1]) \subset \mathcal{E}$$

◇ Montrons $\mathcal{E} \subset f([0;1])$.
Soit $\alpha \in$ E. On a ainsi : $f(\alpha) = \alpha$. Il existe donc $x \in [0;1]$ (en fait, $x = \alpha$ convient) tel que $\alpha = f(x)$.
Donc $\alpha \in f([0;1])$. On a ainsi :

$$\mathcal{E} \subset f([0;1])$$

Conclusion : l'ensemble des points fixes de f est $f([0;1])$.

●●●○ Exercice 5 - Une autre histoire de point fixe !

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(a) = a$, alors f possède au moins un point fixe.

Supposons qu'il existe un réel a tel que $f \circ f(a) = a$, et considérons-en un...
Posons $g : x \longmapsto f(x) - x$, définie sur $\mathbb{R}$. On sait que :

- g est continue sur $\mathbb{R}$ (car f l'est)
- $g(a) = f(a) - a$ et $g\big(f(a)\big) = f\big(f(a)\big) - f(a) = a - f(a)$.
  Ainsi, $g(a)$ et $g\big(f(a)\big)$ sont opposés.

D'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède donc au moins une solution entre a et $f(a)$.

Conclusion : f possède au moins un point fixe.

> **Petite remarque**
> On a donc montré que si f est continue et que $f \circ f$ possède au moins un point fixe, alors f également.

●●●○ Exercice 6 - Encore une !

Soient f et g deux fonctions continues de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

1. Démontrer que la fonction f possède au moins un point fixe sur $[0;1]$.
   Posons $g : x \longmapsto f(x) - x$, définie sur $[0;1]$. On sait que :
   - g est continue sur $[0;1]$ (car f l'est)
   - $g(0) = f(0)$ et $g(1) = f(1) - 1$. Or f est à valeurs dans $[0;1]$, donc pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.
     Par conséquent : $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$. D'où : $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$.

   D'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède donc au moins une solution sur $[0;1]$.

   Conclusion : f possède au moins un point fixe sur $[0;1]$.

2. Considérons alors $a \in [0;1]$ tel que $f(a) = a$ puis définissons la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

   2.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point fixe de f.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     D'après l'énoncé, a est un point fixe de f : initialisation vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(u_n) = u_n$ et montrons que $f(u_{n+1}) = u_{n+1}$.
     On a :

$$\begin{array}{rcll} f(u_{n+1}) & = & f\big(g(u_n)\big) & \\ & = & g\big(f(u_n)\big) & f \circ g = g \circ f \\ & = & g(u_n) & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & u_{n+1} & \end{array}$$

     Hérédité établie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point fixe de f.

   2.b. Établir le résultat voulu dans le cas où (u_n) est monotone.
   Supposons donc que la suite (u_n) est monotone. Étant bornée par 0 et 1 (car g est à valeurs dans $[0;1]$), elle est convergente. Notons ℓ sa limite. Montrons que ℓ répond au problème...
   - Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n$, par passage à la limite, f étant continue en ℓ (car continue sur $[0;1]$ et $\ell \in [0;1]$) : $f(\ell) = \ell$.
   - Et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, par continuité de g en ℓ et unicité de la limite, on obtient également $\ell = g(\ell)$.

   Par conséquent :

$$f(\ell) = \ell = g(\ell)$$

   Conclusion : il existe donc un réel $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

> **Petite remarque**
> Dans ce cas, on a même mieux : ce réel est également point fixe de f et g.

   2.c. Établir le résultat voulu dans le cas où (u_n) n'est pas monotone.
   Supposons donc que la suite (u_n) n'est pas monotone. Il existe alors $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $u_{n+1} - u_n > 0$ et $u_{m+1} - u_m < 0$.
   On a ainsi :

$$g(u_n) - u_n > 0$$

   et puisque u_n est point fixe de f :

$$g(u_n) - f(u_n) < 0$$

   De même :

$$g(u_m) - f(u_m) > 0$$

   Par conséquent, on a :
   - $g - f$ est continue sur $[0;1]$, donc sur $[u_n; u_m]$ (ou $[u_m; u_n]$)

- $(g-f)(u_n)<0$ et $(g-f)(u_m)>0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $g-f$ s'annule au moins une fois entre u_n et u_m.

Conclusion : il existe donc un réel $x\in[0;1]$ tel que $f(x)=g(x)$.

●●○○ Exercice 7

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$ telles que :

$$\forall x\in[0;1],\ f(x)>g(x)$$

1. Démontrer : $\exists m>0$ / $\forall x\in[0;1],\ f(x)\geq g(x)+m$.

Posons $h:x\longmapsto f(x)-g(x)$.
La fonction h est continue sur le segment $[0;1]$; elle y est donc bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, h possède un minimum et un maximum sur $[0;1]$; notons $m=\min\limits_{[0;1]}(h)$.

On a ainsi :

$$\forall x\in[0;1],\ h(x)\geq m$$

Autrement dit :

$$\forall x\in[0;1],\ f(x)\geq g(x)+m$$

De plus, puisque pour tout $x\in[0;1]$, $h(x)>0$, son minimum est également strictement positif.

Conclusion : $\exists m>0$ / $\forall x\in[0;1],\ f(x)\geq g(x)+m$ (le minimum de $f-g$ convient).

2. Ce résultat est-il encore valable si f et g sont définies et continues sur $\mathbb{R}$?

Non... Le résultat précédent repose sur le fait que m est le minimum de $f-g$; et ce minimum existe bien (et est strictement positif), puisque les fonctions sont étudiées sur un segment.
Posons, par exemple :

$$f:x\longmapsto e^x\ ;\ g:x\longmapsto 0$$

On a bien :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>g(x)$$

Et pourtant, s'il existait un réel $m>0$ tel que pour tout x, $f(x)\geq g(x)+m$; on aurait ainsi :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x\geq m$$

Ceci contredit le fait que $\lim\limits_{-\infty} f=0$...

●●●○ Exercice 8 - Les rennes du Père Noël

Afin d'être opérationnels le jour de Noël, les rennes du Père Noël suivent un entraînement intensif... Ceux-ci doivent parcourir la distance entre Vancouver et Montréal (soit 4000 km environ) en 5 secondes ! Montrer qu'il existe un intervalle d'une seconde pendant lequel les rennes parcourent exactement 800 km.

Indication : on notera $d(t)$ la distance totale parcourue par les rennes au bout de t secondes et $\mathrm{D}(t)=d(t+1)-d(t)$ la distance parcourue par les rennes sur l'intervalle $[t;t+1]$ d'amplitude 1 seconde...

L'objectif est de montrer qu'il existe un réel $t_0\in[0;4]$ tel que $\mathrm{D}(t_0)=800$.
Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$d(0)=0\ ;\ d(5)=4000$$

et ainsi :

$$\mathrm{D}(0)+\mathrm{D}(1)+\mathrm{D}(2)+\mathrm{D}(3)+\mathrm{D}(4)=...=d(5)-d(0)=4000$$

Par conséquent :

- Si $\mathrm{D}(0)=\mathrm{D}(1)=\mathrm{D}(2)=\mathrm{D}(3)=\mathrm{D}(4)=800$, alors les rennes parcourent 800km sur chaque intervalle d'une seconde... C'est réglé !
- Sinon, il existe au moins une de ces 5 valeurs qui soit strictement inférieure à 800 et une autre qui soit strictement supérieure à 800 ; notons alors i et j deux entiers tels que $\mathrm{D}(i)<800$ et $\mathrm{D}(j)>800$.
  La fonction D étant continue sur $[0;4]$ (puisque d l'est : les sauts spatiaux et temporels n'existent pas, même pour les rennes du Père Noël), le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un réel $t_0\in]i;j[$ (ou $]j;i[$) tel que $\mathrm{D}(t_0)=800$.
  Autrement dit, il existe un intervalle d'une seconde sur lequel les rennes ont parcouru exactement 800km.

●○○○ Exercice 9 - Étude de fonctions

On considère la fonction $f:x\longmapsto e^x-\ln(x)$, définie sur $]0;+\infty[$ ainsi que $g:x\longmapsto xe^x-1$, définie sur $[0;+\infty[$.

1. **1.a.** Dresser le tableau de variations complet de g sur $[0;+\infty[$.

g est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $x\in\mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & e^x+xe^x \\ & = & e^x(x+1) \end{array}$$

Or $x\in\mathbb{R}^+$, donc $g'(x)>0$. D'où :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	-1 ↗	$+\infty$

La limite en $+\infty$ étant obtenue par opération.

1.b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution α dans $[0;+\infty[$. Vérifier que $\alpha\in]0;1[$.

- On a :
  - g est continue sur $\mathbb{R}^+$, car dérivable,

◇ g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi, par théorème de bijection, g est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $g(\mathbb{R}^+) = [-1;+\infty[$. Or $0 \in [-1;+\infty[$, donc 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}^+$ par g.
Par conséquent : l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.

- On a aussi :

$$g(0) = -1 \ ; \ g(\alpha) = 0 \ ; \ g(1) = e-1$$

Et comme $e > 1$, on a :

$$g(0) < g(\alpha) < g(1)$$

Puis, par stricte croissance de g^{-1} sur $[-1;+\infty[$, on obtient :

$$0 < \alpha < 1$$

Petite remarque
- Ou par stricte croissance de g sur $\mathbb{R}^+$...
- La **stricte** croissance de g^{-1} est nécessaire pour conserver les inégalités strictes.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[0;+\infty[$, et on a même $\alpha \in]0;1[$.

1.c. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
On sait que g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $g(\alpha) = 0$, d'où :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes de sa courbe représentative.
   - En 0 :
     Par opération :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty}$$

     Et ainsi, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote "verticale" à la courbe de f au voisinage de 0 (par la droite).
   - En $+\infty$:
     Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$f(x) = e^x\left(1 - \frac{\ln(x)}{e^x}\right)$$

     Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$$

     D'où, par opérations :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{\ln(x)}{e^x}\right) = +\infty$$

     Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

3. Dresser le tableau de variations complet de f.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \frac{1}{x} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{xe^x - 1}{x} \\ &= \frac{g(x)}{x} \end{aligned}$$

   D'après la question **1.c.**, on obtient alors :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. Montrer : $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.
   On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= e^\alpha - \ln(\alpha) && g(\alpha) = 0 \text{ et } \alpha \neq 0, \text{ donc } e^\alpha = \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} - \ln(\alpha) && \alpha = \frac{1}{e^\alpha} = e^{-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \alpha \end{aligned}$$

●●○○ Exercice 10 - Suite récurrente d'ordre 1

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. Donner le tableau de variations de f^{-1}.
   - f est dérivable sur $[0;1]$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0;1]$.
     Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$f'(x) = e^x(2x+2) = 2e^x(x+1)$$

     Or $x \geq 0$, donc $f'(x) > 0$.
     D'où :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$2e^2$

- On sait que :
  - f est continue sur $[0;1]$, car dérivable
  - f est strictement croissante sur $[0;1]$

  Ainsi, par théorème de bijection, f est bijective de $[0;1]$ dans $f([0;1]) = [0;2e^2]$.
  On a aussi :

x	0	$2e^2$
f^{-1}	$0 \nearrow$	1

2. Vérifier qu'il existe dans $[0;1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

Important !
On vient de trouver une bijection : on cherche donc le lien entre cette question et la précédente...

- Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$\begin{aligned} xe^x = 1 &\iff 2xe^x = 2 \\ &\iff f(x) = 2 \end{aligned}$$

  Or f est bijective de $[0;1]$ dans $[0;2e^2]$.
  Et puisque $e > 1$, on a $2e^2 > 2$ et ainsi $2 \in [0;2e^2]$.
  Par conséquent, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur $[0;1]$.

  Conclusion : l'équation $xe^x = 1$ possède une unique solution sur $[0;1]$, notée α.

- Si α était égal à 0, on aurait $\alpha e^{\alpha} = 0$: absurde !
  Ainsi, $\alpha \neq 0$.

Conclusion : il existe dans $[0;1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$, et $\alpha \neq 0$.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et bornée par 0 et 1.
Par récurrence, démontrons : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 1$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = \alpha$ et $\alpha \in [0;1]$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $0 \leq u_n \leq 1$" et montrons "u_{n+1} existe et $0 \leq u_{n+1} \leq 1$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 1$. Donc u_n est dans l'ensemble de définition de f^{-1}.
    Ainsi, $f^{-1}(u_n)$ existe ; autrement dit, u_{n+1} existe.
  - Par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

    D'où, en appliquant f^{-1}, croissante sur $[0;1]$:

$$f^{-1}(0) \leq f^{-1}(u_n) \leq f^{-1}(1)$$

    Or $f^{-1}(0) = 0$ et le maximum de f sur $[0;2e^2]$ est 1, donc $f^{-1} \leq 1$.
    D'où, par transitivité :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

    L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 1$.
Autrement dit : la suite (u_n) est bien définie et bornée par 0 et 1.

4. **4.a.** Montrer que pour tout réel x de $[0;1]$, $f(x) - x \geq 0$; et qu'il y a égalité seulement pour $x = 0$.
Soit $x \in [0;1]$.

- On a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= 2xe^x - x \\ &= x(2e^x - 1) \end{aligned}$$

  Or $x \geq 0$, donc, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$: $e^x \geq 0$ et donc $2e^x - 1 \geq 1$.
  D'où :

$$x(2e^x - 1) \geq 0$$

  Autrement dit :

$$f(x) - x \geq 0$$

- De plus :

$$\begin{aligned} f(x) - x = 0 &\iff x(2e^x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned} \quad 2e^x - 1 \neq 0$$

Conclusion : pour tout réel x de $[0;1]$, $f(x) - x \geq 0$, avec égalité seulement si $x = 0$.

4.b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question **3.**, $u_n \in [0;1]$.
On peut donc appliquer le résultat précédent à u_n... On obtient :

$$f(u_n) - u_n \geq 0$$

D'où :

$$f(u_n) \geq u_n$$

Et, par croissance de f^{-1} sur $[0;2e^2]$, on obtient :

$$u_n \geq f^{-1}(u_n)$$

Autrement dit :

$$u_n \geq u_{n+1}$$

Conclusion : la suite (u_n) est décroissante.

4.c. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser la valeur de sa limite.

- La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0, d'après la question **3.**). D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge donc vers un réel $\ell \geq 0$.
  Et comme (u_n) est bornée par 0 et 1, on a même $\ell \in [0;1]$.
- On a ainsi :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$
  Donc, par continuité de f^{-1} en ℓ (car f^{-1} continue sur $[0;2e^2]$ et $\ell \in [0;1] \subset [0;2e^2]$), on obtient :
  $$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(u_n) = f^{-1}(\ell)$$
  Autrement dit :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f^{-1}(\ell)$$
  Or, (u_n) converge vers ℓ ; c'est donc également le cas de (u_{n+1}).
  Par conséquent, par unicité de la limite :
  $$\ell = f^{-1}(\ell)$$
- ℓ est donc un point fixe de f^{-1} dans $[0;1]$. Résolvons donc, pour $x \in [0;1]$, l'équation $x = f^{-1}(x)$.
  Soit $x \in [0;1]$. On a :
  $$\begin{aligned} x = f^{-1}(x) &\iff f(x) = x \\ &\iff x = 0 \quad \text{question 4.a.} \end{aligned}$$
  Par conséquent :
  $$\ell = 0$$

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0.

5. 5.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$, donc $u_n = f(u_{n+1})$. Autrement dit :
  $$u_n = 2u_{n+1}e^{u_{n+1}}$$
  Par conséquent :
  $$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question **3.** :
  $$u_{n+1} \geq 0$$
  D'où, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:
  $$e^{-u_{n+1}} \leq 1$$
  Puis, comme $u_n \geq 0$ (question **3.**) :
  $$\frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}u_n$$
  Ainsi, par transitivité, avec le point précédent :
  $$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{,n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

5.b. Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = \alpha$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.
  Or on sait que $\alpha \in [0;1]$. L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
  Par hypothèse de récurrence :
  $$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
  D'où, en multipliant par $\frac{1}{2}$:
  $$\frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
  Or, d'après la question précédente :
  $$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$$
  Ainsi, par transitivité :
  $$u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5.c. Résoudre l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-5}$, d'inconnu $n \in \mathbb{N}$. *Donnée :* $\frac{5\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 16,6$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-5} &\iff n\ln\left(\frac{1}{2}\right) < -5\ln(10) && \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \quad -\ln(2)<0 \\ &\iff n \geq \frac{5\ln(10)}{\ln(2)} && n\in\mathbb{N} \\ &\iff n \geq 17 \end{aligned}$$

5.d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \geq 17,\ \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-5}$$

Ainsi, d'après la question **5.b.** et par transitivité :

$$\forall n \geq 17,\ u_n < 10^{-5}$$

Conclusion : pour $n \geq 17$, u_n est proche de 0 à 10^{-5} près.

> **Petite remarque**
> Il se pourrait que u_n soit proche de 0 à 10^{-5} près avant le rang 17. Nous avons un rang à partir duquel c'est le cas, pas nécessairement le plus petit rang à partir duquel c'est le cas...

●●○○ Exercice 11 - Suite récurrente d'ordre 1 avec fonction décroissante

Considérons la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}$ et la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

> **➠Réflexe !**
> On parle de montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe de f ? Alors on pose $h = f - \mathrm{id}$ et on montre que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$...

1. Justifier que la fonction f possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, noté α, vérifiant $\alpha \in [0;1]$.

Posons $h : x \longmapsto f(x) - x$, définie sur $\mathbb{R}$.

- Montrons que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.
  On sait que :
  - h est continue sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
  - h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$ ($x \longmapsto e^{-x}$ et $-\mathrm{id}$).

  D'après le théorème de bijection, h est bijective de $\mathbb{R}$ dans $h(\mathbb{R}) =]\lim_{+\infty} h; \lim_{-\infty} h[= \mathbb{R}$.
  Ainsi, $0 \in h(\mathbb{R})$. Par conséquent, 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par h.
  Autrement dit, l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

  Conclusion : f possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, noté α.

- Ensuite :
  $$h(0) = 1 \ ; \ h(\alpha) = 0 \ ; \ h(1) = e^{-1} - 1 < 0$$
  D'où :
  $$h(1) < h(\alpha) < h(0)$$
  Puis, par stricte décroissance de h^{-1} sur $\mathbb{R}$:
  $$1 > \alpha > 0$$

Conclusion : la fonction f possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, noté α, vérifiant $\alpha \in [0;1]$.

> **Petite remarque**
> On a même établi $\alpha \in]0;1[$.

2. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que les premiers termes de la suite (u_n).

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 0 \in [0;1]$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$0 \leq u_n \leq 1$$
  D'où, en appliquant f, décroissante sur $\mathbb{R}$:
  $$f(0) \geq f(u_n) \geq f(1)$$
  Autrement dit :
  $$1 \geq u_{n+1} \geq e^{-1}$$
  Et comme $e^{-1} \geq 0$, par transitivité :
  $$1 \geq u_{n+1} \geq 0$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

4. Posons $g = f \circ f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

4.a. Démontrer que α est un point fixe de g, puis que c'est le seul.

- On a déjà :
  $$\begin{aligned} g(\alpha) &= f\big(f(\alpha)\big) && \text{car } \alpha \text{ est point fixe de } f \\ &= f(\alpha) && \text{car } \alpha \text{ est point fixe de } f \\ &= \alpha \end{aligned}$$

- Considérons $h : x \longmapsto g(x) - x = e^{-e^{-x}} - x$.
La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{array}{rcl} h'(x) & = & e^{-x}e^{-e^{-x}} - 1 \\ & = & e^{-(x+e^{-x})} - 1 \end{array}$$
Et :
$$\begin{array}{rcl} h'(x) \geq 0 & \iff & e^{-(x+e^{-x})} \geq 1 \\ & \iff & -(x+e^{-x}) \geq 0 \\ & \iff & x + e^{-x} \leq 0 \\ & \iff & e^{-x} \leq -x \end{array}$$
stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$
Or, on sait que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geq t+1$$
D'où : $e^{-x} \geq -x+1$, et ainsi :
$$e^{-x} > -x$$
Par conséquent :
$$h'(x) < 0$$
Ainsi, la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Et, puisqu'elle s'annule en α, elle ne s'annule alors qu'en α.
Autrement dit, α est l'unique point fixe de g.

Conclusion : α est l'unique point fixe de g.

Pourquoi ?
On procède comme pour montrer que pour tout $t \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$...

4.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de g et v_n.
On a :
$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{2n+2} \\ & = & f(u_{2n+1}) \\ & = & f\big(f(u_{2n})\big) \\ & = & g(v_n) \end{array}$$

4.c. Démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par α ; et que la suite (w_n) est décroissante et minorée par α.
Par récurrence, démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_{n+1} \leq w_n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
$v_0 = u_0 = 0$
$w_0 = u_1 = 1$
$v_1 = e^{-1}$
$w_1 = e^{-e^{-1}}$
On a déjà :
$$v_0 \leq v_1 \ ;\ w_1 \leq w_0$$
De plus :
  - Puisque $\alpha \geq 0$, on a : $v_0 \leq \alpha$. Or g est croissante (car $g = f \circ f$), d'où : $g(v_0) \leq g(\alpha)$.
  D'après les deux questions précédentes : $g(v_0) = v_1$ et $g(\alpha) = \alpha$.
  D'où :
  $$v_1 \leq \alpha$$
  - De même :
  $$\alpha \leq w_1$$

  Finalement :
  $$v_0 \leq v_1 \leq \alpha \leq w_1 \leq w_0$$
  L'initialisation est vérifiée. Et on sait que $\alpha \in [0;1]$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_{n+1} \leq w_n$ et montrons que $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \alpha \leq w_{n+2} \leq w_{n+1}$.
Par hypothèse de récurrence :
$$v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_{n+1} \leq w_n$$
D'où, en appliquant $g = f \circ f$, croissante sur $\mathbb{R}$:
$$g(v_n) \leq g(v_{n+1}) \leq g(\alpha) \leq g(w_{n+1}) \leq g(w_n)$$
Or, α est point fixe de g et, d'après la question précédente, et un résultat similaire sur (w_n) :
$$v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \alpha \leq w_{n+2} \leq w_{n+1}$$
L'hérédité est établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_{n+1} \leq w_n$.
Autrement dit : la suite (v_n) est croissante et majorée par α ; et que la suite (w_n) est décroissante et minorée par α.

♡ Astuce du chef ! ♡
C'est la petite astuce du jour, puisqu'il serait compliqué de comparer v_1 et w_1 avec α (que l'on ne connaît pas). Le seule façon de faire serait de montrer que $h(v_1) \geq 0$ et $h(w_1) \leq 0$, c'est à dire $h(v_1) \geq h(\alpha)$ et $h(w_1) \leq h(\alpha)$, puis de composer par h^{-1}, décroissante sur $\mathbb{R}$... Mais ça a l'air un peu technique. D'où cette petite astuce ici.
Au passage, cela aurait aussi pu nous aider dans les exercices 18 et 19 du chapitre 10, mais on pouvait procéder autrement dans ces deux cas (on connaissait la valeur de α...).

4.d. En déduire les limites des suites (v_n) et (w_n).

- Traitons (v_n) :
  - (v_n) est croissante et majorée par α, ainsi,d'après le théorème de convergence monotone, la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \in [0\alpha]$ (car (v_n) est bornée par 0 et α).
  - Ainsi :
  $$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$
  et par continuité de g en ℓ (car g continue sur $\mathbb{R}$) :
  $$\lim_{n\to+\infty} g(v_n) = g(\ell)$$
  Mais :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ g(v_n) = v_{n+1}$$
  Or, $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ ($(v_{n+1}$ est une suite extraite de (v_n)). D'où, par unicité de la limite :
  $$g(\ell) = \ell$$

- ◇ Donc ℓ est un point fixe de g. Or, d'après la question **4.a.**, α est le seul point fixe de g. Par conséquent ; $\ell = \alpha$.

Conclusion : (v_n) converge vers α.

- On procède de la même façon pour (w_n).

Conclusion : (w_n) converge vers α.

5. Que peut-on en conclure sur la suite (u_n) ?
D'après la question précédente, les suite (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers α.

Conclusion : par théorème de recouvrement, la suite (u_n) converge vers α.

●○○○ Exercice 12 - Suite implicite

Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   - **En $-\infty$:**
   $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 = 0$.
   Ainsi, par opération :
   $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0}$$
   - **En 1, à gauche :**
   $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} e^x = e > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x - 1 = 0^-$.
   Ainsi, par opération :
   $$\boxed{\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty}$$
   - **En 1, à droite :**
   $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} e^x = e > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x - 1 = 0^+$.
   Ainsi, par opération :
   $$\boxed{\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty}$$
   - **En $+\infty$:**
   Pour x suffisamment proche de $+\infty$:
   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{x-1} \\ &= \frac{e^x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{e^x}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \end{aligned}$$
   Or, par croissance comparée :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
   et par opérations :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$
   D'où, par produit :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = +\infty$$
   Par conséquent :
   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Important !
On précise les signes pour conclure. Le "0^-" n'est pas justifié : il s'agit ici du signe d'une fonction affine. Si ce n'est pas évident, remettez le nez dans le cours de troisième...

3. Dresser le tableau de variations complet de f.
   - Posons $v : x \longmapsto x - 1$ de sorte que $f = \dfrac{\exp}{v}$.
   exp et v sont dérivables sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ et v ne s'annule pas sur ces intervalles ; donc f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.
   - Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$
   - D'où :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	e^2	↗	$+\infty$

4. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$.

5. Démontrer que f est une bijection de $]-\infty;1[$ dans un intervalle à préciser.
On sait que :
- f est continue sur $]-\infty;1[$, car dérivable sur cet intervalle,
- f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$.

Conclusion : d'après le théorème de bijection, f est bijective de $]-\infty;1[$ dans $f(]-\infty;1[)=]-\infty;0[$.

6. Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f(x)=-n$ possède une unique solution dans $]-\infty;1[$. *On notera* u_n cette solution.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On sait que :
- f est bijective de $]-\infty;1[$ dans $]-\infty;0[$
- $n\in\mathbb{N}^*$, donc $-n\in]-\infty;0[$

Par conséquent, $-n$ possède un unique antécédent dans $]-\infty;1[$ par f.

Conclusion : l'équation $f(x)=-n$ possède une unique solution dans $]-\infty;1[$, notée u_n.

✓ **Rigueur !**
En toute rigueur, on devrait noter $f^{-1}_{|]-\infty;1[}$: la bijection réciproque de la restriction de f à $]-\infty;1[$. En effet, la fonction f n'est pas bijective sur son ensemble de définition...
Mais l'énoncé n'impose pas cette notation ici.

7. Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n en fonction de n et f^{-1}.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Puisque $f(u_n)=-n$, on a $u_n=f^{-1}(-n)$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=f^{-1}(-n)$.

8. En déduire les variations et la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
$$n<n+1$$
D'où :
$$-n>-(n+1)$$
Et par stricte décroissance de f^{-1} sur $]-\infty;0[$, on a :
$$f^{-1}(-n)<f^{-1}(-(n+1))$$
Autrement dit :
$$u_n<u_{n+1}$$
Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
- On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$; donc :
$$\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=1$$
Or :
$$\lim_{n\to+\infty} -n=-\infty$$
Ainsi, par composition de limites :
$$\lim_{n\to+\infty} f(-n)=1$$
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

●●○○ Exercice 13 - Suite implicite

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=xe^{n-x}-1$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les limites de f_n en $\pm\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(n-x)=+\infty$, d'où par composition et opérations :
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=-\infty}$$
- Pour x suffisamment proche de $+\infty$:
$$\begin{aligned} f_n(x) &= xe^{n-x}-1\\ &= e^n\frac{x}{e^x}-1\end{aligned}$$
Or, par croissance comparée :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$
D'où, par opérations :
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=-1}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n.
- Puisque la fonction $x\longmapsto n-x$ est affine, la fonction $x\longmapsto e^{n-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} f_n'(x) &= e^{n-x}-xe^{n-x}\\ &= e^{n-x}(1-x)\end{aligned}$$
- D'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	↗	$e^{n-1}-1$	↘	-1

3. **Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0;1]$, que l'on notera α_n.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On sait que :
  - f_n est continue sur $[0;1]$, car dérivable sur cet intervalle,
  - f_n est strictement croissante sur $[0;1]$.

  D'après le théorème de bijection, f_n est alors bijective de $[0;1]$ dans $f_n([0;1]) = [-1; e^{n-1} - 1]$.
- Or, $n \geq 1$, donc $n - 1 \geq 0$. D'où, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$e^{n-1} \geq 1$$

  Par conséquent :

$$0 \in [-1; e^{n-1} - 1]$$

Par conséquent, 0 possède un unique antécédent dans $[0;1]$ par f_n.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0;1]$, que l'on notera α_n.

4. **Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_n(\alpha_n)$, puis que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On sait que :

$$n + 1 \geq n$$

  D'où :

$$n + 1 - \alpha_n \geq n + 1 - \alpha_n$$

  Puis, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$e^{n+1-\alpha_n} \geq e^{n-\alpha_n}$$

  Et, puisque $\alpha_n \geq 0$, on obtient :

$$\alpha_n e^{n+1-\alpha_n} \geq \alpha_n e^{n-\alpha_n}$$

  Ainsi :

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_n(\alpha_n)$$

- Mais, on sait que :

$$f_n(\alpha_n) = 0 \text{ et } f_{n+1}(\alpha_{n+1})) = 0$$

  Ainsi :

$$f_n(\alpha_n) = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

  D'où, d'après le point précédent :

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$.

☞ POUR INFO...
L'enchaînement des questions 4. et 5. est très fréquent (systématique ?) pour étudier les variations d'une telle suite implicite.

5. **En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

Or, la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]-\infty;1]$ et $\alpha_n, \alpha_{n+1} \in]-\infty;1]$, d'où :

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

Conclusion : la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

PETITE REMARQUE
On peut aussi "appliquer f_{n+1}^{-1}", mais, en toute rigueur, on appliquerait plutôt $f_{n+1}^{-1}{}_{|[0;1]}$: la bijection réciproque de la restriction de f_{n+1} sur $[0;1]$... et comme c'est lourd à écrire, j'utilise l'argument sur f_{n+1}, qui est équivalent (on le répète suffisamment non ?).

6. **Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ qu'on encadrera par deux entiers consécutifs.**

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, donc, d'après le théorème de convergence monotone, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ.
Et comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par 0 et 1, on a $\ell \in [0;1]$.

7. **En raisonnant par l'absurde, démontrer que ℓ n'est pas strictement positive.**

Raisonnons par l'absurde.
Supposons que ℓ est strictement positive. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n e^{n-\alpha_n} - 1 = 0$$

Or $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, donc, par opération : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - \alpha_n) = +\infty$. Ainsi, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n-\alpha_n} = +\infty$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell > 0$, d'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n e^{n-\alpha_n} = +\infty$$

Ceci contredit le fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n e^{n-\alpha_n} - 1 = 0$$

Conclusion : ℓ n'est pas strictement positive.

☞ POUR INFO...
On emploie très fréquemment un raisonnement par l'absurde pour déterminer la limite d'une telle suite implicite.

8. **Conclure sur le valeur de ℓ.**

D'après la question 6., $\ell \in [0;1]$. Et, d'après la question précédente, ℓ n'est pas strictement positive...
Par conséquent :

$$\ell = 0$$

Conclusion : la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

●●○○ **Exercice 14 - Suite implicite**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f_n : x \longmapsto e^{-nx} - x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$.

   - En $-\infty$:
     Puisque $n \neq 0$, on a :
     $$\lim_{x \to -\infty} -nx = +\infty$$
     D'où, par composition et somme :
     $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty}$$
   - En $+\infty$:
     Puisque $n \neq 0$, on a :
     $$\lim_{x \to +\infty} -nx = -\infty$$
     D'où, par composition et somme :
     $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n.
   - f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
     $$f_n(x) = -ne^{-nx} - 1$$
   - Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-ne^{-nx} - 1 < 0$.
     D'où :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	
f_n	$+\infty$ ↘	$-\infty$

✓ Rigueur !
On doit mentionner la stricte négativité de f_n'...

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. *On note α_n cette solution.*
   - On sait que :
     - f_n est continue sur $\mathbb{R}$, car dérivable,
     - f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

     D'après le théorème de bijection, f_n est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   - Or $0 \in \mathbb{R}$, donc 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par f_n.

   Conclusion : l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α_n.

4. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n < 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a :
   $$f_n(0) = 1 \quad ; \quad f_n(\alpha_n) = 0 \quad ; \quad f_n(1) = e^{-n} - 1$$
   Or $n > 0$, donc $-n < 0$, d'où, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:
   $$e^{-n} - 1 < 0$$
   Par conséquent :
   $$f_n(1) < f_n(\alpha_n) < f_n(0)$$
   Et, par stricte décroissance de f_n^{-1} sur $\mathbb{R}$:
   $$1 > \alpha_n > 0$$
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n < 1$.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$. En déduire que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f_n(\alpha_n) = 0$, on a, par équivalences :
     $$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_n) < 0 &\iff f_{n+1}(\alpha_n) < f_n(\alpha_n) \\ &\iff e^{-(n+1)\alpha_n} - \alpha_n < e^{-n\alpha_n} - \alpha_n \\ &\iff e^{-(n+1)\alpha_n} < e^{-n\alpha_n} \\ &\iff -(n+1)\alpha_n < -n\alpha_n && \text{stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff -(n+1) < -n && \alpha_n > 0 \\ &\iff n+1 > n \end{aligned}$$
     Or, on sait que $n + 1 > n$. D'où, par équivalences :
     $$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$$
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     D'après le point précédent :
     $$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$$
     Mais $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$. D'où :
     $$f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$
     Puis, par stricte décroissance de f_{n+1}^{-1} sur $\mathbb{R}$, on obtient :
     $$\alpha_n > \alpha_{n+1}$$

   Conclusion : la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

Petite remarque
On raisonne par équivalences, au cas où la question ne vous inspirerait pas... On pourrait aussi raisonner de façon directe, comme nous l'avions fait à la question 4. de l'exercice précédent.

6. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner un encadrement de sa limite ℓ.
La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0). Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ.
Puisque $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par 0 et 1 (question **4.**), on a alors $\ell \in [0;1]$.

7. Démontrer que ℓ n'est pas strictement positive.
Raisonnons pas l'absurde. Supposons que ℓ est strictement positive.
On a ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell > 0$$
D'où, par produit :
$$\lim_{n\to+\infty} -n\alpha_n = -\infty$$
Et alors, par composition :
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\alpha_n} = 0$$
D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\alpha_n} - \alpha_n = -\ell \neq 0$$
Ce qui contredit le fait que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-n\alpha_n} - \alpha_n = 0$$

Conclusion : ℓ n'est pas strictement positive.

8. Conclure sur la valeur de ℓ.
D'après la question **6.**, $\ell \in [0;1]$. Et, d'après la question précédente, ℓ n'est pas strictement positive...
Par conséquent :
$$\ell = 0$$

Conclusion : la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

9. On considère le programme `Python` suivant :

```python
import numpy as np

def mystere(n) :
    x=0
    while np.exp(-n*x)-x>0 :
        x=x+0.01
    return x
```

9.a. `mystere(1)` renvoie la valeur 0,57. A quoi cela correspond-il ?
0,57 est la valeur approchée par excès de la solution de l'équation $e^{-x} - x = 0$.
En effet, l'algorithme incrémente x avec un pas de 0,01 tant que $f_1(x) > 0$. Il s'arrêtera donc dès que, à 0,01 près, $f_1(x)$ sera devenu négatif ou nul.

> ☞ **Pour info...**
> On parle de méthode par balayage.

9.b. Que fait la fonction `mystere` ?
De façon générale, `mystere(n)` renverra la valeur approchée par excès de α_n.

> ✓ **Rigueur !**
> On dit "une valeur approchée" ou "la valeur approchée par excès" (ou "la valeur approchée par défaut").

●●○○ Exercice 15 - Suite implicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^{n+1} + x^n - 1$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée u_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - La fonction f_n est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:
$$f_n(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1}$$
   Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+_*,\ f_n'(x) > 0$$
   D'où :

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	-1 ↗ $+\infty$

   La limite en $+\infty$ étant obtenue par opération.
   - On sait alors que :
     - f_n est continue, car polynomiale,
     - f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

   D'après le théorème de bijection, f_n est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $f_n(\mathbb{R}^+) = [-1;+\infty[$.
   - Ainsi, $0 \in f_n(\mathbb{R}^+)$. Donc 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}^+$ par f_n.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée u_n.

> ✓ **Rigueur !**
> On exclut $x = 0$ pour mentionner la stricte positivité de f_n' et donc la stricte croissance de f_n.
> On rappelle que "si la dérivée est strictement positive et ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors la fonction est strictement croissante".
> L'information "$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n'(x) \geq 0$" ne nous permettrait pas de conclure...

2. Déterminer u_1.
u_1 est l'unique solution, sur $\mathbb{R}^+$, de l'équation $f_1(x) = 0$.
Mais, les solutions, sur $\mathbb{R}$, de cette équation sont : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Or, on a :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

et, puisque $\sqrt{5} \geq \sqrt{4} = 2$, on a bien :

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$$

Conclusion : $u_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$f_n(u_n) = 0 \ ; \ f_n(1) = 1$$

D'où :

$$f_n(u_n) < f_n(1)$$

Et, par stricte croissance de f_n^{-1} sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$u_n < 1$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 1$.

4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de la commande `suite_u(n)` renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-5} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```
def f(n,x):
    y=......
    return y

def suite_u(n):
    a=...
    b=...
    while abs(a-b)>10**(-5):
        m=...
        if f(n,m)==0:
            a,b=...
        elif f(n,m)*f(n,a)<0:
            b=...
        elif f(n,m)*f(n,a)>0:
            a=...
    return ...
```

```
def f(n,x):
    y=x**(n+1)+x**n-1
    return y

def suite_u(n):
    a=0
    b=1
    while abs(a-b)>10**(-5):
        m=(a+b)/2
        if f(n,m)==0:
            a,b=m,m
        elif f(n,m)*f(n,a)<0:
            b=m
        elif f(n,m)*f(n,a)>0:
            a=m
    return (a+b)/2
```

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1[$, établir : $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.
On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+2} + x^{n+1} - 1 - (x^{n+1} + x^n - 1) \\ &= x^{n+2} - x^n \\ &= x^n(x^2-1) \end{aligned}$$

Mais $x \in [0;1]$, donc $x^n \geq 0$ et $x^2 - 1 \leq 0$. D'où :

$$x^n(x^2-1) \leq 0$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq 0$.

6. Déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire la convergence de la suite (u_n) vers un réel $\ell \in [u_1;1]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait, d'après les questions **1.** et **3.**, que $u_n \in [0;1]$.
Ainsi, d'après la question précédente :
$$f_{n+1}(u_n) \leq f_n(u_n)$$
Mais, $f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. D'où :
$$f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$$
Et, par (stricte) croissance de f_{n+1}^{-1} sur $\mathbb{R}^+$:
$$u_n \leq u_{n+1}$$
Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée (par 1), donc, d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, avec $\ell \leq 1$.
De plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, donc minorée par son premier terme. D'où : $\ell \geq u_1$

Conclusion : la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [u_1;1]$.

✓ **Rigueur !** Cette ligne est indispensable pour justifier qu'il est licite d'utiliser le résultat de la question précédente avec $x = u_n$.

7. En raisonnant par l'absurde, montrer que (u_n) converge vers 1.

- Par l'absurde, supposons que $\ell < 1$.
Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, de limite ℓ, et minorée par 0, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \ell$$
D'où, par croissance de $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n^n \leq \ell^n$$
Mais, $\ell \in]-1;1[$, donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \ell^n = 0$$
D'où, par théorème d'encadrement :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0$$
De manière analogue, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0$$
Puis, par somme :
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n^{n+1} + u_n^n - 1) = -1$$
Ce qui contredit le fait que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^{n+1} + u_n^n - 1 = 0$$
Conclusion : ℓ n'est pas strictement inférieure à 1.
- Mais, on sait que $\ell \in [u_1;1]$.
Donc :
$$\ell = 1$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Important ! On essaie de bien comprendre l'importance du raisonnement mis en place.

✘ **Attention !** On rappelle que l'argument "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0$" est faux. En voici un exemple ! Exemple plus simple à retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{n} < 1$, et pourtant :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$
Voir exercice 5 du chapitre 6...

●●●○ Exercice 16 - Suite implicite

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions polynômes P_n définies pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 2$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ P_n(x) = 1 + x + ... + x^n$$
La fonction P_n est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a : $P_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$ Et, puisque $x \in \mathbb{R}^+$, on obtient :
$$P_n'(x) > 0$$
On sait alors que :
- P_n est continue sur $[0;+\infty[$
- P_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Ainsi, par théorème de bijection, P_n est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $P_n(\mathbb{R}^+) = [P_n(0); \lim_{x\to+\infty} P_n(x)[= [1;+\infty[$.
Or, $2 \in P_n(\mathbb{R}^+)$, donc l'équation $P_n(x) = 2$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 2$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.

2. Déterminer u_1 et u_2.

- On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $P_1(x) = 1 + x$. D'où :
$$\boxed{u_1 = 1}$$

- On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $P_2(x) = 1 + x + x^2$.

  Or, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 + x + 1 = 2$ sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$...

  Mais :
$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$$
  et, puisque $\sqrt{5} \geq \sqrt{4} = 2$, on a bien :
$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$$
  D'où :
$$\boxed{u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Comparer $P_{n+1}(x)$ et $P_n(x)$.

On a :
$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) - P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \\ &= x^{n+1} \end{aligned}$$
Or $x \in \mathbb{R}^+$, donc $x^{n+1} \geq 0$.

Conclusion : $P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$

4. Étudier les variations de (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On vient d'établir :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$$
Donc, puisque $u_n \in \mathbb{R}^+$, on obtient :
$$P_{n+1}(u_n) \geq P_n(u_n)$$
Or $P_n(u_n) = 2 = P_{n+1}(u_{n+1})$, d'où :
$$P_{n+1}(u_n) \geq P_{n+1}(u_{n+1})$$
Et, par croissance de la fonction P_{n+1}^{-1} sur $[1;+\infty[$:
$$u_n \geq u_{n+1}$$

Conclusion : la suite (u_n) est décroissante.

✓ **Rigueur !** Cette ligne est indispensable pour justifier qu'il est licite d'utiliser le résultat de la question précédente avec $x = u_n$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]\frac{1}{2};1\right]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme, u_1, qui vaut 1.
- Ensuite :
$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k && \tfrac{1}{2} \neq 1 \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) && \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} > 0 \\ &< 2 \end{aligned}$$
  Et comme $P_n(u_n) = 2$, on a ainsi :
$$P_n\left(\frac{1}{2}\right) < P_n(u_n)$$
  D'où, par stricte croissance de la fonction P_n^{-1} sur $[1;+\infty[$:
$$\frac{1}{2} < u_n$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]\frac{1}{2};1\right]$.

Petite remarque On peut aussi calculer $P_n(1)$, et vérifier que $P_n(1) \geq 2$...

Petite remarque Ou par stricte croissance de la fonction P_n sur $\mathbb{R}^+$: on a déjà vu que les deux arguments sont équivalents.

6. Conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ qui vérifie $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par $\frac{1}{2}$), donc d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, qui vérifie $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ (car (u_n) est également majorée par 1).

✗ **Attention !** Les inégalités strictes deviennent larges en passant à la la limite...

7. Déterminer la valeur de ℓ.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, on a :
$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{2} < u_n \leq u_2 < 1$$
Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$.

- On a ainsi $u_n \neq 1$ et donc :
$$\sum_{k=0}^{n} u_n^k = \frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n}$$
  Et comme $P_n(u_n) = 2$, on obtient :
$$\frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n} = 2$$

- Également, par croissance de la fonction $x \longmapsto x^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq u_n^{n+1} \leq u_2^{n+1}$$

Et comme $u_2 \in]-1;1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_2^{n+1} = 0$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$.
Par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0$$

Et ainsi, en passant à la limite dans la relation $\dfrac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n} = 2$, on obtient :

$$\frac{1}{1-\ell} = 2$$

Ce qui donne $\ell = \frac{1}{2}$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

✘ Attention !
Le raisonnement mis en place est indispensable.
On rappelle que l'argument "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$" est faux. En voici un exemple !
Exemple à retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{n} < 1$, et pourtant :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Voir exercice 5 du chapitre 6...

Petite remarque
Pour voir les courbes de P_n et le comportement de u_n : ici
On remarque au passage que la convergence de (u_n) vers $\frac{1}{2}$ est rapide... En effet : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}u_2^{n+1}$...

●●●○ Exercice 17 - Suite récurrente

Dans tout l'exercice, a désigne un réel strictement supérieur à 1. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a^{u_n} \end{cases}$$

Considérons également la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de f_a sur $\mathbb{R}$.
Puisque $a > 0$ ($a > 1$), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) \underset{\text{Réflexe !}}{=} e^{x\ln(a)}$$

La fonction $x \longmapsto \ln(a)x$ est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_a'(x) = \ln(a)e^{x\ln(a)}$$

Puisque $a > 1$, on a (stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$) $\ln(a) > 0$.

Conclusion : la fonction f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Petite remarque
On aurait aussi pu considérer $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$.
Puis : $f_a(x) - f_a(y) = a^x(1 - a^{y-x})$.
Comme $a > 1$ et $y - x > 0$, on a $a^{y-x} > 1$. D'où $f_a(x) - f_a(y) < 0$, autrement dit $f_a(x) < f_a(y)$: f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$$

Justifier alors que (u_n) possède une limite en $+\infty$.

- ◇ **Initialisation.** Pour $n = 0$:
$u_0 = 1$ et $u_1 = a$. Puisque $a > 1$, on a bien $u_1 \geq u_0$: l'initialisation est vérifiée.
◇ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$u_{n+1} \geq u_n$" et montrons "$u_{n+2} \geq u_{n+1}$".
Par hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} \geq u_n$$

Puis, en appliquant f_a, croissante sur $\mathbb{R}$:

$$f_a(u_{n+1}) \geq f_a(u_n)$$

Autrement dit :

$$u_{n+1} \geq u_{n+1}$$

L'hérédité est établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.

- Puisque (u_n) est croissante, par théorème de limite monotone, elle possède une limite en $+\infty$.

☞ Rappel...
Le théorème de limite regroupe le théorème de convergence monotone et celui de divergence monotone.
En particulier, si (u_n) est croissante, qu'elle soit majorée ou non, elle possède une limite en $+\infty$.

3. Considérons la fonction $g_a : x \longmapsto f_a(x) - x$ définie sur $[0;+\infty[$.

3.a. Dériver g_a puis démontrer :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ \left(g_a'(x) > 0 \iff x > \frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right)$$

- g_a est la somme de deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$, elle l'est donc également.
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} g_a'(x) &= f_a'(x) - 1 \\ &= \ln(a)e^{x\ln(a)} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g_a'(x) > 0 &\iff \ln(a)e^{x\ln(a)} - 1 > 0 \\ &\iff \ln(a)e^{x\ln(a)} > 1 && \text{↲ } a > 1 \text{, donc } \ln(a) > 0 \\ &\iff e^{x\ln(a)} > \frac{1}{\ln(a)} && \text{↲ stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \text{ et } \frac{1}{\ln(a)} > 0 \\ &\iff x\ln(a) > \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right) \\ &\iff x\ln(a) > -\ln(\ln(a)) && \text{↲ } \ln(a) > 0 \\ &\iff x > \frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \end{aligned}$$

3.b. *Dans cette question, on suppose $a \geq e$.*

3.b.i. Dresser le tableau de variations complet de g_a sur $[0;+\infty[$.

On a :

$$a \geq e$$

D'où, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$, on a :

$$\ln(e) \geq 1$$

Puis :

$$\ln(\ln(a)) \geq 1$$

Et enfin :

$$\frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \leq 0$$

D'après la question précédente, on a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g_a(x) \geq 0$$

D'où :

x	0		$+\infty$
g_a	1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour la limite en $+\infty$:
Pour x suffisamment proche de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} g_a(x) &= e^{x\ln(a)} - x \\ &= e^{x\ln(a)}\left(1 - \frac{x}{\left(e^x\right)^{\ln(a)}}\right) \end{aligned}$$

Petite remarque
J'avais oublié que la limite de g_a en $+\infty$ était demandée (j'ai mis "non nécessaire" sur vos copies).
Bien souvent, la justification était alors incomplète...

Puisque $a > 1$, on a $\ln(a) > 0$, et ainsi, par croissance comparée :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\left(e^x\right)^{\ln(a)}} = 0$$

D'où :

$$\lim_{x \to +\infty} g_a(x) = +\infty$$

3.b.ii. En déduire, pour tout $x \in [0;+\infty[$, le signe de $g_a(x)$.

Puisque g_a est croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle est minorée par $g_a(0) = 1$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g_a(x) > 0$.

3.c. *Dans cette question, on suppose $a < e$.*

3.c.i. Dresser le tableau de variations de g_a sur $[0;+\infty[$.

On a :

$$1 < a < e$$

D'où, par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$0 < \ln(a) < 1$$

Puis :

$$\ln(\ln(a)) < 0$$

Et enfin, puisque $\ln(a) > 0$:

$$\frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)} > 0$$

D'où, en utilisant le résultat de la question **3.a.** :

x	0		$\frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$		$+\infty$
$g_a'(x)$		$-$	0	$+$	
g_a	1	$\searrow$	$\frac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$	$\nearrow$	$+\infty$

Détail du calcul du minimum :

$$\begin{aligned} g_a\left(\frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right) &= \exp\left(\ln(a)\frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right) - \frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \\ &= \frac{1}{\ln(a)} - \frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \\ &= \frac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \end{aligned}$$

3.c.ii. En distinguant deux cas selon les valeurs de a, dresser le tableau de signe de $g_a(x)$, pour $x \in [0;+\infty[$.

- D'après la question précédente, g_a possède un minimum, égal à $\frac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$, atteint en $\frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$. Si ce minimum est positif, g_a sera positive ; en revanche, s'il est négatif, g_a changera de signe !
- On a :

$$\begin{aligned} 1+\ln(\ln(a)) \geq 0 &\iff \ln(\ln(a)) \geq -1 \\ &\iff a \geq e^{e^{-1}} \quad \text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}$$

- D'après la question précédente, on peut en déduire :
  - Si $a > e^{e^{-1}}$:
    Alors le minimum de g_a sur $\mathbb{R}^+$ est strictement positif, et donc :
    $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g_a(x) > 0$$
  - Si $a = e^{e^{-1}}$:
    Alors le minimum de g_a (atteint en e) sur $\mathbb{R}^+$ est 0.
  - Si $a \in]1; e^{e^{-1}}[$:

    ⇝ Sur $\left[0; \dfrac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right]$:

    ➟ g_a est continue sur $\left[0; \dfrac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right]$

    ➟ g_a est strictement décroissante sur $\left[0; \dfrac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right]$

    Par théorème de bijection, g_a est bijective de $\left[0; \dfrac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right]$ dans $g_a\left(\left[0; \dfrac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right]\right) = \left[\dfrac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}; 1\right]$.

    Or, d'après ce qui précède, puisque $a \in]1; e^{e^{-1}}[$, on a $\dfrac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)} < 0$, et donc $0 \in \left[\dfrac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}; 1\right]$.

    Par conséquent, l'équation $g_a(x) = 0$ possède une unique solution sur $\left[0; \dfrac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right]$, notée α.

    ⇝ De la même façon, l'équation $g_a(x) = 0$ possède une unique solution sur $\left[\dfrac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}; +\infty\right[$, notée β.

Petite remarque
g_a atteint son minimum en $\dfrac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$...
Et : $\dfrac{-\ln(\ln(e^{e^{-1}}))}{\ln(e^{e^{-1}})} = \ldots = e$.

Conclusion :

- si $a > e^{e^{-1}}$, alors :

x	0	$+\infty$
$g_a(x)$	$+$	

- si $a = e^{e^{-1}}$, alors :

x	0		e		$+\infty$
$g_a(x)$		$+$	0	$+$	

- si $a \in]1; e^{e^{-1}}[$, alors :

x	0		α		β		$+\infty$
$g_a(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. *Dans cette question, on suppose $a = \sqrt{2}$ et on admet que $1 + \ln(\ln(\sqrt{2})) < 0$.*
   Montrer que (u_n) converge puis déterminer la valeur de sa limite.
   - Nous sommes dans le cas où la fonction $g_{\sqrt{2}}$ possède un minimum négatif...
     Par conséquent, $g_{\sqrt{2}}$ s'annule deux fois. Autrement dit, $f_{\sqrt{2}}$ possède deux points fixes.
     Or, on remarque que : $f_{\sqrt{2}}(2) = 2$ et $f_{\sqrt{2}}(4) = 4$...
     Par conséquent : 2 et 4 sont les seuls points fixes de $f_{\sqrt{2}}$.
   - On sait également que (u_n) est croissante, et $u_0 = 1$. On démontre alors, par récurrence immédiate, que (u_n) est majorée par 2.
   - (u_n) est ainsi croissante et majorée (par 2), donc par théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ.
     Or (u_n) est croissante, donc minorée par son premier terme; d'où (u_n) est bornée par 1 et 2. Ainsi : $\ell \in [1; 2]$.
   - Par continuité de $f_{\sqrt{2}}$ sur $\mathbb{R}$ (donc en ℓ), on a ainsi :
     $$\lim_{n\to+\infty} f_{\sqrt{2}}(u_n) = f_{\sqrt{2}}(\ell)$$
     Et comme on sait que :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_{\sqrt{2}}(u_n)\ ;\ \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$
     Par unicité de la limite, on a :
     $$\ell = f_{\sqrt{2}}(\ell)$$
     Or, le seul point fixe de $f_{\sqrt{2}}$ dans l'intervalle $[1; 2]$ est 2, donc (u_n) converge vers 2.

Pourquoi ?
On sait que si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $f_a(\ell) = \ell$...
Puisque (u_n) débute à 1 et qu'elle est croissante, elle ne peut pas converger vers 4...

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 2.

5. On souhaite maintenant déterminer les valeurs de a pour lesquelles la suite (u_n) converge.
   5.a. Montrer que si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $g_a(\ell) = 0$. En déduire que, nécessairement, $a \leq e^{e^{-1}}$.
   Supposons que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

- Par le même argument que celui utilisé à la question précédente :

$$\ell = f_a(\ell)$$

.
D'où :

$$g_a(\ell) = 0$$

- Mais, d'après la question **3.c.ii.**, g_a ne s'annule que si $a \leq e^{e^{-1}}$.

Conclusion : si (u_n) converge, alors $a \leq e^{e^{-1}}$.

5.b. Réciproquement, montrer que si $a \leq e^{e^{-1}}$, alors la suite (u_n) converge.

Supposons que $a \leq e^{e^{-1}}$.

- Si $a = e^{e^{-1}}$.
  Dans ce cas, e est le seul réel en lequel g_a s'annule ; autrement dit, e est le seul point fixe de f_a.
  On démontre ensuite par récurrence immédiate que (u_n) est majorée par e... Puis, par le même raisonnement que ce qui a été fait en question **4.**, on obtient la convergence de la suite (u_n) vers e.
- Si $a > e^{e^{-1}}$.
  Alors on démontre, de la même façon, que (u_n) converge vers α, défini à la question **3.c.ii.** (le plus petit zéro de g_a).

Conclusion : si $a \leq e^{e^{-1}}$, alors (u_n) converge.

5.c. Que peut-on conclure ?

On résume les deux questions précédentes...

Conclusion : la suite (u_n) converge si, et seulement si, $a \leq e^{e^{-1}}$.