Exercices du chapitre 13
Continuité locale et globale des fonctions

●○○○ Exercice 1 - Études de continuité locale

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ dans chaque cas.

1. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

●○○○ Exercice 2 - Prolongement par continuité

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $]-1;+\infty[$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-5x-6}{x+1}$ est vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'ensemble de définition de : $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $[-1;+\infty[$.
5. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$?

●●○○ Exercice 3 - Théorème de bijection

Dans chaque cas :

- dresser le tableau de variations complet de f sur I
- démontrer que f est bijective de I dans un intervalle à préciser
- donner le tableau de variations complet de f^{-1}

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$ sur $[1;+\infty[$
2. $f : x \longmapsto (x+2)e^{-x}$ sur $[-1;+\infty[$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ sur $]0;1[$.

●●○○ Exercice 4 - Des histoires de point fixe...

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$. Démontrer que f possède au moins un point fixe.
2. Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f possède un unique point fixe.
3. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$ telle que $f \circ f = f$. Préciser l'ensemble des points fixes de f.

●●●○ Exercice 5 - Une autre histoire de point fixe !

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(a) = a$, alors f possède au moins un point fixe.

●●●○ Exercice 6 - Encore une !

Soient f et g deux fonctions continues de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

1. Démontrer que la fonction f possède au moins un point fixe sur $[0;1]$.
2. Considérons alors $a \in [0;1]$ tel que $f(a) = a$ puis définissons la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

   2.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point fixe de f.
   2.b. Établir le résultat voulu dans le cas où (u_n) est monotone.
   2.c. Établir le résultat voulu dans le cas où (u_n) n'est pas monotone.

●●○○ Exercice 7

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$ telles que :

$$\forall x \in [0;1],\ f(x) > g(x)$$

1. Démontrer : $\exists m > 0 \ / \ \forall x \in [0;1],\ f(x) \geq g(x) + m$.
2. Ce résultat est-il encore valable si f et g sont définies et continues sur $\mathbb{R}$?

●●●○ Exercice 8 - Les rennes du Père Noël

Afin d'être opérationnels le jour de Noël, les rennes du Père Noël suivent un entraînement intensif... Ceux-ci doivent parcourir la distance entre Vancouver et Montréal (soit 4000 km environ) en 5 secondes !
Montrer qu'il existe un intervalle d'une seconde pendant lequel les rennes parcourent exactement 800 km.
Indication : on notera $d(t)$ la distance totale parcourue par les rennes au bout de t secondes et $\mathrm{D}(t) = d(t+1) - d(t)$ la distance parcourue par les rennes sur l'intervalle $[t;t+1]$ d'amplitude 1 seconde...

●○○○ Exercice 9 - Étude de fonctions

On considère la fonction $f : x \longmapsto e^x - \ln(x)$, définie sur $]0;+\infty[$ ainsi que $g : x \longmapsto xe^x - 1$, définie sur $[0;+\infty[$.

1. 1.a. Dresser le tableau de variations complet de g sur $[0;+\infty[$.
   1.b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[0;+\infty[$. Vérifier que $\alpha \in]0;1[$.
   1.c. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes de sa courbe représentative.
3. Dresser le tableau de variations complet de f.
4. Montrer : $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

●●○○ Exercice 10 - Suite récurrente d'ordre 1

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. Donner le tableau de variations de f^{-1}.
2. Vérifier qu'il existe dans $[0;1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et bornée par 0 et 1.
4. 4.a. Montrer que pour tout réel x de $[0;1]$, $f(x) - x \geq 0$.
   4.b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   4.c. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser la valeur de sa limite.
5. 5.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.
   5.b. Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   5.c. Résoudre l'inéquation $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < 10^{-5}$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. *Donnée :* $\dfrac{5\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 16,6$.
   5.d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

●●○○ Exercice 11 - Suite récurrente d'ordre 1 avec fonction décroissante

Considérons la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}$ et la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Justifier que la fonction f possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, noté α, vérifiant $\alpha \in [0;1]$.
2. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que les premiers termes de la suite (u_n).
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
4. Posons $g = f \circ f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   4.a. Démontrer que α est un point fixe de g, puis que c'est le seul.
   4.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de g et v_n.
   4.c. Démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par α ; et que la suite (w_n) est décroissante et minorée par α.
   4.d. En déduire les limites des suites (v_n) et (w_n).
5. Que peut-on en conclure sur la suite (u_n) ?

●○○○ Exercice 12 - Suite implicite

Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Dresser le tableau de variations complet de f.

4. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$.
5. Démontrer que f est une bijection de $]-\infty;1[$ dans un intervalle à préciser.
6. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = -n$ possède une unique solution dans $]-\infty;1[$. *On notera u_n cette solution.*
7. Exprimer u_n en fonction de n et f^{-1}.
8. En déduire les variations et la limite de (u_n).

●●●○ Exercice 13 - Suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = xe^{n-x} - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les limites de f_n en $\pm\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0;1]$, que l'on notera α_n.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n e^{n-\alpha_n} \leq \alpha_n e^{n+1-\alpha_n}$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_n(\alpha_n)$, puis que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$.
6. En déduire que la suite (α_n) est décroissante.
7. Justifier que la suite (α_n) converge vers un réel ℓ qu'on encadrera par deux entiers consécutifs.
8. En raisonnant par l'absurde, démontrer que ℓ n'est pas strictement positive.
9. Conclure sur le valeur de ℓ.

●●●○ Exercice 14 - Suite implicite

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f_n : x \longmapsto e^{-nx} - x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à préciser.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. *On note α_n cette solution.*
5. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n < 1$.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$. En déduire que (α_n) est strictement décroissante.
7. Justifier que la suite (α_n) converge et donner un encadrement de sa limite ℓ.
8. A l'aide de l'égalité $\alpha_n = e^{-n\alpha_n}$ et en raisonnant par l'absurde, démontrer que ℓ n'est pas strictement positive.
9. Conclure sur la valeur de ℓ.
10. On considère le programme `Python` suivant :

```python
import numpy as np

def mystere(n) :
    x=0
    while np.exp(-n*x)-x>0 :
        x=x+0.01
    return x
```

   10.a. `mystere(1)` renvoie la valeur $0,57$. A quoi cela correspond-il ?
   10.b. Que fait la fonction `mystere` ?

●●○○ Exercice 15 - Suite implicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n - 1$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée u_n.
2. Déterminer u_1.
3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 1$.
4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de la commande `suite_u(n)` renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-5} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
def f(n,x):
    y=......
    return y

def suite_u(n):
    a=...
    b=...
    while abs(a-b)>10**(-5):
        m=...
        if f(n,m)==0:
            a,b=...
        elif f(n,m)*f(n,a)<0:
            b=...
        elif f(n,m)*f(n,a)>0:
            a=...
    return ...
```

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1[$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
6. Déterminer la monotonie de (u_n). En déduire la convergence de la suite (u_n) vers un réel $\ell \in [u_1\,;1]$.
7. En raisonnant par l'absurde, montrer que (u_n) converge vers 1.

●●○○ Exercice 16 - Suite implicite

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions polynômes P_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\mathrm{P}_n(x) = 2$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Comparer $\mathrm{P}_{n+1}(x)$ et $\mathrm{P}_n(x)$.
3. Étudier les variations de (u_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]\frac{1}{2};1\right]$.
5. Conclure que (u_n) converge vers un réel ℓ qui vérifie $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.
6. Déterminer la valeur de ℓ.

●●●○ Exercice 17 - Suite récurrente

Dans tout l'exercice, a désigne un réel strictement supérieur à 1. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a^{u_n} \end{cases}$$

Considérons également la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de f_a sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$$
Justifier alors que (u_n) possède une limite en $+\infty$.
3. Considérons la fonction $g_a : x \longmapsto f_a(x) - x$ définie sur $[0;+\infty[$.
   - **3.a.** Dériver g_a puis démontrer :
   $$\forall x \in [0;+\infty[,\ \left(g_a'(x) > 0 \iff x > \frac{-\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right)$$
   - **3.b.** *Dans cette question, on suppose $a \geq e$.*
     - **3.b.i.** Dresser le tableau de variations complet de g_a sur $[0;+\infty[$.
     - **3.b.ii.** En déduire, pour tout $x \in [0;+\infty[$, le signe de $g_a(x)$.
   - **3.c.** *Dans cette question, on suppose $a < e$.*
     - **3.c.i.** Dresser le tableau de variations de g_a sur $[0;+\infty[$.
     - **3.c.ii.** En distinguant deux cas selon les valeurs de a, dresser le tableau de signe de $g_a(x)$, pour $x \in [0;+\infty[$.
4. *Dans cette question, on suppose $a = \sqrt{2}$ et on admet que* $1 + \ln(\ln(\sqrt{2})) < 0$.
Montrer que (u_n) converge puis déterminer la valeur de sa limite.
5. On souhaite maintenant déterminer les valeurs de a pour lesquelles la suite (u_n) converge.
   - **5.a.** Montrer que si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $g_a(\ell) = 0$. En déduire que, nécessairement, $a \leq e^{e^{-1}}$.
   - **5.b.** Réciproquement, montrer que si $a \leq e^{e^{-1}}$, alors la suite (u_n) converge.
   - **5.c.** Que peut-on conclure ?