14

Séries numériques

Introduction...

Pour commencer, que penser de l'égalité ci-dessous, que Srinivasa Ramanujan (1887-1920, indien) avait écrite dans une lettre envoyée à Godfrey Hardy (1877-1947, anglais) ?

$$1+2+3+4+... = \frac{-1}{12}$$

La notion de somme infinie est au cœur des mathématiques depuis plus de deux millénaires... mais elle est en fait liée à la notion de limite de suite, qui n'a été rigoureusement introduite qu'aux XVIII et XIXème siècles. La conséquence de cet écart entre la volonté de manipulation d'une somme infinie et sa définition rigoureuse : des confusions, des interrogations et des paradoxes, comme les célèbres paradoxes de Zénon ; ou bien des égalités du type de celle écrite ci-dessus.

Dans ce chapitre, nous allons définir ces objets afin de donner un cadre d'étude et de calculs de ces *sommes infinies*.

Quelques "réponses" à cette fameuse égalité : ici ou là...

Pour bien démarrer...

1 # Soit $q \in]-1;1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Établir la convergence de (S_n).

2 # Rappeler le théorème de limite monotone sur les suites.

3 # Considérons la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{e^k k!}$. Montrer que (S_n) est croissante.

L'objectif de ce chapitre est l'étude de suites un peu particulières : les suites dont le terme général est de la forme $\sum_{k=0}^{n} u_k$, où (u_k) est également une suite.
Par exemple, nous allons étudier (entre autres) les suites (S_n) dont voici les termes généraux :

- $S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Dans tout ce chapitre, (u_n) désigne une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Petite remarque — A adapter si la suite n'est définie qu'à partir du rang 1, 2 ou autre...

I Notion de séries : généralités et premiers exemples

Définitions 1 - Série numérique

D1# La **série de terme général u_n**, notée $\sum u_n$, est la suite (S_N) définie par : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

D2# Soit $N \in \mathbb{N}$. Le terme S_N de la série est la **somme partielle d'indice N (de rang N)** de la série ; et (S_N) est la suite des sommes partielles.

✘ Attention ! — $\sum u_n$ n'est pas un nombre !

En gros... — Une série est une suite de sommes partielles.

Définitions 2 - Convergence & divergence d'une série

D1# La série $\sum u_n$ **est convergente** lorsque la suite (S_N) des sommes partielles converge.

D2# La série $\sum u_n$ **est divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente ; autrement dit lorsque (S_N) a une limite infinie ou pas de limite.

D3# Si la série $\sum u_n$ est convergente, on notera .... sa limite : c'est la **somme de la série**.

✓ Rigueur ! — $\sum u_n$ désigne la série qui est soit convergente soit divergente ; alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série (la limite des sommes partielles, donc un nombre réel) : à ne pas confondre avec la série elle-même et à **ne pas écrire tant que la convergence de la série n'a pas été prouvée** !

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour étudier la nature (convergence ou divergence) de $\sum u_n$ et si besoin calculer sa somme.**
On peut :
- calculer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_N,
- étudier la limite de S_N en $+\infty$,

et si besoin, faire un télescopage ou un changement d'indice...

Exemples 1

E1 **Études la nature de la série $\sum n$.**

Conclusion : la série $\sum n$ ....

E2 **Étudions la nature de la série $\sum \frac{1}{2^n}$.**

Conclusion : la série $\sum \frac{1}{2^n}$ ....

E3 **Justifions que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculons sa somme.**

✘ ATTENTION !
Les télescopages se font seulement sur les sommes partielles !

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ ....

On voit bien que le cours ne peut se résumer à ce qui précède, sinon, quel intérêt de faire une chapitre spécifique ? Un des moyens d'étudier la nature de $\sum u_n$ est de passer par la somme partielle, mais l'enjeu du chapitre est le suivant :

Comment, en étudiant seulement (u_n), peut-on déterminer la nature de $\sum u_n$?

MALHEUREUSEMENT...
Seule une partie de la réponse sera fournie cette année, elle sera étoffée l'année prochaine...

II Lien série / terme général...

Avec les notations précédentes, remarquons que, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$S_{N+1} - S_N = \sum_{n=0}^{N+1} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n = \ldots\ldots\ldots$$

Ainsi il y a un lien direct entre la série $\sum u_n$ et la suite (u_n). Par exemple :

- Si $\sum u_n$ est convergente, alors en passant à la limite dans l'égalité $S_{N+1} - S_N = u_N$, on obtient :

$$\lim_{N\to+\infty} u_N = \lim_{N\to+\infty} S_{N+1} - \lim_{N\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$$

- Si (u_n) est positive, alors (S_N) sera croissante... (si de plus elle est majorée, alors elle convergera...).

PETITE REMARQUE
En pratique, il faudra bien avoir en tête qu'il y a des liens entre $\sum u_n$ et (u_n) ; mais la plupart du temps, l'énoncé guide relativement bien.

On retient :

II.1 Condition nécessaire de convergence

Propriété 1 - Condition nécessaire de convergence / Condition suffisante de divergence

Voici deux formulations équivalentes du même résultat :

- Si $\sum u_n$ est convergente, alors nécessairement, (u_n) converge vers 0.
- Si (u_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ est divergente ; on dit même que $\sum u_n$ **est grossièrement divergente**.

★ DÉMONSTRATION : Faite ci-dessus... (le deuxième énoncé est la contraposée du premier). ★

Exemples 2

E1 La série $\sum \frac{n}{n+1}$ est grossièrement divergente car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} =$ ....

E2 Les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ ne sont pas grossièrement divergentes ; elles sont peut-être convergentes, ou pas...

II.2 Cas particuliers des séries à terme général positif

Voyons maintenant quelques propriétés utiles sur les séries à terme général positif : c'est un cas où les choses se passent très bien !

> **Vocabulaire**
> On dit que $\sum u_n$ est à terme général positif lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Soient $\sum u_n$ une série et (S_n) la suite des sommes partielles associée. On a déjà remarqué que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$$

Ainsi, si (u_n) est à termes positifs, alors la suite (S_n) est croissante.
Le théorème de limite monotone permet donc d'obtenir :

- si (S_n) est majorée, alors elle est convergente, c'est à dire $\sum u_n$ est convergente ;
- si (S_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$, et donc $\sum u_n$ est divergente.

Autrement dit, si (S_n) est une série à termes généraux positifs, on a :

$$\sum u_n \text{ est convergente si, et seulement si, } (S_n) \text{ est majorée.}$$

En pratique, cela fait seulement l'économie d'une étape de calcul et de l'utilisation du théorème de limite monotone... Si on veut un résultat plus intéressant, on retiendra surtout le théorème suivant :

Théorème 1 - Critère de comparaison sur les séries à terme général positif

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On a :

1. $$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum u_n \text{ diverge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum v_n \text{ diverge}$$

> **Petite remarque**
> Résultats encore valables si l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang.

★ Démonstration :

★

Exemple 3

Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$.
Puisque $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente ($q = \frac{1}{2} \in]-1;1[$), par théorème de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum u_n$ est également convergente.

Petite remarque Si les termes généraux sont négatifs, il suffit de les multiplier par -1... On s'en sort de la même façon. Le souci, c'est quand le terme général change toujours de signe (vilain) !

III Séries usuelles

Voyons maintenant les séries usuelles, qui seront, en particulier, très utiles dans les prochains chapitres de probabilités.

Propriétés 2 - séries géométriques

Les séries $\sum q^n$, $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1;1[$ et, pour tout $q \in]-1;1[$:

P1# $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ *(série géométrique)*

P2# $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ *(série géométrique dérivée)*

P3# $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$ *(série géométrique dérivée seconde)*

✘ Attention ! Ne pas oublier l'hypothèse sur q...

★ **Démonstration :**

P1 #
- Si $q \notin]-1;1[$, on sait que (q^n) ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum q^n$ diverge grossièrement.
- Si $q \in]-1;1[$, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Puisque $q \in]-1;1[$, on a $\lim_{N\to+\infty} q^{N+1} = 0$; et, par opérations sur les limites : $\lim_{N\to+\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.
Par conséquent, la suite des sommes partielles converge vers $\frac{1}{1-q}$; autrement dit, la série $\sum q^n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

P2 #
- Si $q \notin]-1;1[$, on sait que (nq^{n-1}) ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ diverge grossièrement.
- Si $q \in]-1;1[$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En dérivant la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{N} x^n$, dont une autre expression est $\frac{1-x^{N+1}}{1-x}$, et en évaluant en q, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N} nq^{n-1} = \frac{-(N+1)q^N(1-q)+1-q^{N+1}}{(1-q)^2}$$

Puisque $q \in]-1;1[$, on a $\lim_{N\to+\infty} q^{N+1} = 0$ et par croissances comparées : $\lim_{N\to+\infty} (N+1)q^N = 0$. Par opérations sur les limites, on obtient ainsi : $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.
Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

P3 #
- Si $q \notin]-1;1[$, on sait que $(n(n-1)q^{n-2})$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ diverge grossièrement.
- Si $q \in]-1;1[$, on dérive à nouveau... et on obtient : la série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ est convergente et :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

★

Petite remarque Notons que les séries géométriques dérivée et dérivée seconde ont respectivement le premier et les deux premiers termes nuls. Ainsi, en cas de convergence : $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$.

Exemples 4

E1 **Étudions la convergence, et le cas échéant calculons la somme, de la série** $\sum \frac{1}{3^n}$.

E2 **Étudions la convergence, et le cas échéant calculons la somme, de la série** $\sum \left(\frac{e^2}{4}\right)^n$.

E3 **Étudions la convergence, et le cas échéant calculons la somme, de la série** $\sum \frac{n}{2^{n-1}}$.

E4 **Étudions la convergence, et le cas échéant calculons la somme, de la série** $\sum \frac{n(n-1)}{4^{n-2}}$.

Propriété 3 - série exponentielle

Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

★ Démonstration : Voir le CB ! ★

Exemples 5

E1 La série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente et sa somme vaut ....

E2 La série $\sum \frac{(-3)^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut ....

E3 La série $\sum \frac{-2^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut ....

Et pour terminer sur les séries usuelles, les fameuses :

Propriété 4 - séries de Riemann

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si $\alpha > 1$.

★ Démonstration : Les cas $\alpha \leq 1$ et $\alpha \geq 2$ seront démontrés en exercice, le dernier cas dans un prochain chapitre... ★

☞ Pour info...

On peut exprimer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ avec des constantes connues si α est un entier pair non nul (merci Euler !) ; mais pour les autres, cela reste un mystère...

Exemples 6

E1 Sont convergentes : ....

E2 Sont divergentes : ....

IV Quelques résultats sur la convergence...

Propriétés 5 - combinaisons linéaires sur les séries

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, (u_n) et (v_n) deux suites.

P1# Si $\lambda \neq 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

P2# Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors $\sum (u_n+v_n)$ est convergente et : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

P3# Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum (u_n+v_n)$ est divergente.

✘ Attention ! On ne peut rien dire de la série $\sum (u_n+v_n)$ dans le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes : les deux cas peuvent se produire (sauf si (u_n) et (v_n) sont à termes positifs).

★ Démonstration : Ces propriétés découlent de la linéarité de la somme et des propriétés sur les limites de suites... ★

Pour finir, une dernière propriété dont la démonstration est immédiate :

Propriété 6 - série tronquée

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, on a : ....

En gros... La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Exemples 7

E1 **Justifions que la série $\sum \frac{5 \times 2^n + 1}{n!}$ est convergente et calculons sa somme.**

- On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{5 \times 2^n + 1}{n!} = 5 \times \frac{2^n}{n!} + \frac{1}{n!}$.
- Or $\sum \frac{2^n}{n!}$ et $\sum \frac{1}{n!}$ sont des séries exponentielles convergentes.

Par conséquent, la série $\sum \frac{5 \times 2^n + 1}{n!}$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5 \times 2^n + 1}{n!} &= 5 \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 5e^2 + e\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum \frac{5 \times 2^n + 1}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $5e^2 + e$.

✍ Rédaction Première rédaction : on travaille sur le terme général, on justifie la convergence puis on calcule la somme de la série.

E2 **Justifions que la série $\sum \frac{n+3}{2^n}$ est convergente et calculons sa somme.**

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{n+3}{2^n} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{2^n} + \frac{3}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n && \text{par linéarité de la somme} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\downarrow N\to+\infty} + 3\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\downarrow N\to+\infty} && \text{car } \frac{1}{2} \in]-1;1[\\ & \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \qquad\quad + 3\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + 3\frac{1}{1-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2^2}} + 3\frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2^2}{2} + 3 \times 2 \\ &= 8\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum \frac{n+3}{2^n}$ est convergente et sa somme vaut 8.

➠ Réflexe ! Du n et du q^n, on pense à

✍ Rédaction Deuxième rédaction : on travaille sur les sommes partielles, puis on passe à la limite (en justifiant). Cette rédaction est nécessaire si l'on doit effectuer un changement d'indice ou un télescopage.

E3 **Justifions que la série $\sum \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$ est convergente et calculons sa somme.**

Conclusion : la série $\sum \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$ est convergente et sa somme vaut ....

E4 **Justifions que la série $\sum_{n \geq 3} \frac{n+2}{3^n}$ est divergente.**

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^2}$ est divergente.

E5 **Justifions que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^2}$ est divergente.**

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^2}$ est divergente.

E6 **Justifions que la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$ est convergente et calculons sa somme.**

➠Réflexe!
Du n^2 et du q^n, on pense à

♡ Astuce du chef! ♡
$n^2 = n(n-1)+n$: utile pour les séries géométriques dérivées seconde

Conclusion : la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$ est convergente et sa somme vaut ....

E7 **Justifions que la série $\sum \frac{n(-1)^n}{n!}$ est convergente et calculons sa somme.**

➠Réflexe!
Du $n!$, on pense à

Conclusion : la série $\sum \frac{n(-1)^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut ....

Dans les autres cas, l'énoncé guidera et l'étude de la convergence d'une série pourra éventuellement nécessiter l'utilisation de différents théorèmes de convergence / divergence sur les suites (théorème d'encadrement, théorème de comparaison...).