Exercices du chapitre 14
Séries numériques

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Convergence & somme

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes :

Je ne rédige pas cet exercice... Je me contente de donner les valeurs des sommes des séries !

1. $\sum \frac{1}{3^n}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$

2. $\sum \frac{2^{n+1}}{5^n}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{10}{3}$

3. $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{-1}{4}$

4. $\sum \frac{1}{n!}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

5. $\sum \frac{-1}{n!}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n!} = -e$

6. $\sum \frac{(-2)^n}{n!}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = e^{-2}$

7. $\sum \frac{3^{n+1}}{n!}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{n!} = 3e^3$

8. $\sum \frac{(-3)^{n-1}}{n!}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{n!} = \frac{1}{-3}e^{-3}$

9. $\sum \frac{n}{3^{n-1}}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{9}{4}$

10. $\sum \frac{n}{(-2)^n}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(-2)^n} = \frac{1}{-2}\frac{4}{9} = \frac{-2}{9}$

11. $\sum \frac{n(n-1)2^{n-2}}{3^{n-2}}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)2^{n-2}}{3^{n-2}} = 54$

12. $\sum \frac{n(n-1)2^n}{5^{n-1}}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)2^n}{5^{n-1}} = \frac{4}{5}\frac{2\times 5^3}{3^3} = \frac{200}{27}$

13. $\sum \frac{n+3}{4^n}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{4^n} = \frac{1}{4}\frac{16}{9} + 3\frac{4}{3} = \frac{40}{9}$

14. $\sum \frac{(-1)^{n+2}n}{3^n}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}n}{3^n} = \frac{-3}{16}$

15. $\sum \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}\frac{9}{4} + \frac{1}{3}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

●●○○ Exercice 2 - Convergence & somme

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes :

1. $\sum q^{2n},\ q \in]-1;1[$

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q^{2n} = (q^2)^n$$

- Or $q \in]-1;1[$, d'où $q^2 \in [0;1[\subset]-1;1[$. Donc la série $\sum (q^2)^n$ est une série géométrique convergente. Ainsi, la série $\sum q^{2n}$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (q^2)^n = \frac{1}{1-q^2}$$

> **Conclusion** : la série $\sum q^{2n}$ est convergente et sa somme vaut $\frac{1}{1-q^2}$.

2. $\sum_{n\geq m} q^n,\ q \in]-1;1[,\ m \in \mathbb{N}$

La série $\sum_{n\geq m} q^n$ est une troncature d'une série géométrique convergente (car $q \in]-1;1[$), elle est donc également convergente et :

$$\sum_{n=m}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n - \sum_{n=0}^{m-1} q^n = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{q^m}{1-q}$$

> **Conclusion** : la série $\sum_{n\geq m} q^n$ est convergente et sa somme vaut $\frac{q^m}{1-q}$.

Petite remarque

On pourrait aussi travailler sur la somme partielle et utiliser la formule de la somme des termes d'une suite géométrique pour écrire : $\sum_{n=m}^{N} q^n = q^m \frac{1-q^{N-m+1}}{1-q}$, puis faire tendre N vers $+\infty$...

Petite remarque

On peut aussi écrire "Soit $N \in \mathbb{N}^*$" (en vue de la relation de Chasles) ou "Soit N suffisamment proche de $+\infty$"... Peu importe.
Ici, si $N = 0$, l'indice de la somme $\sum_{n=1}^{N} \frac{n2^n}{n!}$ porte sur un ensemble vide : elle est donc nulle.

✓ Rigueur !

On travaille sur la somme débutant à $n = 1$ pour effectuer la simplification. En effet, cette simplification est une division par n (qui n'a de sens que si $n \neq 0$) et fait apparaître $(n-1)!$ (qui n'a de sens que si $n \in \mathbb{N}^*$).

3. $\sum \frac{n2^n}{n!}$

- Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{n2^n}{n!} &= 0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{n2^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{n2^n}{n(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{2^n}{(n-1)!} && \text{changement d'indice } k = n-1 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2^{k+1}}{k!} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= 2\sum_{k=0}^{N-1} \frac{2^k}{k!}
\end{aligned}$$

- Or $\sum_{k \geq 0} \frac{2^k}{k!}$ est une série exponentielle convergente ; donc $\sum \frac{n2^n}{n!}$ est également convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n2^n}{n!} &= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} \\
&= 2e^2
\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum \frac{n2^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $2e^2$.

4. $\sum \frac{n^2}{3^n}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{3^n} &= \frac{n(n-1)+n}{3^n} \\
&= \frac{1}{3^2} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

- Or les séries $\sum n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ et $\sum n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ sont des séries géométriques convergentes (car $\frac{1}{3} \in]-1;1[$).

Par conséquent, la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$ est convergente (combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} &= \frac{1}{3^2}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3^2} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{2 \times 3^3}{3^2 \times 2^3} + \frac{3^2}{3 \times 2^2} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$ est convergente et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

5. $\sum \frac{2n^2+1}{5^n}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{2n^2+1}{5^n} &= \frac{2n(n-1)+2n+1}{5^n} \\
&= \frac{2}{5^2} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} + \frac{2}{5} n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

- Or les séries $\sum n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$, $\sum n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ et $\sum \left(\frac{1}{5}\right)^n$ sont des séries géométriques convergentes (car $\frac{1}{5} \in]-1;1[$).

Par conséquent, la série $\sum \frac{2n^2+1}{5^n}$ est convergente (combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2+1}{5^n} &= \frac{2}{5^2}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
&= \frac{2}{5^2} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} + \frac{2}{5} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \\
&= \frac{2 \times 2 \times 5^3}{5^2 \times 4^3} + \frac{2 \times 5^2}{5 \times 4^2} + \frac{5}{4} \\
&= \frac{5}{16} + \frac{5}{8} + \frac{5}{4} \\
&= \frac{35}{16}
\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum \frac{2n^2+1}{5^n}$ est convergente et sa somme vaut $\frac{35}{16}$.

6. $\sum \frac{n+1}{n!}$

- Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{n!} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} && \text{changement d'indice } k = n-1 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

- Or $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ est une série exponentielle convergente ; donc $\sum \frac{n+1}{n!}$ est également convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= 2e
\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum \frac{n+1}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $2e$.

7. $\sum \frac{2^n}{(n+1)!}$

- Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{(n+1)!} &= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2^{k-1}}{k!} && \text{par changement d'indice } k = n+1 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2^k}{k!} && \text{par linéarité de la somme}
\end{aligned}$$

✘ **Attention !** Je vois souvent des erreurs de calculs ici... on utilise le fait que $2^{k-1} = \frac{2^k}{2}$...

- Or $\sum_{k\geq 1} \frac{2^k}{k!}$ est une troncature d'une série exponentielle convergente ; donc $\sum \frac{2^n}{(n+1)!}$ est également convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} - 1 \right) \\
&= \frac{e^2-1}{2}
\end{aligned}$$

✘ **Attention !** Ne pas oublier les parenthèses...

Conclusion : la série $\sum \frac{2^n}{(n+1)!}$ est convergente et sa somme vaut $\frac{e^2-1}{2}$.

8. $\sum \frac{n}{(n+1)!}$

- Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1-1}{(n+1)!} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)!} && \text{changement d'indice } k = n+1 \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

♡ **Astuce du chef !** ♡ On utilise le fait que $n = n+1-1$ pour ensuite simplifier avec le $(n+1)!$...

- Or $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est une série exponentielle convergente et $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}$ est une troncature d'une série exponentielle convergente ; donc $\sum \frac{n}{(n+1)!}$ est également convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 1 \right) \\
&= e - (e-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

✘ **Attention !** Ne pas oublier les parenthèses...

Conclusion : la série $\sum \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et sa somme vaut 1.

9. $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$

- Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2 2^n}{n!} &= 0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2 2^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{n 2^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(n-1+1) 2^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(n-1) 2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2^n}{(n-1)!} \\
&= 0 + \sum_{n=2}^{N} \frac{(n-1) 2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=2}^{N} \frac{2^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2^n}{(n-1)!} && k = n-2 \text{ dans la première, } k = n-1 \text{ dans la seconde} \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \frac{2^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2^{k+1}}{k!} && \text{linéarité de la somme} \\
&= 4 \sum_{k=0}^{N-2} \frac{2^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2^k}{k!}
\end{aligned}$$

- Or $\sum_{k \geq 0} \frac{2^k}{k!}$ est une série exponentielle convergente ; donc $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$ est également convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n}{n} &= 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} \\
&= 6e^2
\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $6e^2$.

10. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

- Soit $N \in [\![2;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \Big(\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)\Big) && \text{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) + \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n) && \text{télescopages} \\
&= \ln(1) - \ln(N) - \ln(2) + \ln(N+1) \\
&= -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \\
&= -\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

- Or $\lim_{N \to +\infty} 1 + \frac{1}{N} = 1$, donc, par composition : $\lim_{N \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = 0$.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente et sa somme vaut $-\ln(2)$.

●●●○ Exercice 3 - Convergence & somme

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n^2}{(n+1)!}$

- Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n^2}{(n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n(n+1)-n}{(n+1)!} && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n}{(n+1)!}\\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n+1-1}{(n+1)!} && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n+1}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n+1)!} && k=n-1 \text{ dans la première somme, } k=n+1 \text{ dans la dernière}\\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n!} + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

- Or $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est une série exponentielle convergente et $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}$ est une troncature d'une série exponentielle convergente ; donc $\sum \frac{n^2}{(n+1)!}$ est également convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 1\\
&= e-1
\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum \frac{n^2}{(n+1)!}$ est convergente et sa somme vaut $e-1$.

2. $\sum \frac{n^3}{n!}$

...

Conclusion : la série $\sum \frac{n^3}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $5e$.

●○○○ Exercice 4 - Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On note $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité R_n est bien définie et donner une relation entre S_n, S et R_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ est une troncature d'une série convergente, elle est donc également convergente.

  Par conséquent, la quantité $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est bien définie.
- On sait également, par relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité R_n est bien définie et $\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n$.

2. Que dire du comportement de R_n quand n tend vers $+\infty$?

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n$$

Or, (S_n) converge vers S...

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = 0$.

●○○○ Exercice 5

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

C'est d'une trivialité...

2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

- Soit $N \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) && \text{par linéarité de la somme}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+2} && \text{télescopage}\\ &= 1-\frac{1}{N+2}\end{aligned}$$

- Or :

$$\lim_{N\to+\infty} 1-\frac{1}{N+2}=1$$

Conclusion : la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ est convergente et sa somme vaut 1.

●○○○ Exercice 6

1. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. On a, puisque $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}\\ &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k}\\ &= \sqrt{k+1}-\sqrt{k}\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ est divergente.

- Soit $N\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \sum_{k=0}^{N}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) && \text{par linéarité de la somme}\\ &= \sum_{k=0}^{N}\sqrt{k+1}-\sum_{k=0}^{N}\sqrt{k} && \text{télescopage}\\ &= \sqrt{N+1}\end{aligned}$$

- Or :

$$\lim_{N\to+\infty}\sqrt{N+1}=+\infty$$

Conclusion : la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ est divergente.

●○○○ Exercice 7

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $n\in[\![2;+\infty[\![$, $\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{a}{n-1}+\dfrac{b}{n+1}$.

Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\left(\forall n\in[\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{n^2-1}=\frac{a}{n-1}+\frac{b}{n+1}\right) &\iff \left(\forall n\in[\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{n^2-1}=\frac{a(n+1)+b(n-1)}{(n-1)(n+1)}\right)\\ &\iff \left(\forall n\in[\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{n^2-1}=\frac{(a+b)n+a-b}{n^2-1}\right)\\ &\iff (\forall n\in[\![2;+\infty[\![,\ 1=(a+b)+a-b) && \text{"par identification"}\\ &\iff \begin{cases}a+b=0\\ a-b=1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{-1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

> **Important !** Si on rédige, on le fait parfaitement ! En particulier, il ne faut pas oublier la quantification en n à chaque étape... Sinon, on peut traiter la partie calculatoire au brouillon et se contenter d'un "on remarque que...".

2. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}$.

- Soit $N\in[\![2;+\infty[\![$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{\frac{1}{2}}{n-1}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right) && \text{par linéarité de la somme}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}\right) && \text{télescopage}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\end{aligned}$$

> **Conseil...** On factorise le tout par $\dfrac{1}{2}$, c'est plus lisible...

> **✘ Attention !** Il y a un décalage de 2 dans les termes généraux des sommes..

- Or :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)=\frac{3}{4}$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ est convergente et sa somme vaut $\frac{3}{4}$.

●●○○ Exercice 8

Déterminer la nature des séries suivantes :

> **Important !**
> • On ne demande que la nature des séries. Nous ne pourrons donc pas toujours calculer les sommes partielles ; et il nous faudra alors utiliser un critère de comparaison.
> • Face à un tel exercice, il est toujours bon d'avoir une idée du résultat pour savoir lequel des deux critères utiliser (majoration par TG d'une série CV ou minoration par TG d'une série DV). Pour cela, on se souviendra qu'une série est CV ssi son ***TG tend vers 0 suffisamment vite***. La question à se poser : le TG tend-il plus vite vers 0 qu'une série de Riemann CV ou une série géométrique CV ; ou moins vite qu'une série de Riemann DV ?

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$

   - Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On a :
   $$\ln(n)\geq 1$$
   D'où, puisque $n>0$:
   $$\frac{\ln(n)}{n}\geq \frac{1}{n}$$
   Ainsi :
   $$\forall n\in [\![3;+\infty[\![,\ \frac{\ln(n)}{n}\geq \frac{1}{n}\geq 0$$
   - Or la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente (exposant $\alpha = 1$).

   Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

   Conclusion : la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1}$

   - Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
   $$n^2+1\geq n^2$$
   D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ ($n^2>0$ car $n\in\mathbb{N}^*$) :
   $$\frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2}$$
   Ainsi :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq \frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2}$$
   - Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = 2 > 1$).

   Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}$ est convergente.

   Conclusion : la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+1}$ est convergente.

3. $\sum_{n\geq 0} \frac{-1}{n^4+n^3+3n+1}$

   - Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   Puisque $n\in\mathbb{N}^*$, on a $n^3\geq 0$ et $n\geq 0$, d'où :
   $$n^4+n^3+3n+1\geq n^4$$
   D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ ($n^4>0$ car $n\in\mathbb{N}^*$) :
   $$\frac{1}{n^4+n^3+3n+1}\leq\frac{1}{n^4}$$
   Ainsi :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq\frac{1}{n^4+n^3+3n+1}\leq\frac{1}{n^4}$$
   - Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = 4 > 1$).

   Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4+3n+1}$ est convergente.

   Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^4+n^3+3n+1}$ est convergente.

   > **Pourquoi ?**
   > On ne change pas la nature d'une série en multipliant par une constante non nulle.

   Conclusion : la série $\sum_{n\geq 0}\frac{-1}{n^4+n^3+3n+1}$ est convergente.

4. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n2^n}$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$n \geq 1$$
D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:
$$\frac{1}{n} \leq 1$$
Puis, comme $\frac{1}{2^n} > 0$:
$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$
Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
- Or la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une troncature d'une série géométrique convergente ($\frac{1}{2} \in]-1;1[$).

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$ est convergente.

5. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
   - Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) && \text{linéarité de la somme} \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln(n+1) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln(n) && \text{télescopage} \\ &= \ln(\mathrm{N}+1) - \ln(1) \\ &= \ln(\mathrm{N}+1) \end{aligned}$$
   - Or :
$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \ln(\mathrm{N}+1) = +\infty$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

6. $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{2^n}$

Puisque la série $\sum \frac{2^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$
D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$$
En particulier :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} \neq 0$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{2^n}$ est grossièrement divergente.

7. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On sait que :
$$\forall x \in]-1;+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$$
   Or $\frac{1}{n^2} \in]-1;+\infty[$, d'où :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$$
   Et comme $\frac{1}{n^2} > 0$, on a également :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$$
   Par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$$
   - Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = 2 > 1$).

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

8. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$

- Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$.
On a :
$$n \geq 2$$
D'où, par croissance de la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$ (car $n \geq 0$) :
$$n^n \geq 2^n$$
Et, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ ($2^n > 0$) :
$$\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$$
Par conséquent :
$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 0 \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$$
- Or la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ est une troncature d'une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = 2 > 1$).

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^n}$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$ est convergente.

PETITE REMARQUE
On pourrait établir et utiliser une autre majoration :
$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$$
On rappelle au passage que :
• Pour $x \geq 1$:
si $m \geq n$, alors $x^m \geq x^n$.
• Pour $x \in [0;1]$:
si $m \geq n$, alors $x^m \leq x^n$.

9. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $e^{-n} > 0$, d'où :
$$e^n + e^{-n} \geq e^n$$
D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ ($e^n > 0$) :
$$\frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{1}{e^n}$$
Par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{1}{e^n}$$
- Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{e^n}$ est une série géométrique convergente ($\frac{1}{e} \in]-1;1[$ car $e > 1$).

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ est convergente.

●●●○ EXERCICE 9

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$

- On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
Or, par croissance comparée :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$$
Ainsi, il existe un entier naturel n_0 tel que :
$$\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \leq 1$$
On a ainsi (puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \geq 0$) :
$$\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
Autrement dit :
$$\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
- Or la série $\sum_{n\geq n_0} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une troncature d'une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = \frac{3}{2} > 1$).

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq n_0} \frac{\ln(n)}{n^2}$ est convergente.

Conclusion : a série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ est convergente.

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Les idées...

- On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$.
- On montre ensuite que les suites $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes...
- On conclut !

Pour traiter un cas plus général, voir l'exercice 19 sur le TSSA.

●●○○ Exercice 10

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ et calculer sa somme.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{4}\frac{1}{n^2}$$

  Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = 2 > 1$).

  Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est convergente.

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}
\end{aligned}$$

  D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ est convergente et sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{8}$.

●●○○ Exercice 11 - Riemann avec $\alpha \geq 2$

L'objectif de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \geq 2$.

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.

1. Écrire une fonction Python qui renvoie S_N en fonction de N.

```python
def suite_S(N):
    L=[1/n**2 for n in range(1,N+1)]
    return sum(L)
```

2. 2.a. Démontrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

   Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} &\iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} \\
&\iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad n^2 > 0,\ n-1 > 0 \\
&\iff n-1 \leq n
\end{aligned}$$

   Or, on sait que $n-1 \leq n$. Donc par équivalences, on a également :

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

   Conclusion : pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

2.b. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$.

Soit $N\in [\![2;+\infty[\![$. On a, par télescopage :

$$\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{N}$$

Or :

$$\lim_{N\to+\infty} 1-\frac{1}{N}=1$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ est convergente (et sa somme vaut 1).

☞ Pour info...
De façon générale, la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ a même nature que la suite (u_n)...

2.c. Établir alors la convergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

D'après les deux questions précédentes, on sait que :

- $\forall n\in [\![2;+\infty[\![,\ 0\leq \frac{1}{n^2}\leq \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$,
- la série $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente.

3. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que si $\alpha>2$, alors la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

Supposons $\alpha\in]2;+\infty[$.

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque $n\geq 1$ et que $\alpha>2$, on a :

$$n^\alpha\geq n^2$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ ($n^2>0$ car $n\in\mathbb{N}^*$) :

$$\frac{1}{n^\alpha}\leq\frac{1}{n^2}$$

Par conséquent :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq\frac{1}{n^\alpha}\leq\frac{1}{n^2}$$

- Or, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

Conclusion : si $\alpha>2$, alors la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

Petite remarque
Si l'on veut du détail :
$n\geq 1$, donc $\ln(n)\geq 0$.
Ainsi : $\alpha\ln(n)\geq 2\ln(n)$. Puis, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$: $e^{\alpha\ln(n)}\geq e^{2\ln(n)}$, autrement dit :

$$n^\alpha\geq n^2$$

●●○○ Exercice 12 - Riemann avec $\alpha\leq 1$.

L'objectif de l'exercice est de prouver la divergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha\leq 1$.

On pose, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$.

1. Que dire de la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha\leq 0$?

- Supposons $\alpha<0$. Dans ce cas, $-\alpha>0$, et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha}=+\infty$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=+\infty$$

D'où la divergence grossière de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$.

- Supposons $\alpha=0$. Dans ce cas, pour tout $n\in N^*$, $\frac{1}{n^\alpha}=1$, d'où la divergence grossière de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$.

Conclusion : si $\alpha\leq 0$, alors la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est grossièrement divergente.

2. 2.a. Démontrer que pour tout $x\in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x)\leq x$.

...

2.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $\frac{1}{n} > -1$, on peut utiliser le résultat précédent avec $x = \frac{1}{n}$... La résultat en découle immédiatement.

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

2.c. Démontrer alors que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

D'où, en sommant de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{N} \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

D'où, par linéarité et télescopage sur le membre de gauche :

$$\ln(N+1) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

On a ainsi :

- $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \ln(N+1) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$
- $\lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) = +\infty$

Ainsi par théorème de comparaison :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$$

> **Conclusion :** la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

3. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que si $\alpha \in]0;1[$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

Supposons $\alpha \in]0;1[$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $n \geq 1$ et que $\alpha \in]0;1[$, on a :

$$n^\alpha \leq n$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ $(n > 0)$:

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > 0$$

- Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

> **Conclusion :** si $\alpha \in]0;1[$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

> **Petite remarque**
> Si l'on veut du détail :
> $n \geq 1$, donc $\ln(n) \geq 0$.
> Ainsi : $0 \leq \alpha \ln(n) \leq \ln(n)$. Puis, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$: $e^{\alpha \ln(n)} \leq e^{\ln(n)}$, autrement dit :
> $$n^\alpha \leq n$$

●●○○ Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{-u_n} u_n \end{cases}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
$u_0 > 0$ d'après l'énoncé. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.
Par hypothèse de récurrence :

$$u_n > 0$$

D'où, puisque $e^{-u_n} > 0$:

$$e^{-u_n} > 0$$

Autrement dit :

$$u_{n+1} > 0$$

L'hérédité est ainsi établie.

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} un+1-u_n &= e^{-u_n}u_n - u_n \\ &= u_n(e^{-u_n}-1) \end{aligned}$$

Or $u_n > 0$, donc par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{-u_n} < 1$, et ainsi, $e^{-u_n} - 1 < 0$.
Par conséquent :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante.

3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer la valeur de sa limite.

- La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0 d'après la question 1), ainsi, par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
  - par composition et opérations, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-u_n}u_n = e^{-\ell}\ell$$

Mais :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{-u_n}u_n$$

D'où, par unicité de la limite :

$$\ell = e^{-\ell}\ell$$

Or :

$$\begin{aligned} \ell = e^{-\ell}\ell &\iff \ell - e^{-\ell}\ell = 0 \\ &\iff \ell(1-e^{-\ell}) = 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - e^{-\ell} = 0 \end{array}\right. \\ &\iff \ell = 0 \end{aligned}$$

Donc $\ell = 0$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0.

☞ Rappel...
Ce qui suit peut être rédigé plus rapidement... l'essentiel est de dire que : $\ell = e^{-\ell}\ell$.

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln(u_{n+1} - \ln(u_n) \\ &= \ln\left(e^{-u_n}u_n\right) - \ln(u_n) \quad u_n > 0 \text{ et } e^{-u_n} > 0 \\ &= \ln(e^{-u_n}) + \ln(u_n) - \ln(u_n) \\ &= -u_n \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = -u_n$.

✓ Rigueur !
L'égalité $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ n'est valable que si a et b sont tous les deux strictement positifs !!

5. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n} u_n &= \sum_{n=1}^{N}(v_n - v_{n+1}) \quad \text{par linéarité de la somme puis télescopage} \\ &= v_0 - v_{N+1} \\ &= \ln(u_0) - \ln(u_{N+1}) \end{aligned}$$

- Or (u_n) converge vers 0, donc par composition de limites :

$$\lim_{N\to+\infty} \ln(u_{N+1}) = -\infty$$

Par opérations :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = +\infty$$

Conclusion : la série $\sum u_n$ est divergente.

●●○○ Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in]0;1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{array}\right.$.

1. Soit $f : x \longmapsto x - x^2$. Démontrer que l'intervalle $]0;1[$ est stable par f.

Deux méthodes :

1.a. Avec l'étude des variations.

- f est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2x$.
- D'où le tableau de variations sur $[0;1]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

- Le maximum de f sur $[0;1]$ est égal à $\frac{1}{4}$, atteint en $\frac{1}{2}$, donc :

$$\forall x \in]0;1[,\ f(x) < 1$$

Le minimum de f sur $[0;1]$ est égal à 0, atteint en 0 et en 1, donc :

$$\forall x \in]0;1[,\ f(x) > 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0;1[,\ f(x) \in]0;1[$$

Conclusion : l'intervalle $]0;1[$ est stable par f.

1.b. De façon directe.
Soit $x \in]0;1[$. On a :

$$0 < x < 1$$

D'où :

$$0 > -x > -1$$

Puis :

$$1 > 1 - x > 0$$

Et, en multipliant par $x > 0$:

$$x > x(1-x) > 0$$

Or, $x < 1$, d'où, par transitivité :

$$1 > x(1-x) > 0$$

Conclusion : Par conséquent : $\forall x \in]0;1[,\ f(x) \in]0;1[$.
Autrement dit : l'intervalle $]0;1[$ est stable par f.

> **Petite remarque**
> Il n'est pas toujours possible de procéder ainsi ; alors que la première méthode conviendra systématiquement.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1[$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 \in]0;1[$ d'après l'énoncé : initialisation vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in]0;1[$ et montrons que $u_{n+1} \in]0;1[$.
  Par hypothèse de récurrence, $u_n \in]0;1[$.
  Mais, d'après la question précédente, $]0;1[$ est stable par f, d'où :

$$f(u_n) \in]0;1[$$

  Autrement dit :

$$u_{n+1} \in]0;1[$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1[$.

> **Petite remarque**
> La question précédente trivialise complètement l'hérédité de cette récurrence...

> **Petite remarque**
> Ici, la fonction f n'est pas monotone sur $]0;1[$: on traite donc l'hérédité autrement ; et l'énoncé nous aide...

3. Étudier les variations de (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - u_n^2 - u_n \\ &= -u_n^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer la valeur de sa limite.

- La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a :
  - ◇ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
  - ◇ par opérations, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - u_n^2 = \ell - \ell^2$$

  Mais :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

  D'où, par unicité de la limite :

$$\ell = \ell - \ell^2$$

  Or :

$$\ell = \ell - \ell^2 \iff \ell = 0$$

  Donc $\ell = 0$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0.

> ☞ **Rappel...**
> Ce qui suit peut être rédigé plus rapidement... l'essentiel est de dire que : $\ell = \ell - \ell^2$.

5. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et préciser, le cas échéant, sa somme.

- Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n^2 &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (u_n - u_{n+1}) \quad \text{linéarité de la somme puis télescopage} \\ &= u_0 - u_{\mathrm{N}+1} \end{aligned}$$

- Or (u_n) converge vers 0, donc :

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} u_0 - u_{\mathrm{N}+1} = u_0$$

Conclusion : la série $\sum u_n^2$ est convergente et sa somme vaut u_0.

6. Justifier que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
   - Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :
   $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \sum_{n=0}^{N}\Big(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)\Big) \quad \text{linéarité de la somme puis télescopage}\\ &= \ln(u_{N+1})-\ln(u_0)\end{aligned}$$
   - Or (u_n) converge vers 0, donc :
   $$\lim_{N\to+\infty} \ln(u_{N+1}) = -\infty$$

Conclusion : la série $\sum\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente et sa somme vaut u_0.

☞ **Pour info...**
On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1-u_n)$.
On, on sait que (u_n) converge vers 0 et que "pour x proche de 0" : $\frac{\ln(1+x)}{x} \simeq 1$.
D'où, "pour n suffisamment proche de $+\infty$" : $\ln(1-u_n) \simeq -u_n$.
Et comme $\sum \ln(1-u_n)$ est divergente, la série $\sum u_n$ le sera également.
Tout ceci sera justifié proprement l'an prochain, mais l'idée demeurera identique !

●●○○ Exercice 15

Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln\left(1+u_n^2\right) \end{cases}$.

1. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq 1$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     C'est immédiat, car $u_0 = 1$. L'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$0 \leq u_n \leq 1$" et montrons "$0 \leq u_{n+1} \leq 1$".
     Par hypothèse de récurrence, on a :
     $$0 \leq u_n \leq 1$$
     D'où, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:
     $$0 \leq u_n^2 \leq 1$$
     Puis, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$:
     $$\ln(1) \leq (1+u_n^2) \leq \ln(2)$$
     Or $\ln(2) \leq 1$ (car $2 \leq e$), d'où, par transitivité :
     $$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$
     L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$.

2. **2.a.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - On sait que :
   $$\forall x \in]-1;+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$$
   - D'où, puisque $u_n^2 \geq 0$:
   $$\ln(1+u_n^2) \leq u_n^2$$
   Autrement dit :
   $$u_{n+1} \leq u_n^2$$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n^2$.

Petite remarque
On sait tous comment démontrer ce résultat...

   2.b. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 1$:
     $u_1 = \ln(2) = \ln(2)^1$: l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons "$u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$" et montrons "$u_{n+1} \leq \left(\ln(2)\right)^{n+1}$".
     Par hypothèse de récurrence, on a :
     $$u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$$
     Or, $u_n \geq 0$, donc ; par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:
     $$u_n^2 \leq \left(\ln(2)\right)^{2n}$$
     Et, d'après la question précédente, $u_{n+1} \leq u_n^2$. D'où, par transitivité :
     $$u_{n+1} \leq \left(\ln(2)\right)^{2n}$$
     Pour terminer, il suffit d'établir : $\left(\ln(2)\right)^{2n} \leq \left(\ln(2)\right)^{n+1}$. Le résultat découlera par transitivité.
     Mais, pour cela, puisque $\ln(2) \in [0;1]$, il suffit de montrer que $2n \geq n+1$; ce qui est le cas, car $n \in \mathbb{N}^*$. L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$.

Petite remarque
En fait, on peut même démontrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\ln(2)\right)^{2^n}$$

Petite remarque
On rappelle au passage que :
• Pour $x \geq 1$:
si $m \geq n$, alors $x^m \geq x^n$.
• Pour $x \in [0;1]$:
si $m \geq n$, alors $x^m \leq x^n$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
D'après ce qui précède et la question **1.**, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$$
or, $\ln(2) \in]-1;1[$, donc
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\ln(2)\right)^n = 0$$

> **Conclusion :** par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. Quelle est la nature de $\sum u_n$?
   - D'après les questions précédentes :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$$
   - Or, la série $\sum\limits_{n \geq 1} \left(\ln(2)\right)^n$ est une troncature d'une série géométrique convergente (car $\ln(2) \in]-1;1[$).

   Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

> **Conclusion :** la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ est également convergente.

●●○○ Exercice 16 - Type concours

Considérons $f : x \longmapsto x - \ln(1+x^2)$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
   - **Limite en $-\infty$:**
   Par composition et opérations :
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
   - **Limite en $+\infty$:**
   Soit x suffisamment proche de $+\infty$. On a :
   $$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln(1+x^2) \\ &= x - \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) && \text{\small $x^2>0$ et $\frac{1}{x^2}+1>0$} \\ &= x - \ln(x^2) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) && \text{\small $x>0$} \\ &= x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x\left(1 - \frac{2\ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$
   Or, par composition :
   $$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$$
   Et, par croissance comparée :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$
   D'où, par opérations :
   $$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{2\ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$
   Par conséquent :
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
   - Ensuite, posons $u : x \longmapsto 1+x^2$ de sorte que $f = \mathrm{id} - \ln \circ u$.
   Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ et que $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2x}{1+x^2} \\ &\underset{\text{Réflexe!}}{=} \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} \\ &\underset{\text{Réflexe!}}{=} \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \end{aligned}$$
   D'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

> ☞ **Rappel...**
> Si f' est positive partout et ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs, alors f est **strictement** croissante.

2. **Étude de (u_n).**
   2.a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
   Par récurrence, démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 1$ et $u_1 = 1 - \ln(2)$.
  Puisque $\ln(2) \in]0;1[$ (car $2 \in]1;e[$), on a :
  $$0 \leq u_1 \leq u_0$$
  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$0 \leq u_{n+1} \leq u_n$" et montrons "$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$".
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$
  D'où, en appliquant f, croissante sur $\mathbb{R}$:
  $$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$
  Autrement dit :
  $$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

2.b. Établir que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

- La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
  - puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue en ℓ, on a :
  $$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

  Mais :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$
  D'où, par unicité de la limite :
  $$\ell = f(\ell)$$
  Or :
  $$\begin{aligned} \ell = f(\ell) &\iff \ell = \ell - \ln(1+\ell^2) \\ &\iff \ln(1+\ell^2) = 0 \\ &\iff 1+\ell^2 = 1 \\ &\iff \ell = 0 \end{aligned}$$
  Par conséquent : $\ell = 0$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0.

☞ **Rappel...**
Ce qui suit peut être rédigé plus rapidement... l'essentiel est de dire que : $\ell = \ell - \ln(1+\ell^2)$.

2.c. Écrire une fonction en Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.

```python
import numpy as np

def seuil():
    u=1
    n=0
    while u>10**(-3):
        u=u-np.log(1+u**2)
        n=n+1
    return n
```

Petite remarque
On peut remarquer que la convergence est très lente, car le programme renvoie la valeur 993.

3. Étude de $\sum u_n^2$.

3.a. Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \leq x - \dfrac{1}{2}x^2$.

Posons $g : x \longmapsto f(x) - x + \dfrac{1}{2}x^2$, définie sur $[0;1]$
On a :
$$\forall x \in [0;1],\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x^2)$$
La fonction g est dérivable sur $[0;1]$ (somme de f et d'une fonction polynomiale, toutres deux dérivables sur $[0;1]$) et, pour tout $x \in [0;1]$:
$$\begin{aligned} g'(x) &= x - \frac{2x}{1+x^2} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{x+x^3-2x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^3-x}{1+x^2} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{x(x-1)(x+1)}{1+x^2} \end{aligned}$$
D'où :

x	0		1
$g'(x)$	0	$-$	0
g	0	$\searrow$	$\frac{1}{2} - \ln(2)$

Par conséquent, g possède un maximum, égal à 0, atteint en 0.
D'où :

$$\forall x \in [0;1], \ g(x) \leq 0$$

Conclusion : pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.

3.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On sait, d'après la question 2.a que (u_n) est décroissante ; elle est donc majorée par son premier terme, égal à 1. Elle est également minorée par 0. Donc :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

On peut alors utiliser le résultat précédent avec (avec $x = u_n$) :

$$f(u_n) \leq u_n - \frac{1}{2}u_n^2$$

Autrement dit :

$$u_{n+1} - u_n \leq \frac{-1}{2}u_n^2$$

D'où :

$$-2(u_{n+1} - u_n) \geq u_n^2$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.

3.c. Démontrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et donner un encadrement de sa somme entre deux entiers consécutifs.

- D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$$

- Montrons que la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
  - ◇ Soit $N \in \mathbb{N}$. On a, par linéarité puis télescopage :

$$\sum_{n=0}^{N} (u_n - u_{n+1}) = 1 - u_{N+1}$$

  - ◇ Or, (u_n) converge vers 0, d'où :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (u_n - u_{n+1}) = 1$$

  Par conséquent, la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente ; et c'est également le cas de $\sum 2(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

Ainsi, par critère de majoration sur les séries à terme général positif, la série $\sum u_n^2$ est convergente.
Et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geq u_0^2 = 1$$

Ainsi que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2(u_n - u_{n+1}) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) = 2$$

Conclusion : la série $\sum u_n^2$ est convergente et sa somme est comprise entre 1 et 2.

●●○○ Exercice 17 - Type concours

Notons f l'application définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \ f(x) = e^x - e\ln(x)$.
On donne : $7,3 < e^2 < 7,4$.

1. Étude de la fonction f.

1.a. 1.a.i. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

La fonction f est une combinaison linéaire de fonctions usuelles deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, elle est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \quad ; \quad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$$

1.a.ii. Dresser le tableau de variations complet de f'.

- **Limites :**
  - ◇ En 0 :
    Par opérations, on a directement :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = +\infty}$$

  - ◇ En $+\infty$:
    Par opérations, on a directement :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty}$$

- D'après la question précédente, on a directement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f''(x) > 0$$

D'où :

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$+$	
f'	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1.b. Dresser le tableau de variations complet de f.

- **Limites :**
  - En 0 :
    Par opérations, on a directement :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty}$$

  - En $+\infty$:
    Pour x suffisamment proche de $+\infty$:

$$f(x) = e^x\left(1 - e\frac{\ln(x)}{e^x}\right)$$

    Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$$

    D'où, par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - e\frac{\ln(x)}{e^x}\right) = +\infty$$

    Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

- On remarque que $f'(1) = 0$... Et comme, d'après la question précédente, f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient :

Petite remarque
L'argument de *stricte* croissance permet de justifier que f' ne s'annule qu'une seule fois...

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

1.c. Étudier les variations puis le signe de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ sur $[2;+\infty[$.

- Les fonctions f et id sont deux fois dérivables sur $[2;+\infty[$, la fonction g l'est donc également et, pour tout $x \in [2;+\infty[$:

$$g'(x) = f'(x) - 1 \ ;\ g''(x) = f''(x)$$

- D'où :

x	2		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	
g'	$\frac{2e^2 - e - 2}{2}$	$\nearrow$	

Or, $e^2 > 7$, donc $2e^2 > 14$. Et $e < 3$, donc $-e > -3$. D'où :

$$2e^2 - e - 2 > 14 - 3 - 2 = 9$$

Ainsi :

$$g'(2) > 0$$

Et, comme g' est strictement croissante sur $[2;+\infty[$, on obtient alors :

x	2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$e^2 - e\ln(2) - 2$	$\nearrow$	

- Ensuite : $\ln(2) < 1$, donc :

$$e^l n(2) < e < 3$$

D'où :

$$-e\ln(2) > -3$$

Et ainsi, puisque $e^2 > 7$:

$$e^2 - e\ln(2) - 2 > 7 - 3 - 2 = 2$$

Par conséquent :

$$g(2) > 0$$

Et, comme g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$, on a :

$$\forall x \in [2;+\infty[,\ g(x) > 0$$

Conclusion : $\forall x \in [2;+\infty[,\ g(x) > 0$.

2. **Étude d'une suite et d'une série.** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.a. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  u_0 existe et $u_0 = 2$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n \geq 2$" et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geq 2$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq 2$. Ainsi, $u_n \in \mathbb{R}_*^+$, donc $f(u_n)$ existe. Autrement dit, u_{n+1} existe.
  - Par hypothèse de récurrence :
  $$u_n \geq 2$$
  Puis, par croissance de f sur $[2;+\infty[$, on a :
  $$f(u_n) \geq f(2)$$
  Or, d'après la question précédente : $g(2) > 0$. Donc $f(2) > 2$. Ainsi, par transitivité :
  $$u_{n+1} \geq 2$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

2.b. Établir que (u_n) est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & f(u_n) - u_n \\ & = & g(u_n) \\ & > & 0 \end{array} \qquad \forall x \in [2;+\infty[,\ g(x) > 0 \text{ et } u_n \geq 2$$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante.

2.c. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
La suite (u_n) est croissante ; ainsi, pour démontrer qu'elle diverge vers $+\infty$, montrons qu'elle n'est pas majorée...
Raisonnons par l'absurde et supposons que (u_n) est majorée.

- Dans ce cas, par théorème de convergence monotone, (u_n) étant croissante, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
  Puisque (u_n) est croissante, elle est minorée par son premier terme, d'où : $\ell \geq 2$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
  - puisque f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, donc continue en ℓ, on a :
  $$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

  Mais :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$
  D'où, par unicité de la limite :
  $$\ell = f(\ell)$$
  Or, d'après la question **1.c.**, et puisque $\ell \geq 2$:
  $$f(\ell) - \ell > 0$$
  D'où l'absurdité.

☞ Rappel... Ce qui suit peut être rédigé plus rapidement... l'essentiel est de dire que : $\ell = f(\ell)$.

Par conséquent : la suite (u_n) n'est pas majorée.
Et, la suite (u_n) étant croissante, par théorème de divergence monotone, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Conclusion : (u_n) diverge vers $+\infty$.

2.d. Écrire une fonction, en Python, qui prend un réel $A \geq 2$ en argument d'entrée et renvoie le plus petit entier n pour lequel $u_n \geq A$.

```python
import numpy as np

def seuil(A):
    n=0
    u=2
    while u<A:
        n=n+1
        u=np.exp(u)-np.exp(1)*np.log(u)
    return n
```

2.e. **2.e.i.** Démontrer que pour tout $x \in [2;+\infty[$, $2\ln(x) \leq x \leq \dfrac{e^x}{3}$.

- Posons $h : x \longmapsto 2\ln(x) - x$, définie sur $[2;+\infty[$.
  La fonction h est dérivable sur $[2;+\infty[$ et, pour tout $x \in [2;+\infty[$:
  $$h'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$$
  D'où :

x	2	$+\infty$
$h'(x)$	0	$-$
h	$-2+2\ln(2)$	$\searrow$

Or $\ln(2) < 1$, donc $-2 + 2\ln(2) < 0$.
Par conséquent :

$$\forall x \in [2;+\infty[,\ h(x) \leq 0$$

D'où :

$$\forall x \in [2;+\infty[,\ 2\ln(x) \leq x$$

- Posons $i : x \longmapsto \dfrac{e^x}{2} - x$, définie sur $[2;+\infty[$.
  La fonction i est dérivable sur $[2;+\infty[$ et, pour tout $x \in [2;+\infty[$:

$$i'(x) = \frac{e^x}{3} - 1 = \frac{e^x - 3}{3}$$

D'où (puisque $2 \geq \ln(3)$) :

x	2	$+\infty$
$i'(x)$	0 $+$	
i	$\dfrac{e^2-6}{3}$ $\nearrow$	

Or $e^2 > 7$.
Par conséquent :

$$\forall x \in [2;+\infty[,\ i(x) \geq 0$$

D'où :

$$\forall x \in [2;+\infty[,\ x \leq \frac{e^x}{3}$$

Conclusion : pour tout $x \in [2;+\infty[,\ 2\ln(x) \leq x \leq \dfrac{e^x}{3}$.

2.e.ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \dfrac{6-e}{2} u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e\ln(u_n)$$

Or $u_n \geq 2$, donc, d'après la question précédente :

- $e^{u_n} \geq 3u_n$
- $\ln(u_n) \leq \dfrac{1}{2}u_n$, et ainsi : $-e\ln(u_n) \geq \dfrac{-e}{2}u_n$

D'où, en sommant ces deux inégalités :

$$e^{u_n} - e\ln(u_n) \geq 3u_n - \frac{e}{2}u_n$$

Autrement dit :

$$u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2}u_n$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \dfrac{6-e}{2}u_n$.

À RETENIR...
Pour minorer A – B, on peut : minorer A et majorer B (pour minorer –B), puis sommer les deux inégalités.

2.e.iii. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-e}\right)^n$.

- On sait déjà que (u_n) est minorée par 2 (croissante et de premier terme égal à 2), donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$$

- Ensuite, par récurrence...
  - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
    $u_0 = 2$, d'où :

$$\frac{1}{u_0} \leq \frac{1}{2}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

  - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-e}\right)^n$ et montrons $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-e}\right)^{n+1}$.
    Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6-e}\right)^n$$

D'où, en multipliant par $\dfrac{2}{6-e} > 0$, on a :

$$\frac{2}{(6-e)u_n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6-e}\right)^{n+1}$$

Or, d'après la question précédente, et puisque (u_n) est à termes strictement positifs :

$$u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2}u_n > 0$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{2}{(6-e)u_n}$$

Ainsi, par transitivité :

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6-e}\right)^{n+1}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6-e}\right)^n$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $0 < \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-e}\right)^n$.

PETITE REMARQUE
Bien évidemment, on peut démontrer l'encadrement par récurrence ; mais j'ai préféré procéder ainsi pour mettre en avant la dépendance avec la question précédente.

2.e.iv. En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

- D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6-e}\right)^n$$

- Or, $6-e > 2$, donc $\dfrac{2}{6-e} \in]-1;1[$ et ainsi, la série $\sum \left(\dfrac{2}{6-e}\right)^n$ est une série géométrique convergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ est convergente.

●●○○ EXERCICE 18 - TYPE CONCOURS

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. 1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 0$, donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
  Par hypothèse de récurrence :
  $$0 \leq u_n \leq 1$$
  Ainsi, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ (nous sommes ici sur $[0;1]$) :
  $$0 \leq u_n^2 \leq 1$$
  D'où :
  $$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$
  Et par transitivité :
  $$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$
  L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

1.b. Démontrer que (u_n) converge vers une limite ℓ et préciser un encadrement de ℓ.

Étudions les variation de (u_n)..
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2+1}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n^2+1-2u_n}{2} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{(u_n-1)^2}{2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite (u_n) est croissante.
Or, d'après la question précédente, (u_n) est majorée (par 1).
Donc, par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
Et comme (u_n) est bornée par 0 et 1, on a $\ell \in [0;1]$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et $\ell \in [0;1]$.

1.c. Déterminer ensuite la valeur de ℓ.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a :

- $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
- par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2+1}{2} = \frac{\ell^2+1}{2}$$

Mais :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$$

D'où, par unicité de la limite :

$$\ell = \frac{\ell^2+1}{2}$$

☞ RAPPEL...
Ce qui suit peut être rédigé plus rapidement... l'essentiel est de dire que : $\ell = \dfrac{\ell^2+1}{2}$.

Or :

$$\ell = \frac{\ell^2+1}{2} \iff 2\ell = \ell^2+1 \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell-1)^2 = 0 \iff \ell = 1$$

Par conséquent : $\ell = 1$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 1.

2. **2.a.** Écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.

```python
def suite_u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=(u**2+1)/2
    return u
```

2.b. En déduire un programme, rédigé en Python, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

```python
n=0
while 1-suite_u(n)>10**(-3):
    n=n+1
print(n)
```

Petite remarque

L'exécution de ce programme affiche 1991 : la convergence est lente !

Remarque

L'énoncé a guidé ainsi, mais on pourrait également écrire un programme permettant de répondre à cette question sans utiliser la précédente :

```python
u=0
n=0
while 1-u>10**(-3):
    u=(u**2+1)/2
    n=n+1
print(n)
```

Cette solution a l'avantage d'être moins coûteuse en calculs ! En effet, avec les deux algorithmes précédents, pour tout $n \in [\![1;1991]\!]$, le calcul de u_n nécessite de recalculer tous les u_k, pour $k \in [\![1;n]\!]$... C'est un peu dommage !

3. On définit maintenant la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - u_n$.

3.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1})$.

Simple télescopage...

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) &= v_0 - v_{n+1}\\ &= 1 - u_0 - (1 - u_{n+1})\\ &= u_{n+1} - u_0\\ &= u_{n+1}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = u_{n+1}$.

3.b. Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}v_k - v_{k+1} &= 1 - u_k - (1 - u_{k+1})\\ &= u_{k+1} - u_k\\ &= \frac{(u_k-1)^2}{2}\\ &= \frac{v_k^2}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ v_k - v_{k+1} = \dfrac{v_k^2}{2}$.

3.c. Montrer alors que la série $\sum v_n^2$ est convergente et donner la valeur de sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} v_k^2 &= 2\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) && \text{d'après la question précédente}\\ &= 2u_{n+1} && \text{d'après la question 3.a.}\end{aligned}$$

Or, d'après la question **1.c.**, la suite (u_n) converge vers 1.
D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} v_k^2 = 2$$

Conclusion : la série $\sum v_n^2$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2$.

●●○○ EXERCICE 19 - TSSA (critère de Leibniz)

Soit (u_n) une suite telle que :

- (u_n) est décroissante
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Le but de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

   La suite (u_n) est décroissante et de limite 0, elle est donc minorée par 0.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

2. Démontrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.

   - Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

   $$\begin{aligned} S_{2N+2} - S_{2N} &= \sum_{n=0}^{2N+2} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2N+2} u_{2N+2} + (-1)^{2N+1} u_{2N+1} \\ &= u_{2N+2} - u_{2N+1} \\ &\leq 0 && \text{car } (u_n) \text{ décroissante} \end{aligned}$$

   Par conséquent : (S_{2N}) est décroissante.

   - Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

   $$\begin{aligned} S_{2N+3} - S_{2N+1} &= \sum_{n=0}^{2N+3} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2N+3} u_{2N+3} + (-1)^{2N+2} u_{2N+2} \\ &= -u_{2N+3} + u_{2N+2} \\ &\geq 0 && \text{car } (u_n) \text{ décroissante} \end{aligned}$$

   Par conséquent : (S_{2N+1}) est croissante.

   - Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

   $$\begin{aligned} S_{2N+1} - S_{2N} &= \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2N+1} u_{2N+1} \\ &= -u_{2N+1} \end{aligned}$$

   Or (u_n) converge vers 0, donc :

   $$\lim_{N\to+\infty} u_{2N+1} = 0$$

   Par conséquent :

   $$\lim_{N\to+\infty} \left(S_{2N+1} - S_{2N}\right) = 0$$

   Conclusion : les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.

3. En déduire que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente. *On note* S *sa somme.*

   Puisque les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes, elles convergent et ont même limite.
   Ainsi, par théorème de recouvrement, la suite (S_n) est également convergente.

   Conclusion : la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

4. Établir : $\forall N \in \mathbb{N},\ S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$. En déduire : $\forall N \in \mathbb{N},\ |S_N - S| \leq u_{N+1}$.

   - La suite (S_{2N}) est décroissante et converge vers S, elle est donc minorée par S. La suite (S_{2N+1}) est croissante et converge vers S, elle est donc majorée par S.

     Conclusion : $\forall N \in \mathbb{N},\ S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$.

   - Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

   $$|S_N - S| \leq u_{N+1} \underset{\text{Réflexe !}}{\iff} -u_{N+1} \leq S_N - S \leq u_{N+1}$$

     ◇ Si N est pair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $N = 2k$.

       ⇝ D'après ce qui précède :

       $$S_{2k} - S \geq 0$$

       Et comme $u_{2k+1} \geq 0$, on a, par transitivité :

       $$-u_{2k+1} \leq S_{2k} - S$$

       ⇝ Également, on sait que $S_{2k+1} \leq S$, donc $-S_{2k+1} \geq -S$, et ainsi :

       $$S_{2k} - S_{2k+1} \geq S_{2k} - S$$

       Autrement dit :

       $$-(-1)^{2k+1} u_{2k+1} \geq S_{2k} - S$$

       D'où :

       $$S_{2k} - S \leq u_{2k+1}$$

Par conséquent :

$$-u_{2k+1} \leq S_{2k} - S \leq u_{2k+1}$$

◇ Si N est pair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $N = 2k+1$.

⇝ D'après ce qui précède :

$$S_{2k+1} - S \leq 0$$

Et comme $u_{2k+2} \geq 0$, on a, par transitivité :

$$S_{2k+1} - S \leq u_{2k+2}$$

⇝ Également, on sait que $S_{2k+2} \geq S$, donc $-S_{2k+2} \leq -S$, et ainsi :

$$S_{2k+1} - S_{2k+2} \leq S_{2k+1} - S$$

Autrement dit :

$$-(-1)^{2k+2} u_{2k+2} \leq S_{2k+1} - S$$

D'où :

$$-u_{2k+2} \leq S_{2k+1} - S$$

Par conséquent :

$$-u_{2k+2} \leq S_{2k+1} - S \leq u_{2k+2}$$

Dans les deux cas, on a obtenu :

$$-u_{N+1} \leq S_N - S \leq u_{N+1}$$

Conclusion : $\forall N \in \mathbb{N},\ |S_N - S| \leq u_{N+1}$.

5. **Application.**
Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente puis écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoie un encadrement de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ d'amplitude inférieure ou égale à p.

- Posons (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$.
On sait que :
  ◇ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante,
  ◇ la suite (u_n) converge vers 0.

Ainsi, d'après le théorème spécial des séries alternées (c'est son petit surnom), la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n u_n$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

☞ Pour info...
Et sa somme vaut $-\ln(2)$. Pour une démonstration, voir le DS4. Sinon, nous le reverrons plus tard dans l'année.

- En utilisant l'encadrement fourni à la question 4. (et en remarquant que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'amplitude de l'intervalle $[S_{2N+1}; S_{2N}]$ est égale à $\frac{1}{2N+1}$), on peut écrire le programme suivant :

```
def encadrement_S(p):
    S=-1
    N=1
    while 1/(2*N+1)>p:
        N=N+1
        S=S+(-1)**N/N
    return S
```

●●●○ Exercice 20 - Règle de D'Alembert [1]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite, notée ℓ.

1. Supposons que $\ell < 1$.

1.a. Établir l'existence d'un réel $q \in]0;1[$ et d'un entier naturel n_0 tels que : $\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$.

Démontrons :

$$\exists q \in]0;1[,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ u_{n+1} \leq q u_n$$

Le résultat découlera alors immédiatement, par récurrence.

- On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. D'où, par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Autrement dit,la suite (u_n) étant à termes strictement positifs :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$$

Peut-on choisir ε de sorte que $\ell + \varepsilon < 1$? Et oui ! On sait que $\ell < 1$, il suffit donc de choisir ε de sorte que $\ell + \varepsilon$ soit le milieu de $[\ell;1]$ par exemple... L'amplitude de cet intervalle étant $1 - \ell$, prenons

Explication...
"$\ell + \varepsilon$" serait un bon candidat pour devenir q, à condition qu'il soit bien strictement inférieur à 1...

1. Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783, français), à qui l'on doit de nombreuses contributions sur les équations algébriques (théorème de D'Alembert-Gauss), les séries, les équations différentielles et équations aux dérivées partielles... ainsi qu'un travail sur l'Encyclopédie avec Diderot.

alors $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$.
Puisque $\ell < 1$, on a bien $\varepsilon > 0$.
D'où, pour ce ε maintenant choisi :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$$

Notons enfin $q = \ell + \varepsilon = \dfrac{\ell+1}{2}$. On a bien $q \in [0;1[$ et en particulier :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$$

D'où, la suite (u_n) étant à termes strictement positifs :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ u_{n+1} \leq q u_n$$

- Le réel q et l'entier n_0 étant choisis, démontrons finalement par récurrence : $\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$.
  - **Initialisation.** Pour $n = n_0$:
    $q^{n_0-n_0} = q^0 = 1$... l'initialisation est ainsi vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n \in [\![n_0;+\infty[\![$. Supposons "$u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$" et montrons "$u_{n+1} \leq q^{n+1-n_0} u_{n_0}$".
    Par hypothèse de récurrence :
    $$u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$$
    D'où, en multipliant par $q \geq 0$:
    $$q u_n \leq q^{n+1-n_0} u_{n_0}$$
    Mais, d'après ce qui précède, et puisque $n \geq n_0$:
    $$u_{n+1} \leq q u_n$$
    D'où, par transitivité :
    $$u_{n+1} \leq q^{n+1-n_0} u_{n_0}$$
    L'hérédité est ainsi établie.

  Conclusion : $\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$.

Petite remarque
Je la fais, simplement pour vous montrer qu'elle est triviale !

Conclusion : il existe un réel $q \in]0;1[$ et un entier naturel n_0 tels que : $\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$.

1.b. En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

On sait que :

- $\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ 0 \leq u_n \leq u_{n_0} q^{n-n_0}$,
- à changement d'indice près la série $\sum\limits_{n\geq n_0} q^{n-n_0}$ est une série géométrique convergente ; la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_{n_0} q^{n-n_0}$ est donc également convergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est également convergente.

2. Démontrer que si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Supposons que $\ell > 1$.
Dans ce cas :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

Mais, comme (u_n) est à termes positifs, on a alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ u_{n+1} > u_n$$

Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang. La série $\sum u_n$ est alors grossièrement divergente.
Étant à termes positifs, elle ne peut donc pas converger vers 0.

Conclusion : si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

3. Justifier que le cas $\ell = 1$ ne permet pas de conclure.

Pour cela, donnons l'exemple de deux suites (u_n) à termes strictement positifs, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et pourtant, la série $\sum u_n$ est de nature différente selon les cas.

- Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; et pourtant, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est une série de Riemann divergente.
- Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n^2}$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; et pourtant, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est une série de Riemann convergente.

Conclusion : le cas où $\ell = 1$ ne permet pas d'identifier la nature de la série.

☞ Pour info...
Il existe une version plus fine, la règle de Raabe-Duhamel, plus technique à démontrer, qui permet parfois de conclure dans le cas $\ell = 1$.
Voir ici pour la démonstration de Jean-Marie Duhamel.

4. **Application.** Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} \quad ; \quad \sum \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
  - $\dfrac{n!}{n^n} > 0$
  - et :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} &= \frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= (n+1)\frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

  Or, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.
  D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = e^{-1} < 1$$

  Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n!}{n^n}$ est convergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
  - $\binom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n > 0$
  - et :

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{2n+2}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n} &= \frac{1}{3}\,\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\,\frac{n!n!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{3}(2n+2)(2n+1)\frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{2}{3}\,\frac{2n+1}{n+1}
\end{aligned}$$

  Or, en levant très rapidement la forme indéterminée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n+1} = 2$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{2n+2}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{4}{3} > 1$$

  Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum \binom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est divergente.

Important !
Il serait bon de connaître ce résultat, mais également de savoir le démontrer !

Petite remarque
De façon analogue, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
• si $|x| < \dfrac{1}{4}$, alors la série $\sum \binom{2n}{n} x^n$...
• si $|x| > \dfrac{1}{4}$, alors la série $\sum \binom{2n}{n} x^n$ est divergente...
Ensuite :
• $\sum \binom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ est divergente... Justification hors programme : grâce à la formule de Stirling, son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, qui est (à constante multiplicative non nulle près) le terme général d'une série de Riemann divergente.
• $\sum \binom{2n}{n}\left(\dfrac{-1}{4}\right)^n$ est convergente, d'après le TSSA (exercice 19)...

●●●○ Exercice 21

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif. Montrer que si $\sum u_n$ est convergente, alors $\sum u_n^2$ l'est également. Réciproque ?

- Supposons que $\sum u_n$ est convergente.
  - Alors, nécessairement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

    Il existe donc un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq 1$$

    Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. D'où :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n^2 \leq u_n$$

  - Et la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est une troncature d'une série convergente...

  Ainsi, par critère de comparaison des séries à terme général positif, la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n^2$ est convergente.

  Conclusion : la série $\sum u_n^2$ est convergente.

- La réciproque est fausse... Il suffit de considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$...

Pourquoi ?
C'est une conséquence directe de la définition de limite égale à 0, avec $\varepsilon = 1$.