Exercices du chapitre 14
Séries numériques

●○○○ Exercice 1 - Convergence & somme

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes :

1. $\sum \frac{1}{3^n}$
2. $\sum \frac{2^{n+1}}{5^n}$
3. $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}$
4. $\sum \frac{1}{n!}$
5. $\sum \frac{-1}{n!}$
6. $\sum \frac{(-2)^n}{n!}$
7. $\sum \frac{3^{n+1}}{n!}$
8. $\sum \frac{(-3)^{n-1}}{n!}$
9. $\sum \frac{n}{3^{n-1}}$
10. $\sum \frac{n}{(-2)^n}$
11. $\sum \frac{n(n-1)2^{n-2}}{3^{n-2}}$
12. $\sum \frac{n(n-1)2^n}{5^{n-1}}$
13. $\sum \frac{n+3}{4^n}$
14. $\sum \frac{(-1)^{n+2}n}{3^n}$
15. $\sum \frac{n+1}{3^{n+1}}$

●●○○ Exercice 2 - Convergence & somme

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes :

1. $\sum q^{2n}$, $q \in]-1;1[$
2. $\sum\limits_{n\geq m} q^n$, $q \in]-1;1[$, $m \in \mathbb{N}$
3. $\sum \frac{n2^n}{n!}$
4. $\sum \frac{n^2}{3^n}$
5. $\sum \frac{2n^2+1}{5^n}$
6. $\sum \frac{n+1}{n!}$
7. $\sum \frac{2^n}{(n+1)!}$
8. $\sum \frac{n(n+1)}{(n+1)!}$
9. $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$
10. $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

●●●○ Exercice 3 - Convergence & somme

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n^2}{(n+1)!}$
2. $\sum \frac{n^3}{n!}$

●○○○ Exercice 4 - Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On note $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité R_n est bien définie, donner une relation entre S_n, S et R_n.
2. Que dire du comportement de R_n quand n tend vers $+\infty$?

●○○○ Exercice 5

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

●○○○ Exercice 6

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
2. En déduire que la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ est divergente.

●○○○ Exercice 7

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $\frac{1}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$.

●●○○ Exercice 8

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2+1}$
3. $\sum \frac{1}{n^4+n^3+3n+1}$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$
5. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
6. $\sum \frac{n!}{2^n}$
7. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
8. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$
9. $\sum \frac{1}{e^n+e^{-n}}$

●●●○ Exercice 9

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

●●○○ Exercice 10

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier la convergence de la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ et calculer sa somme.

●●○○ Exercice 11 - Riemann avec $\alpha \geq 2$

L'objectif de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \geq 2$.

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.

1. Écrire une fonction `Python` qui renvoie S_N en fonction de N.
2.
   - 2.a. Démontrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
   - 2.b. En déduire que pour tout $N \in [\![2;+\infty[\![$, $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{N}$.
   - 2.c. Établir alors la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.
3. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que si $\alpha > 2$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

●●○○ Exercice 12 - Riemann avec $\alpha \leq 1$.

L'objectif de l'exercice est de prouver la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \leq 1$.

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

1. Que dire de la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha \leq 0$?
2.
   - 2.a. Démontrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
   - 2.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
   - 2.c. Démontrer alors que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
3. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que si $\alpha \in [0;1[$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

●●○○ Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{-u_n} u_n \end{cases}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer la valeur de sa limite.
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n.
5. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

●●○○ Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$.

1. Soit $f : x \longmapsto x - x^2$. Démontrer que l'intervalle $]0;1[$ est stable par f.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1[$.
3. Étudier les variations de (u_n).
4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer la valeur de sa limite.
5. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et préciser, le cas échéant, sa somme.
6. Justifier que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

●●○○ Exercice 15

Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln\left(1 + u_n^2\right) \end{cases}$.

1. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq 1$.
2. 2.a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.
   2.b. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $u_n \leq (\ln 2)^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

●●●○ Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$.

1. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Démontrer que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0 - 1}$.

●●○○ Exercice 17 - Type concours

Considérons $f : x \longmapsto x - \ln(1 + x^2)$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
2. **Étude de (u_n).**
   2.a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
   2.b. Établir que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
   2.c. Écrire une fonction en `Python` qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
3. **Étude de $\sum u_n^2$.**
   3.a. Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.
   3.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.
   3.c. Démontrer que la série $\sum u_n^2$ converge et donner un encadrement de sa somme.

●●○○ Exercice 18 - Type concours

Notons f l'application définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x - e\ln(x)$.
On donne : $7,3 < e^2 < 7,4$.

1. **Étude de la fonction f.**
   1.a. 1.a.i. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   1.a.ii. Dresser le tableau de variations complet de f'.
   1.b. Dresser le tableau de variations complet de f.
   1.c. Étudier les variations puis le signe de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ sur $[2;+\infty[$.
2. **Étude d'une suite et d'une série.** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   2.a. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
   2.b. Établir que (u_n) est croissante.
   2.c. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
   2.d. Écrire une fonction, en `Python`, qui prend un réel $A \geq 2$ en argument d'entrée et renvoie le plus petit entier n pour lequel $u_n \geq A$.
   2.e. 2.e.i. Démontrer que pour tout $x \geq 2$, $2\ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$.

2.e.ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \dfrac{6-e}{2} u_n$.

2.e.iii. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{1}{u_0}\left(\dfrac{2}{6-e}\right)^n$.

2.e.iv. En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

●●○○ Exercice 19 -Type concours

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. 1.a. Démontrer que (u_n) converge vers une limite ℓ et préciser un encadrement de ℓ.
   1.b. Déterminer ensuite la valeur de ℓ.
2. 2.a. Écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.
   2.b. En déduire un programme, rédigé en Python, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.
3. On définit maintenant la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - u_n$.
   3.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1})$.
   3.b. Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
   3.c. Montrer alors que la série $\sum v_n^2$ est convergente et donner la valeur de sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

●●○○ Exercice 20 - TSSA (critère de Leibniz)

Soit (u_n) une suite telle que :

- (u_n) est décroissante
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Le but de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n$ ainsi que $u_N = S_{2N}$ et $v_N = S_{2N+1}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
2. Démontrer que les suites (u_N) et (v_N) sont adjacentes.
3. En déduire que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente. *On note* S *sa somme.*
4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Établir : $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$. En déduire : $|S_N - S| \leq u_{N+1}$
5. **Application.**
   Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente puis écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoie un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ d'amplitude inférieure ou égale à p.

●●●○ Exercice 21 - Règle de D'Alembert [1]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite, notée ℓ.

1. Supposons que $\ell < 1$.
   1.a. Établir l'existence d'un réel $q < 1$ et d'un entier naturel n_0 tels que : $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$.
   1.b. En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.
2. Démontrer que si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.
3. Justifier que le cas $\ell = 1$ ne permet pas de conclure.
4. **Application.** Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} \quad ; \quad \sum \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

●●●○ Exercice 22

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Montrer que si $\sum u_n$ est convergente, alors $\sum u_n^2$ l'est également. Réciproque ?

---

1. Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783, français), à qui l'on doit de nombreuses contributions sur les équations algébriques (théorème de D'Alembert-Gauss), les séries, les équations différentielles et équations aux dérivées partielles... ainsi qu'un travail sur l'Encyclopédie avec Diderot.