15

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

Introduction...

On a bien compris (du moins, je l'espère) que la notion d'ensemble est au centre de l'étude des mathématiques. Un ensemble est une collection d'objets... Mais on voit bien que, dans sa généralité, cette notion est au mieux insuffisante, sinon peu manipulable. On préfère déjà les ensembles d'objets de même nature : ensemble de nombres, ensemble de fonctions, ensembles de matrices... sur lesquels on peut donc définir des opérations.

Une fois un ensemble d'objets de même nature constitué, on peut se demander quelle est sa *structure*. L'étude des structures algébriques mathématiques est essentielle pour identifier le type d'ensemble.
Plusieurs structures mathématiques existent, en voici trois parmi les plus courantes :

- Introduit en 1893 par Heinrich Weber (1842-1913, allemand) : le **groupe**. Un ensemble G est un groupe lorsqu'il est muni d'une **loi de composition interne** (une opération entre éléments), notée par exemple $\oplus$, et qui vérifie : G est stable par $\oplus$, la loi $\oplus$ est associative, il existe un neutre de $\oplus$ appartenant à G, et tout élément de G possède un *symétrique* par $\oplus$ dans G.
Sont des groupes : $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$, l'ensemble des applications bijectives de E dans E (muni de la composition)... Ne sont pas des groupes : $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{R},\times)$, $(\mathbb{R}^*,+)$...
Si de plus, $\oplus$ est commutative, on dit que G est un **groupe abélien**.
- Introduit en 1877 par Richard Dedekind (1831-1916, allemand) : le **corps**. Un ensemble $\mathbb{K}$ est un corps lorsqu'il est muni de deux lois de composition internes, notées par exemples $\oplus$ et $\star$, qui vérifient : $\mathbb{K}$ est stable par $\oplus$ et $\star$, $(\mathbb{K},\oplus)$ est un groupe abélien, $\bullet$ se distribue sur $\oplus$, $\star$ possède un neutre dans $\mathbb{K}$, tout élément de $\mathbb{K}$ (excepté le neutre de $\oplus$) possède un *inverse* pour $\star$ dans $\mathbb{K}$.
$(\mathbb{Q},+,\times)$ et $(\mathbb{R},+,\times)$ sont des corps... Tous les autres ensembles usuels n'en sont pas !
- Manipulé depuis le milieu du XVIIème siècle en géométrie, c'est Giuseppe Peano (1858-1932, italien [c'est un peu le roi de l'axiomatisation]) qui donna une définition rigoureuse et axiomatique d'**espace vectoriel** en 1888. Cette structure a le bon goût d'être un bon compromis entre "facile à manipuler" et "de nombreux ensembles peuvent être vus comme des espaces vectoriels" ; rajoutons à cela qu'elle peut avoir une interprétation géométrique... on est face à une excellente structure algébrique !

Pour bien démarrer...

1 # Revoir les matrices et la résolution de système...

2 # Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 0$.

3 # Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = X$.

Ce chapitre est une introduction aux espaces vectoriels. Il précède celui sur les *applications linéaires entre espaces vectoriels* qui donnera un tout autre sens aux matrices que nous connaissons déjà...

Définitions 1 - Espace vectoriel

D1# Un ensemble non vide E est un **espace vectoriel réel** (ou **$\mathbb{R}$-espace vectoriel**) lorsque :

- E est muni d'une "addition interne", notée +, vérifiant :
  - ⇝ $\forall \vec{u},\vec{v} \in E,\ \vec{u}+\vec{v} \in E$ *(stabilité de E par addition interne)*
  - ⇝ $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in E,\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ *(associativité de +)*
  - ⇝ $\forall \vec{u},\vec{v} \in E,\ \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ *(commutativité de +)*
  - ⇝ il existe un élément $\vec{0}_E \in E$ tel que : $\forall \vec{u} \in E,\ \vec{u}+\vec{0}_E = \vec{u}$ *(existence d'un neutre pour +)*
  - ⇝ $\forall \vec{u} \in E,\ \exists \vec{v} \in E \,/\, \vec{u}+\vec{v} = \vec{0}_E$ *(existence d'un opposé dans E pour +)*
- E est muni d'une "multiplication externe", notée ·, vérifiant :
  - ⇝ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ \lambda\cdot\vec{u} \in E$ *(stabilité de E par multiplication externe)*
  - ⇝ $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u}) = (\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{u}$ *(associativité de ·)*
  - ⇝ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u},\vec{v} \in E,\ \lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$ *(distributivité de · sur +)*
  - ⇝ $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ (\lambda+\mu)\cdot\vec{u} = \lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$ *(distributivité de · sur addition réelle)*
  - ⇝ $\forall \vec{u} \in E,\ 1\cdot\vec{u} = \vec{u}$ *(le réel 1 est neutre pour ·)*

D2# Si E est un espace vectoriel réel, alors les éléments de E sont appelés des **vecteurs**, et on parle parfois de **scalaires** pour désigner les réels de la multiplication externe.

D3# L'élément $\vec{0}_E$ est appelé **vecteur nul**.

Petite remarque — L'élément neutre pour + est unique, tout comme l'opposé d'un vecteur, noté $-\vec{u}$. Deux démonstrations à chercher...

✎ Notations — On omettra le symbole · pour la multiplication...

En gros... — Un espace vectoriel est un ensemble muni d'une addition interne et d'une multiplication scalaire qui ont les bonnes propriétés habituelles permettant les calculs ! Puisque E est stable par + et par ·, il est *stable par combinaison linéaire* :
$\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u},\vec{v} \in E,\ \lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \in E$
Et si c'est vrai pour deux...

Remarque

On retrouve les propriétés, valables pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in E$: $\lambda\cdot(-\vec{u}) = (-\lambda)\cdot\vec{u} = -(\lambda\cdot u)$ et : $\lambda\cdot\vec{u} = \vec{0}_E \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \vec{u} = \vec{0}_E \end{cases}$

Exemples 1

Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels réels :

E1 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et pus généralement $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, munis de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E2 $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et plus généralement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, munis de l'addition interne usuelle sur les matrices colonnes et de la multiplication scalaire.

E3 L'ensemble des matrices de tailles $n \times p$ à coefficients réels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E4 L'ensemble des matrices carrées de tailles n à coefficients réels $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E5 L'ensemble des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E6 L'ensemble des polynômes de degré *inférieur ou égal* à n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) $\mathbb{R}_n[X]$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E7 L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E8 L'ensemble des fonctions définies, dérivables deux fois et telles que f'' est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

☞ Rappel... — $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de réels.

☞ Pour info... — E4 et E5 sont même un peu plus qu'un EV, puisque ces ensembles peuvent être munis d'une multiplication interne... Mais de façon générale, ce n'est pas le cas pour un EV.

✘ Attention ! — L'ensemble des polynômes de degré égal à n n'est pas un espace vectoriel car :

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel, $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E.

I Sous-espaces vectoriels

I.1 Définition et généralités

Définition 2

F est un **sous-espace vectoriel de E** lorsque :

- F est inclus dans E
- F est non vide
- F est stable par combinaison linéaire : $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u},\vec{v} \in F,\ \lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \in F$

Important ! — En particulier $\vec{0}_E \in F$.
Cela sera utile dans deux cas :
• pour montrer que F est non vide
• parfois pour montrer qu'un sous-ensemble *n'est pas* un sous-espace vectoriel !

♣ Méthode 1 ♣ Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :

- on vérifie déjà que F est inclus dans E,
- on vérifie que $\vec{0}_E \in F$ pour justifier que F est non vide,
- on montre que F est stable par combinaison linéaire.

A quoi bon cette histoire de sous-espace vectoriel ? Pour la raison qui suit :

Propriété 1

Si F un sous-espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel.

★ Démonstration : ... ★

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel :**
on montrera que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Réflexe ! Et c'est toujours ce que l'on fera !

Exemples 2

E1 $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E...

E2 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}$. **Montrons que F est un sous-espace vectoriel de ...**

Rédaction On adopte bien cette rédaction, en écrivant clairement ce que l'on doit démontrer !

E3 Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0\}$. **Montrons que F est un sous-espace vectoriel de ...**

E4 L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(0) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ car

E5 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

E6 **Déterminons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$.**

I.2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Voyons un cas particulier de sous-espace vectoriel...

Définition 3 - Combinaison linéaire

Soit $\vec{u} \in E$. On dit que $\vec{u}$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ lorsqu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{e}_n$.

Exemples 3

Soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E1 **Montrons que $U = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de X et Y.**

Rédaction
Soit on remarque une combinaison linéaire simple... Soit on résout $U = aX + bY$, d'inconnues $a, b \in \mathbb{R}$.

E2 **Montrons que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de X et Y.**

E3 L'ensemble des combinaisons linéaires de X et Y est :

Théorème 1

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

★ Démonstration :

★

> ☞ Pour info...
> On peut aisément démontrer que c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) espace vectoriel contenant les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Définition 4 - Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

L'espace vectoriel des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$**, et noté $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

♣ **Méthode 3** ♣ **Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :**
on pourra tenter de l'écrire comme le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de E.

Exemple 4

Considérons $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

> En gros...
> Écrire un ensemble comme un ssev engendré équivaut à *expliciter* cet ensemble. S'il est déjà donné de façon explicite, il n'y a plus grand chose à faire...

Propriétés 2

Soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n+1}$ des vecteurs de E.

P1# Si $\vec{e}_{n+1}$ est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, alors $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n+1}) = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.
En particulier : $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{0}_E) = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

P2# Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des réels non nuls, alors $\mathrm{Vect}(\alpha_1 \vec{e}_1, \alpha_2 \vec{e}_2, \dots, \alpha_n \vec{e}_n) = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

★ Démonstration :

★

L'intérêt de ces deux propriétés est de pouvoir "réduire" la famille de vecteurs qui *engendre* Vect(...).

Exemple 5

$$\begin{aligned}\left\{\begin{pmatrix}3x+2y\\x+2y+z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\,/\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} &= \left\{x\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,/\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

car $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Il semble maintenant que l'on ne puisse plus simplifier la famille obtenue...

Petite remarque

A ce stade, on peut donc dire que l'ensemble étudié est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puisqu'il est l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

II Famille génératrice, famille libre, base

Définitions 5

D1# $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ est une **famille génératrice de E** lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$.
Autrement dit : $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ est une famille génératrice de E lorsque $E=\mathrm{Vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$.

D2# $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ est une **famille libre** lorsque :

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n,\ \left(\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+...+\lambda_n\vec{e}_n=\vec{0}_E\quad\Longrightarrow\quad\left(\forall i\in[\![1;n]\!],\ \lambda_i=0\right)\right)$$

Autrement dit : $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ est libre lorsque la seule combinaison linéaire donnant $\vec{0}_E$ est la combinaison linéaire triviale.
Si la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ sont **linéairement indépendants** : aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres.

D3# $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ est **une base** de E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire de *manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$.

Vocabulaire

Une famille qui n'est pas libre est **liée.** C'est le cas lorsqu'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des autres; ou quand il existe une combinaison linéaire non triviale donnant le vecteur nul.

Vocabulaire

$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ est une base ssi pour tout $\vec{u}\in E$, il existe des uniques réels $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ tels que $u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i$. Ces réels sont appelées **coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$.**

Exemples 6

Commençons par donner (sans justifier) quelques bases usuelles :

E1 La famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ est *une* base de $\mathbb{R}^2$.

E2 De la même façon, la famille est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

E3 La famille est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E4 La famille est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

E5 La famille est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

E6 La famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

E7 La famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

E8 **Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.**

E9 **La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ est-elle une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?**

✘ Attention !

On dit *une* base et pas *la* base, c'est la base !

Vocabulaire

Toutes les bases données ci-dessus sont **les bases canoniques** des EV mentionnés. Ce sont les bases *naturelles* dans lesquelles on travaille.

À retenir...

Deux vecteurs sont linéairement indépendants lorsqu'ils sont *non colinéaires.*

E10 **Montrons que la famille** $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ **est une base de** $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

☞ POUR INFO...
Un famille de matrices colonnes dont les coefficients sont *échelonnés* est toujours libre.

- Une famille contenant le vecteur nul est ....
- Une famille contenant deux fois le même vecteur est ....
- Une famille dont l'un des vecteurs est une combinaison linéaires des autres est ....
- Une famille formée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, ce vecteur est ....
- Une famille formée de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas ....

Les définitions précédentes induisent naturellement la propriété suivante, qui sera très utile en pratique :

PROPRIÉTÉ 3

Une famille de vecteurs de E est une base si, et seulement si, elle est libre **et** génératrice.

☞ POUR INFO...
En fait, il existe un théorème qui affirme que :
• de toute famille génératrice, on peut extraire une sous-famille libre et génératrice...
• toute famille libre peut être complétée en une famille libre et génératrice...

★ DÉMONSTRATION :

⋆

Exemples 7

E1 **Donnons une base de l'espace vectoriel F étudié dans l'exemple 4.**

E2 Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminons-en une base.

III Dimension d'un espace vectoriel

Définition 6 - EV de dimension finie

On dit que E est de **dimension finie** lorsqu'il admet une famille génératrice constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Petite remarque : En ECG - Mathématiques appliquées, l'algèbre linéaire se limite au cas des EV de dimension finie.

Théorème 2

Si E admet une base constituée de N vecteurs (avec $N \in \mathbb{N}^*$), alors toutes les bases de E sont constituées de N vecteurs.

★ Démonstration : Hors programme... ★

Pour info... : Tout EV de dimension finie possède une infinité de bases...

Ce théorème nous permet de donner la définition suivante :

Définition 7 - Dimension d'un EV

Si E est de dimension finie, **sa dimension**, notée $\dim(E)$, est le cardinal commun de toutes ses bases.

Exemples 8

- E1 $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) =$, $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) =$ et $\dim\left(\mathbb{R}^n\right) =$
- E2 $\dim\left(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right) =$ et $\dim\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right) =$
- E3 $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) =$
- E4 $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right) =$
- E5 $\dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right) =$ et $\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) =$
- E6 sont des espaces vectoriels de dimension infinie.

À retenir... : Les bases canoniques et les dimensions des espaces vectoriels usuels doivent être parfaitement connues !

On a les propriétés naturelles suivantes :

Propriétés 4

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

- **P1#** F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- **P2#** Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E)$.
- **P3#** Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) \geq \dim(E)$.

♡ Astuce du chef ! ♡ : Les réciproques de ces propriétés sont également utiles...

★ Démonstration : Hors programme... ★

Et une dernière propriété, très utile en pratique :

Propriété 5

Si E est de dimension finie, alors : une famille de vecteurs est une base de E si, et seulement si, elle est libre **et** que son cardinal est égal à la dimension de E.

En gros... : Une base est une famille libre maximale ou une famille génératrice minimale...

★ Démonstration :

$\Longrightarrow$ Immédiat, puisque qu'une base est en particulier une famille libre et que son cardinal est égal à la dimension de E (d'après le théorème 2).

$\Longleftarrow$ Hors programme... ★

♣ **Méthode 4** ♣ **Pour montrer qu'une famille est une base,** deux méthodes sont possibles [1] :

1. montrer qu'elle est libre et génératrice
2. montrer qu'elle est libre et de *bon* cardinal

[1] Une troisième serait de montrer qu'elle est génératrice et de bon cardinal, mais c'est rarement utile...

À retenir... : La seconde méthode est souvent la plus simple à mettre en œuvre, à condition de connaître la dimension de l'EV étudié.

Exemples 9

E1 **Montrons que la famille $\left((1,2),(-1,1)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.**

- La famille $\left((1,2),(-1,1)\right)$ est une famille de cardinal 2 et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
- De plus, cette famille est constituée de deux vecteurs non colinéaires, elle est donc libre.

Conclusion : la famille $\left((1,2),(-1,1)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

E2 **Montrons que la famille $\left(1, 1+X, 1+X+X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.**

IV Rang d'une famille de vecteurs

Définition 8 - Rang d'une famille de vecteurs

Le **rang de la famille** $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, noté $\text{rg}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, est la dimension de $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

✓ **Rigueur !**

Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ est une famille génératrice finie de $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, cette notion a bien du sens !

♣ **Méthode 5** ♣ **Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs,** on cherche à **réduire** la famille génératrice jusqu'à la rendre libre...

Exemple 10

Déterminons le rang de la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Propriété 6

Si E est de dimension finie p, alors $\text{rg}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n) \leq \min(n, p)$.

★ Démonstration :

Important !

$N \leq \min(n, p) \iff$

★