

•••• EXERCICE 1

Dans chaque cas, dire si F est un espace vectoriel ou non.

1. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$
2. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est paire}\}$
3. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 0\}$
4. $F = \text{l'ensemble des suites qui convergent vers } 0$

•••• EXERCICE 2 - EV DE MATRICES

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AMA = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = M\}$. Montrer que E est un espace vectoriel.

•••• EXERCICE 3 - MANIPULATION SUR DES COMBINAISONS LINÉAIRES

On considère les matrices $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X est combinaison linéaire de E_1 et E_2 .
2. Montrer que $Y \notin \text{Vect}(E_1, E_2)$.

•••• EXERCICE 4 - MANIPULATION SUR DES COMBINAISONS LINÉAIRES

On considère les matrices $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que X_1 et X_2 sont des combinaisons linéaires de Y_1 et Y_2 .
2. Vérifier que Y_1 et Y_2 sont des combinaisons linéaires de X_1 et X_2 .
3. En déduire que $\text{Vect}(X_1, X_2) = \text{Vect}(Y_1, Y_2)$.
4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\text{Vect}(X_1, X_2)$?

•••• EXERCICE 5

Dans chaque cas, dire si F est un espace vectoriel ou non. Si oui, en donner une base et préciser sa dimension.

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\}$
3. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) / y = x^2 \right\}$
4. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
5. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$
7. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / 2x + y + z = 0 \right\}$
8. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y = 0 \text{ ET } x - y + 2z = 0\}$
9. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
10. $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
11. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 2X\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
12. $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
13. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
14. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
15. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & c & a-c \\ c & a+2b & c \\ a-c & c & a+2b \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
16. $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^2 = A\}$, où $A = (i^j)_{i,j \in [1;n]}$
17. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) \geq 3\}$

•••• EXERCICE 6

Déterminer le rang de chacune des familles ci-dessous, et préciser celles qui sont des bases de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$1. \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$2. \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$3. \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$4. \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$5. \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

•••• EXERCICE 7

Soient a, b, c trois réels distincts. Démontrer que les vecteurs $\vec{u} = (1, a, a^2)$, $\vec{v} = (1, b, b^2)$ et $\vec{w} = (1, c, c^2)$ forment une base de \mathbb{R}^3 .

•••• EXERCICE 8 - MATRICE NILPOTENTE

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

- $A^p = 0$
- $\forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, A^k \neq 0$

1. Démontrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Quelle information peut-on en déduire sur p ?

•••• EXERCICE 9 - FAMILLES DE FONCTIONS OU DE SUITES

1. Posons, $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$ et $f_3 : x \mapsto e^{3x}$. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .
 - 1.a. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E . En déduire le rang de la famille (f_1, f_2, f_3) .
 - 1.b. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle génératrice de E ?
2. Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2^n$. Notons E l'espace vectoriel des suites réels.
 - 2.a. Montrer que la famille $((u_n), (v_n))$ est libre dans E .
 - 2.b. Notons $F = \{w \in E / \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} - w_{n+1} - 2w_n = 0\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base. Quelle est sa dimension?

•••• EXERCICE 10

Soient a, b, c trois réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et on note F l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J , puis montrer que $F = \text{Vect}(I, A, A^2)$.
3. La famille (I, A, A^2) est-elle libre?

•••• EXERCICE 11

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / JMJ = M\}$.

Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

•••• EXERCICE 12 - CLASSIQUE!

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 2X\}$ est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - 3.a. Vérifier que $AV \in \text{Vect}(U, V)$.
 - 3.b. Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 - 3.c. Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .

4.b. Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

5.a. Montrer que l'ensemble \mathcal{C} est un espace vectoriel.

5.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$

5.c. Démontrer que $\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / NQ = QN\} = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$.

5.d. Déterminer alors une base de \mathcal{C} ainsi que sa dimension.

6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / M^2 + I_3 = A\}$.

6.a. L'ensemble \mathcal{R} est-il un espace vectoriel?

6.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$

6.c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

6.d. En déduire, à l'aide de la question 5.c., les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.

6.e. Conclure en déterminant l'ensemble \mathcal{R} .

••• EXERCICE 13 - MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

On rappelle que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note tM sa **transposée** définie par : ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Soient les ensembles :

- $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / {}^tM = M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille 2 *symétriques*

- $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / {}^tM = -M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille 2 *antisymétriques*

1. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.

2. Donner une décomposition de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3. 3.a. Déterminer $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

3.b. En déduire que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, alors cette décomposition est unique.

4. Établir que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

••• EXERCICE 14 - MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES (LE RETOUR)

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ ainsi que les ensembles :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n *symétriques*

- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = -M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n *antisymétriques*

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.

2. Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists!(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) / M = S + A$$

••• EXERCICE 15 - EV DE POLYNÔMES

1. Donner les coordonnées du polynôme X^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Démontrer que la famille $(1, 1 + X, (1 + X)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme X^2 dans cette base.

3. Démontrer que la famille $(1, X, X(X - 1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme X^2 dans cette base.

••• EXERCICE 16 - EV DE POLYNÔMES

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(X) - XP'(X) = 0\}$.

Justifier que E est un espace vectoriel et en déterminer une base ainsi que la dimension.

••• EXERCICE 17 - EV DE POLYNÔMES

Soient a et b deux réels fixés ainsi que F l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 dont a et b sont racines. Vérifier que F est un espace vectoriel puis déterminer sa dimension.