16

Probabilités

Probabilités en univers infini

Introduction...

Deux éléments importants sont à évoquer pour introduire ce cours... Le premier est, comme bien souvent, un petit complément historique ; quand le second, très court, permet d'appréhender la subtilité du passage à l'infini...

- La théorie de la mesure, et son application (à travers les tribus, entre autres) aux probabilités. Parmi les principaux contributeurs, nous pouvons citer Émile Borel (1871-1956, français) et Henri-Léon Lebesgue (1875-1941, français) qui ont d'ailleurs donné leurs noms à deux mesures... Et bien entendu, Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903-1987, russe), parfois considéré comme le père des probabilités modernes. Il est parti de la théorie de la mesure (développée en analyse pour l'étude des intégrales) et a réussi à formaliser rigoureusement les probabilités à travers la notion de tribu et de mesure.
- Le paradoxe du singe savant ! Ce paradoxe affirme que si un singe immortel tape aléatoirement sur un clavier d'ordinateur, alors il arrivera à écrire les 7 tomes d'Harry Potter !

Pour bien démarrer...

1 # Revoir le chapitre 12 de probabilités sur univers fini...

2 # Si Ω désigne l'univers d'une certaine expérience aléatoire, A et B des évènements, I un ensemble dénombrable, ainsi que $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements.

- $$\bigcap_{i\in I} A_i = \ldots\ldots \quad ; \quad \bigcup_{i\in I} A_i = \ldots\ldots$$
$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \ldots\ldots \quad ; \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \ldots\ldots$$

Autrement dit :

$\omega \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \ldots\ldots$

$\omega \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \ldots\ldots$

- Quand a-t-on $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$?

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors : $\mathbb{P}_A(B) =$

- Formule des probabilités composées :

- Formule des probabilités totales :

- A et B sont indépendants lorsque :

3 # Séries usuelles :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Ω peut être **fini** ou **infini**. Si Ω est infini, distinguons deux cas :

- Ω est **dénombrable** (c'est à dire en bijection avec $\mathbb{N}$)
- Ω est **non dénombrable** (pas de bijection possible avec $\mathbb{N}$)

Exemples 1

E1 On lance une pièce et on s'intéresse à la face obtenue. $\Omega = \{P, F\}$: l'univers est fini.

E2 On lance une pièce jusqu'à obtenir un PILE et on s'intéresse au nombre de lancers effectués.
Dans ce cas, $\Omega =$

E3 On s'intéresse à la durée de vie, en heures, d'une ampoule. Dans ce cas, $\Omega =$

Pourquoi ?

Dans toute la suite, Ω désignera l'univers (fini ou infini) d'une expérience aléatoire et I un ensemble fini ou dénombrable. On rappelle qu'un évènement est un ensemble d'issues de Ω et que $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω (donc l'ensemble de tous les évènements possibles). Remarquons déjà que si Ω est infini, alors $\mathcal{P}(\Omega)$ le sera également...

I Notion d'espace probabilisé

I.1 Compléments sur les évènements...

Exemples 2

E1 On effectue une succession infinie de lancers de la même pièce et on note P_n l'évènement : "obtenir PILE au lancer numéro n", pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- "n'obtenir que des PILE" s'écrit :
- "obtenir au moins un PILE" s'écrit :
- "n'obtenir que des FACE" s'écrit :
- "n'obtenir que des PILE à partir du $5^{\text{ème}}$ lancer" s'écrit :

E2 Marie-Germaine et Charles-Herbert s'affrontent dans un jeu de pièce. Marie-Germaine débute, puis chacun son tour, les joueurs lancent une pièce équilibrée. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux obtient PILE. On note :

- M : "Marie-Germaine gagne la partie"
- C : "Charles-Herbert gagne la partie"
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n : "un PILE est obtenu au lancer n"
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n : "la partie s'arrête juste après le lancer n"

Décrivons M et C à l'aide des évènements A_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrivons A_n à l'aide des évènements P_i.

Quand Ω est trop gros, il peut vite devenir compliqué (ou impossible) de définir une probabilité vérifiant les propriétés déjà vues dans le chapitre 12. Plutôt donc que de définir cette probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ entier, on se restreint souvent à un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui est stable pour les opérations habituelles sur les ensembles (complémentaire, union et intersection dénombrables).

☞ Pour info...
On appelle cela une **tribu**, mais le terme n'est pas au programme.

Dans toute la suite, on considérera donc un univers Ω ainsi qu'un ensemble d'évènements, noté $\mathcal{A}$, tel que :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire)*
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable)*

Vocabulaire
Un tel couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **espace probabilisable**, et les éléments de $\mathcal{A}$ (qui sont des ensembles d'issues) sont les **évènements**.

Exemple 3

Considérons un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrons que :

$$\varnothing \in \mathcal{A} \quad ; \quad \left(\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathcal{A}\right) \Longrightarrow \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Petite remarque
$\mathcal{A}$ est ainsi stable par passage au contraire, par unions et intersections dénombrables.

Ajustons la définition de système complet d'évènements :

Définition 1 - Système complet d'évènements

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\in I}$ une *famille finie ou dénombrable* d'évènements de $\mathcal{A}$.
On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'évènements** lorsque :

- les évènements sont *deux à deux* incompatibles : $\forall i,j \in I,\ \left(i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing\right)$
- l'union des évènements égale Ω : $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$

Exemples 4

E1 $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements.

E2 Si $\Omega = \{\omega_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, alors la famille $\left(\{\omega_i\}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements.

E3 Dans l'exemple avec Marie-Germaine et Charles-Herbert, la famille (M, C) est-elle un système complet d'évènements ?

I.2 Probabilité & espace probabilisé

Définitions 2 - Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

D1# Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0;1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- pour toute suite (A_n) d'évènements deux à deux incompatibles de $\mathcal{A}$, la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

D2# Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

☞ Rappel...
Dans le cas d'univers finis, cette condition portait sur une famille *finie* d'évènements deux à deux incompatibles.

Toutes les propriétés déjà vues sont encore valables... Pour tous $A, B, C \in \mathcal{A}$:

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- **Formules de Poincaré** (ou du crible) :
  - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
  - $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

On ajuste seulement l'un des résultats déjà connu :

Propriété 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements, alors la série $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$ converge et sa somme vaut 1.

✘ Attention !
La réciproque n'est pas vraie... et nous incite aux deux définitions suivantes.

★ Démonstration : Découle immédiatement des définitions de SCE et de probabilité... ★

Définitions 3 - Évènements "quasi'

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

D1# Un évènement $A \neq \varnothing$ est **quasi-impossible** (ou **négligeable**) lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

D2# Un évènement $A \neq \Omega$ est **quasi-certain** (ou **presque-sûr**) lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exemple 5

Reprenons l'exemple de Marie-Germaine et Charles-Herbert. Supposons les lancers indépendants et calculons $\mathbb{P}(M)$ puis $\mathbb{P}(C)$.

Notons N l'évènement "aucun des deux ne gagne". Cette fois, la famille (M, C, N) est un système complet d'évènements et on en déduit que $\mathbb{P}(N) =$

Par conséquent : N est .... et $M \cup C$ est ....

> **☞ Pour info...**
> (M, C) est un système *quasi-complet* d'évènements. C'est le cas d'une famille d'évènements deux à deux incompatibles vérifiant $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$; cette notion est cependant hors programme...

II Conditionnement, indépendance...

Bien... Ici, c'est très simple ! La définition de probabilité conditionnelle et la formule des probabilités composées sont identiques ! Petite modification sur la formule des probabilités totales qui demeure valable dans le cas d'un système complet d'évènements composé d'une infinité dénombrable d'évènements :

Propriété 2 - Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements de $\mathcal{A}$, alors pour tout évènement B, la série $\sum \mathbb{P}(A_n \cap B)$ converge et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

> **Petite remarque**
> En particulier, si toutes les $\mathbb{P}(A_n)$ sont non nulles, on obtient : $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)$.

★ Démonstration : Identique (à l'union dénombrable près) à celle faite dans le chapitre 12. ★

Pour l'indépendance... L'indépendance deux à deux n'est pas impactée ; la définition d'indépendance mutuelle pour une famille infinie dénombrable d'évènements devient :

Définition 4 - Indépendance mutuelle

Les évènements de la famille (A_n) d'évènements de $\mathcal{A}$ sont **mutuellement indépendants** lorsque pour tout sous-ensemble non vide et *fini* J de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$.

> **En gros...**
> Là encore, l'indépendance mutuelle consiste à dire que les évènements $A_1, A_2, \ldots$ sont **2 à 2, 3 à 3, 4 à 4...** ***n*** **à** ***n*** **indépendants pour tout** ***n*** ; mais on ne considère par l'intersection infinie de tous !

Exemple 6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on $\mathcal{U}_n$ est une urne composée de $n!$ balles, numérotées de 1 à $n!$. L'expérience consiste à lancer une pièce équilibrée jusqu'à obtenir le premier PILE. Si n est le nombre de tirages nécessaires à l'obtention du premier PILE, on tire ensuite une boule au hasard dans l'urne $\mathcal{U}_n$. Si aucun PILE n'est obtenu, l'expérience s'arrête.
Question : quelle est la probabilité de tirer une boule numérotée 1 ?

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> On pense à utiliser la FPT quand on demande la probabilité d'un évènement qui est *conditionné* par le passage par d'autres évènements ; autrement dit, quand il y a plusieurs façons d'obtenir cet évènement.

III Quelle formule et quand ?

- **Calculer la probabilité d'un contraire :**

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

- **Calculer la probabilité d'une intersection :**
  - Intersection finie d'évènements mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

  - Intersection finie d'évènements (non nécessairement indépendants) : formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

  - Intersection infinie d'évènements (même indépendants) : outils hors programme !
- **Calculer la probabilité d'une union :**
  - Union de 2 ou 3 évènements (non nécessairement incompatibles) : formules de Poincaré

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

  - Union finie ou dénombrable d'évènements 2 à 2 incompatibles :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

  - Union finie d'évènements mutuellement indépendants : leurs contraires sont également mutuellement indépendants et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=0}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i))$$

  - Autres cas d'union infinie d'évènements : outils hors programme !

♡ Astuce du chef ! ♡

On se souvient que "au moins 1..." est associé à une union ; que "tous..." est associé à une intersection... et que le contraire d'une union est l'intersection des contraires. Donc le contraire de "au moins 1..." s'écrit comme "tous...".

Hypothèse...