Exercices du chapitre 16
Probabilités en univers infini

●○○○ Exercice 1 - Des propriétés classiques...

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que A, B, C des évènements de $\mathcal{A}$. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.
2. Si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$.
3. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. *On rappelle que* : $B \setminus A = B \cap \overline{A}$.

●●○○ Exercice 2 - Vrai ou faux

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

1. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n est quasi-certain, alors $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ est quasi-certain.
2. Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$, alors $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

●○○○ Exercice 3

Une urne contient trois balles blanches et une balle noire. On effectue des tirages successifs et avec remise d'une balle dans cette urne, jusqu'à obtenir la balle noire. On note :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, B_n" : "on tire une balle blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage";
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n" : "le jeu s'arrête à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage";
- F : "on effectue un nombre fini de tirages".

1. Justifier que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement F_n à l'aide des évènements B_i et leurs contraires, avec $i \in [\![1;n]\!]$.
3. Exprimer F en fonction des évènements de la famille $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis en déduire $\mathbb{P}(F)$.

●●○○ Exercice 4 - Jeu à trois joueurs...

Anne-Apolline, Bertrand-Bernard et Claire-Charlotte lancent successivement un dé équilibré à 6 faces. Anne-Apolline joue, puis Bertrand-Bernard, puis Claire-Charlotte, puis à nouveau Anne-Apolline,... Le premier à obtenir 6 gagne la partie. On suppose les lancers de dés mutuellement indépendants.
Calculer, pour chaque joueur, la probabilité de gagner la partie.

●●○○ Exercice 5 - Probabilités & suites

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\dfrac{2}{3}$.
Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au n-ième lancer. On note :

- pour tout entier $n \geq 1$, F_n l'évènement "on obtient FACE au n-ième lancer" et $P_n = \overline{F_n}$,
- pour tout entier $n \in [\![2;+\infty[\![$, D_n l'évènement "on obtient un double PILE au rang n **pour la première fois**",
- pour tout entier $n \in [\![2;+\infty[\![$, $d_n = \mathbb{P}(D_n)$. On conviendra que $d_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement :

"PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE"

alors l'évènement D_8 est réalisé.

1. Calculer d_2 et d_3.
2. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Établir : $\mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2}) = \dfrac{1}{3} d_n$.
3. Pour $n \in [\![2;+\infty[\![$, justifier que : $\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}) = d_{n+1}$.
4. En déduire : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $d_{n+2} = \dfrac{1}{3} d_{n+1} + \dfrac{2}{9} d_n$. Vérifier que cette égalité est encore vraie pour $n = 1$.
5. Écrire une fonction `Python` qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de d_n en sortie.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \dfrac{4}{9}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$.
7. Calculer la probabilité de l'évènement $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$ puis interpréter le résultat obtenu.

●●○○ **Exercice 6**

On dispose d'une urne contenant une balle blanche et une balle noire. On effectue une succession de tirages de la sorte : on prélève une balle, on note sa couleur et on la remet dans l'urne, accompagnée de 2 autres balles de la même couleur. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : "les n premiers tirages n'ont donné que des balles blanches". Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}(A_n)$.

●●○○ **Exercice 7**

On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier PILE. Si n désigne le nombre de lancers effectués, on tire ensuite une balle dans une urne composée d'une balle blanche et de $n-1$ balles noires. Si aucun PILE n'est obtenu, l'expérience s'arrête. Quelle est la probabilité de tirer une balle blanche? *On admet que pour tout* $x \in [0;1[$, *la série* $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ *est convergente de somme* $\ln(1-x)$.

●●○○ **Exercice 8**

On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier PILE. Si n désigne le nombre de lancers effectués, on tire ensuite au hasard une balle dans une urne composée de 2^n balles dont n sont blanches. Si aucun PILE n'est obtenu, l'expérience s'arrête. Quelle est la probabilité de tirer une balle blanche?

●●●○ **Exercice 9 - Lancer de dé**

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Les lancers sont supposés mutuellement indépendants. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs?

●●●○ **Exercice 10 - Tirage d'un entier au hasard**

On tire au hasard un entier strictement positif et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'obtenir n est égale à $\frac{1}{2^n}$.

1. Vérifier que l'on a ainsi défini une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note A_k : "le nombre tiré est multiple de k".
   - 2.a. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
   - 2.b. Calculer la probabilité des évènements : $A_2 \cup A_3$, $A_2 \cup A_4$ et $A_4 \cup A_6$.
   - 2.c. Soient $k, p \in [\![2;+\infty[\![$, distincts. Montrer que les évènements A_k et A_p ne sont pas indépendants.

●●●○ **Exercice 11 - Théorème de limite monotone**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

1. **Question préliminaire.** Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$. Établir : $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$.
2. On suppose dans cette question que la suite (A_n) est croissante (au sens de l'inclusion), autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$.
   - 2.a. Démontrer que la suite $\big(\mathbb{P}(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   - 2.b. Définissons une nouvelle suite d'évènements par : $\begin{cases} B_0 = A_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n = A_{n+1} \cap \overline{A_n} \end{cases}$.
     - 2.b.i. Démontrer que la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée d'évènements deux à deux incompatibles.
     - 2.b.ii. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_n$, puis démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.
     - 2.b.iii. Déduire des questions précédentes : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
3. En considérant la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, déduire de la question précédente : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$.
4. Démontrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (au sens de l'inclusion), alors : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
5. Déduire enfin : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$
6. **Application 1.** Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée d'évènements indépendants de probabilité $p \in]0;1[$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 0$.
7. **Application 2.** Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on double le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n : "les n premiers tirages ont lieu et ne donnent que des boules blanches", et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$.
   - 7.a. Justifier la convergence de la suite (b_n).
   - 7.b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.
   - 7.c. On note B : "l'expérience ne s'arrête jamais".
     - 7.c.i. Justifier que $\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} b_n$.
     - 7.c.ii. Démontrer que la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ est convergente. On note α sa somme.
     - 7.c.iii. Exprimer $\mathbb{P}(B)$ en fonction de α. L'évènement B est-il quasi-impossible?