17

Fonctions

Dérivabilité & convexité

Introduction...

Comme nous l'évoquions dans l'introduction du chapitre 1, Leibniz et Newton furent d'importants contributeurs en analyse, et plus particulièrement en calcul différentiel et calcul intégral. Qui de l'un ou de l'autre a véritablement introduit le calcul différentiel ? Nous ne le saurons jamais... Mais les approches des deux hommes restent les mêmes : la physique, et en particulier, la mécanique.

Ce chapitre traite du calcul différentiel (le calcul intégral fera l'objet du chapitre 20) dont le mot nous fait penser à *différence*. C'est bien cette approche qu'il faut retenir. Quand on étudie une quantité x dépendant du temps t, on peut s'intéresser à ce qui se passe en prenant un léger écart de temps : on considère dt un tout petit intervalle de temps... Et l'on regarde ensuite quel impact cela a sur x : probablement (ah bon ?) une petite variation, dx. L'idée est donc d'exprimer dx en fonction de dt : voir comment varie la quantité x quand on effectue une variation *infinitésimale* de t... On cherche donc l'expression de $\frac{dx}{dt}$. Cette notation est souvent rencontrée en physique et on en rencontre parfois une autre : $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, où Δt désigne alors un écart entre deux valeurs assez proches de t ($\Delta t = t_2 - t_1$ par exemple). Mais le sens est alors légèrement différent... Car la notation $\frac{dx}{dt}$ sous entend que dt peut être rendu aussi petit que l'on veut ; alors que Δt représente la différence entre deux valeurs fixes. En gros, on pourrait voir dt comme une sorte de limite de Δt, lorsque les t_1 et t_2 se rapprochent...

Bref, en cours de mathématiques, on étudie souvent des quantités $f(x)$ qui dépendent de x ; et on utilise rarement l'écriture $\frac{df}{dx}$ (utilisée par Leibniz), à laquelle on préfère f' (utilisée par Newton).

Pour bien démarrer...

1 # Revoir l'étude des fonctions : limites, continuité, dérivées...

2 # Revoir l'étude des suites récurrentes d'ordre 1 ($u_{n+1} = f(u_n)$).

3 # Rappeler toutes les formules de dérivées connues :

4 # Considérons $f : x \longmapsto e^{-x} + x - \dfrac{x^2}{2}$. Démontrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.

5 # Considérons une suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2^n}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Dans tout ce chapitre, f désignera une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a un réel de I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

I Nombre dérivé & fonction dérivée

I.1 Taux d'accroissement, nombre dérivé & tangente

Définition 1 - Taux d'accroissement

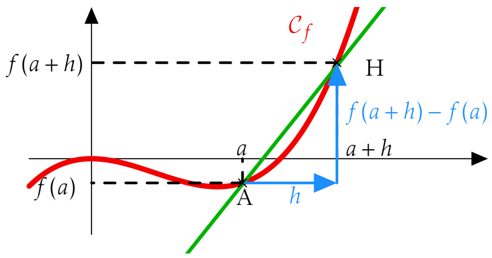
Pour tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in \mathrm{I}$, on appelle **taux d'accroissement de f entre a et $a+h$** le nombre :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Petite remarque

Parfois, on note $x = a+h$ de sorte que $h = x-a$, et ainsi le taux d'accroissement de f entre a et $x = a+h$ s'écrit : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Graphiquement :



Vocabulaire

On dit que le segment [AH] est une **corde** de $\mathcal{C}_f$.

À retenir...

Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la corde [AH].

Définitions 2 - Fonction dérivable & nombre dérivé

D1# On dit que f **est dérivable en a** lorsque $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une *limite finie* quand h tend vers 0.

D2# Dans ce cas, le nombre réel obtenu s'appelle **nombre dérivé de f en a**, noté $f'(a)$.
On a ainsi :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

Petite remarque

Ou bien :

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour étudier la dérivabilité d'une fonction f en a :**

- calculer, pour h suffisamment proche de 0, le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$,
- le simplifier (sinon, c'est toujours une FI),
- puis étudier sa limite lorsque h tend vers 0.

Exemples 1

E1 **Montrons que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est dérivable en tout réel a et déterminons $f'(a)$.**

Conclusion : la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est dérivable en tout réel a et $f'(a) = \ldots\ldots.$

E2 **Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout réel strictement positif a et déterminons $f'(a)$.**

Conclusion : la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout réel strictement positif a et $f'(a) = \ldots\ldots.$

E3 **Étudions la dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ en 0.**

Conclusion : la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ ....

E4 **Étudions la dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto |x|$ en 0.**

Conclusion : la fonction $f : x \longmapsto |x|$ ....

Si f est dérivable en a, alors la fonction $\varepsilon : h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Et on a, pour h suffisamment proche de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$$

Ou bien, en posant $x = a+h$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$$

Ainsi, si x est proche de a (c'est à dire h proche de 0), alors :

$$f(x) \simeq f(a) + (x-a)f'(a)$$

Or $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est l'équation d'une droite... Par conséquent, localement, autour du point de coordonnées $(a; f(a))$, $\mathcal{C}_f$ se comporte presque comme une droite : cette droite est appelée **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en A.

Vocabulaire

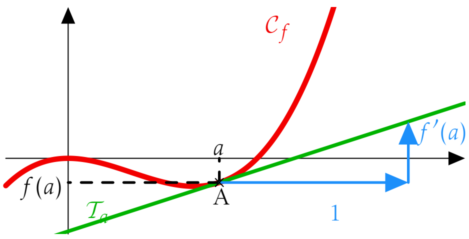
On dit que $f(a) + f'(a)(x-a)$ est un **développement limité de $f(x)$ au voisinage de a.**

Définition 3 - Tangente

Si f est dérivable en a, alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(a; f(a))$ est la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Graphiquement :



À retenir...

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a; f(a))$.

Avant de continuer, une propriété qui se déduit facilement de la définition :

Propriété 1 - Lien continuité & dérivabilité

Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

✘ Attention !

La réciproque est fausse... L'exemple type est la fonction valeur absolue !

★ Démonstration : Si f est dérivable en a, alors pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$, où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0.
Ainsi, on obtient :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

f est donc continue en a. ★

I.2 Dérivabilité à gauche et à droite

Et si f n'est pas dérivable en a ? Il y a essentiellement deux cas que l'on rencontre fréquemment :

- Si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $\pm\infty$ lorsque h tend vers 0, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **(demi-)tangente verticale** au point d'abscisse a :

- Si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet deux limites différentes selon que h soit positif ou négatif, alors $\mathcal{C}_f$ admet deux **demi-tangentes** au point d'abscisse a : la courbe de f aura un "pic" :

Petite remarque
Le troisième serait le cas d'un taux d'accroissement qui n'a pas de limite à gauche et/ou à droite.

En gros...
Une droite de "coefficient directeur infini" est verticale.

Précisons maintenant ce deuxième cas...

Définitions 4 - Dérivabilité latérale

D1# On dit que f **est dérivable en a à gauche** lorsque $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une *limite finie* quand h tend vers 0 par valeurs inférieures.

D2# Dans ce cas, le nombre réel obtenu s'appelle **nombre dérivé de f en a à gauche** , noté $f_g'(a)$.
On a ainsi :

$$f_g'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

Petite remarque
La même chose existe bien évidemment à droite !

Et, tout comme on l'avait pour la continuité :

Propriété 2

f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à gauche et à droite en a ET $f_g'(a) = f_d'(a)$.

★ Démonstration : Découle immédiatement des résultats sur les limites. ★

Exemples 2

E1 **Étudions la dérivabilité de la fonction** $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ e^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Conclusion : la fonction f

E2 **Étudions la dérivabilité de la fonction** $f : x \longmapsto \begin{cases} e^x + x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

En gros...
Il faut que les 2 morceaux se recollent (continuité) avec la même pente (dérivabilité).

Conclusion : la fonction f

I.3 Fonction dérivée & dérivées successives

Définitions 5 - Fonction dérivée

D1# Lorsque f est dérivable en tout réel de I, on dit qu'elle est **dérivable sur I**.

D2# Dans ce cas, on peut définir la fonction $f' : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$. Cette fonction est appelée **fonction dérivée de f**.

Vocabulaire
- On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$ sur I** lorsqu'elle est dérivable sur I et que f' est continue sur I.
- On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^2$ sur I** lorsqu'elle est deux fois dérivable sur I et que f'' est continue sur I.
- De manière analogue, on définit les fonctions de classes $\mathcal{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I** lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Notations

N1# Si f est dérivable sur I et que f' est également dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable sur I** et on note f'' sa dérivée seconde (la dérivée de f').

N2# De façon analogue, si f est n fois dérivable sur I, on note $f^{(n)}$ sa dérivée $n^{\text{ème}}$.

II Calculs de dérivées

On ne réécrit pas tout ce qui a déjà été vu :

- dérivabilité des fonctions usuelles (qui sont presque toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'ailleurs...),
- dérivabilité & opérations,
- dérivées usuelles,
- formules de dérivation : produit, quotient, composée.

Généralisons seulement quelques résultats utiles :

Propriétés 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et u, v deux fonctions définies sur I.

P1# Si u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors pour $\alpha \in \mathbb{R}$, αu est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $(\alpha u)^{(n)} = \alpha u^{(n)}$

P2# Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors $u + v$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

P3# Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors uv est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $(uv)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$

P4# Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Pour info...
P3 est appelée **formule de Leibniz**.

★ Démonstration : Tout se démontre par récurrence ! A faire pour s'entraîner. ★

III TAF & IAF

Voyons maintenant deux théorèmes dont le second (qui est une conséquence du premier) sera assez utile en pratique dans l'étude des suites récurrentes d'ordre 1.

Théorème 1 - des accroissements finis (TAF)

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a;b[$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

★ Démonstration : Ferait un bon exercice théorique... ★

Graphiquement :

Théorème 2 - inégalité des accroissements finis (IAF)

Soit f une fonction dérivable sur I.

- **Version 1 :** S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $m \leq f'(x) \leq \mathrm{M}$, alors pour tous $a, b \in \mathrm{I}$ avec $a \leq b$, on a :
$$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$$
- **Version 2 :** S'il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $|f'(x)| \leq k$, alors pour tous $a, b \in \mathrm{I}$, on a :
$$|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$$

★ Démonstration :

- **Version 1.**
Supposons qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $m \leq f'(x) \leq \mathrm{M}$. Soient $a, b \in \mathrm{I}$ avec $a < b$.
    - Si $a = b$: le résultat est trivialement vrai...
    - Si $a < b$:
f étant dérivable sur I, elle est donc dérivable sur $[a;b]$ (donc en particulier, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$). Ainsi d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
Mais $c \in \mathrm{I}$, donc $m \leq f'(c) \leq \mathrm{M}$. D'où :
$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \mathrm{M}$$
Or $b-a > 0$. Par conséquent :
$$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$$

  Dans les deux cas :
$$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$$
- **Version 2.**
Supposons qu'il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $|f'(x)| \leq k$. Soient $a, b \in \mathrm{I}$.
    - Si $a = b$: le résultat est trivialement vrai...
    - Si $a < b$:
On a :
$$\forall x \in \mathrm{I},\ |f'(x)| \leq k$$
D'où :
$$\forall x \in \mathrm{I},\ -k \leq f'(x) \leq k$$
Puis, en appliquant la version 1, on obtient :
$$-k(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq k(b-a)$$
Et comme $k \geq 0$ et $b-a \geq 0$, on :
$$|f(b)-f(a)| \leq k(b-a)$$
Mais comme $b-a \geq 0$, on a $b-a = |b-a|$, d'où :
$$|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$$
    - Si $a > b$: le résultat est encore valable par symétrie des rôles de a et b, et d'après le point précédent (on procède de la même façon sur l'intervalle $[b,a]$ et le résultat est identique, car $|f(b)-f(a)| = |f(a)-f(b)|$ et $|b-a| = |a-b|$...).

  Dans les trois cas :
$$|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$$

★

Petite remarque

Puisqu'il s'agit de deux versions du même théorème, elles doivent être équivalentes ! On a démontré V2 à partir de V1... Mais peut-on démontrer V1 à partir de V2 ? Oui, en remarquant que s'il existe m, M tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $m \leq f'(x) \leq \mathrm{M}$, alors en posant $k =$ ...., on a également : $\forall x \in \mathrm{I}$, $|f'(x)| \leq k$ et on peut alors appliquer V2.

Exemple 3

Une application importante de l'IAF dans l'étude des suites récurrentes :

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}e^{-x}$ et (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$.

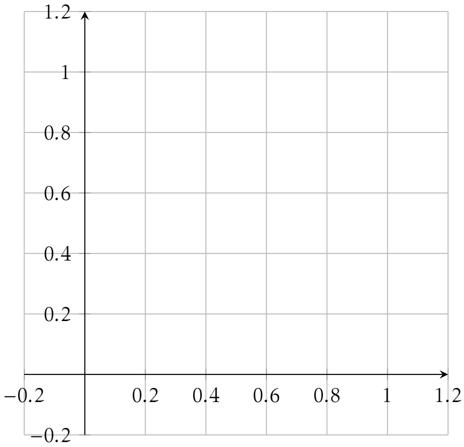
★ Classique ! ★

Type d'exercice très (trop ?) classique !

♣ Indication...

$\dfrac{1}{e} \simeq 0,37$.

- **Représentons la courbe de la fonction f ainsi que les premiers termes de (u_n) sur le graphique ci-dessous :**



- **Justifions que f possède un unique point fixe, noté α, et que $\alpha \in [0;1]$.**

- **Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.**

- **Démontrons que pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.**

- **Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.**
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
  - f est dérivable sur $[0;1]$
  - pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
  - $u_n \in [0;1]$ et $\alpha \in [0;1]$

  Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient :
  $$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$
  Autrement dit, puisque $f(\alpha) = \alpha$:
  $$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Pourquoi ?
α est un point fixe de f, c'est à dire $f(\alpha) = \alpha$.

- **Déduisons-en que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.**

- **Concluons que (u_n) converge et donnons sa limite.**

IV Applications de la dérivation...

IV.1 Variations des fonctions

On rappelle ces résultats, connus depuis longtemps, dont une démonstration possible repose en fait sur le TAF [1]...

[1] Et pourquoi ne pas voir une autre démonstration en exercice ?

Théorème 3 - lien fonction / dérivée

Si f est dérivable sur I, alors :

1. $\big(\, f$ est constante sur I $\big) \iff \big(\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0\big)$
2. $\big(\, f$ est croissante sur I $\big) \iff \big(\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geq 0\big)$
3. $\big(\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \geq 0$ et f' *ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur* I$\big) \Longrightarrow \big(f$ est strictement croissante sur I$\big)$
   En particulier, si pour tout $x \in \mathrm{I}$; $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

Petite remarque

Résultats et démonstrations analogues dans le cas d'une fonction décroissante, avec $f'(x) \leq 0$.

★ Démonstration : Soit f une fonction dérivable sur I.

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f constante sur I. Soient $x \in \mathrm{I}$ et $h \neq 0$ (tels que $x + h \in \mathrm{I}$) :
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{f\ \text{constante}}{=} \frac{0}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$
Ainsi, $f'(x) = 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$. Soient $a, b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$. Par le TAF, il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$
Comme $f'(c) = 0$, on obtient $f(b) - f(a) = 0$ et donc $f(a) = f(b)$: f est constante sur I.
2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f croissante sur I. Soient $x \in \mathrm{I}$ et $h \neq 0$ (tels que $x + h \in \mathrm{I}$).
   - Si $h > 0$, alors $x + h > x$; et puisque f est croissante sur I, on a $f(x+h) \geq f(x)$. Dans ce cas :
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$
   En passant à la limite, on obtient : $f_d'(x) \geq 0$.
   - Si $h < 0$, alors $x + h < x$; et puisque f est croissante sur I, on a $f(x+h) \leq f(x)$. Dans ce cas :
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$
   En passant à la limite, on obtient : $f_g'(x) \geq 0$.

   Par conséquent : $f'(x) \geq 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$. Soient $a, b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$. Par le TAF, il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$
Comme $f'(c) \geq$ et $b - a \geq 0$, on obtient $f(b) - f(a) \geq 0$ et donc $f(a) \leq f(b)$: f est croissante sur I.
3. Supposons que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$ et que f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I.
Soient $x, y \in \mathrm{I}$ tels que $x < y$. En appliquant le point 2, on sait déjà que f est croissante sur I, donc $f(x) \leq f(y)$.
Par l'absurde, supposons que $f(x) = f(y)$. On aurait alors, puisque f est croissante sur I :
$$\forall z \in [x;y],\ f(x) \leq f(z) \leq f(y)$$
et donc, comme $f(x) = f(y)$:
$$\forall z \in [x;y],\ f(x) = f(z) = f(y)$$
f serait donc constante sur $[x;y]$ et d'après le pont 1, f' serait nulle sur $[x;y]$. Par conséquent, f' s'annulerait une infinité de fois sur I : absurde.
Conclusion : f est strictement croissante sur I.

★

✘ Attention !

Pour la stricte croissance, il *suffit* que f' soit strictement positive ; mais ce n'est pas *nécessaire*...

IV.2 Conséquence sur les extrema locaux

Définitions 6 - Extremum local

Soit $a \in \mathrm{I}$.

D1# On dit que $f(a)$ est un **maximum local** de f lorsque f est majorée par $f(a)$ *au voisinage de* a.

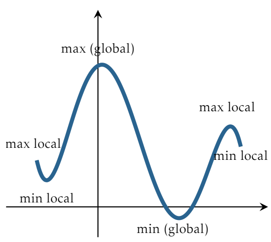
D2# On dit que $f(a)$ est un **minimum local** de f lorsque f est majorée par $f(a)$ *au voisinage de* a.

Vocabulaire

On parle parfois de **maximum global** sur I si f est majorée par $f(a)$ sur I tout entier... Et en particulier, un extremum global est local...

Théorème 4 - CNS d'extremum local sur un ouvert

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et $a \in \mathrm{I}$.
On a :
$$\big(f \text{ admet un extremum local en } a\big) \iff \big(f' \text{ s'annule en } \textit{changeant de signe} \text{ en } a\big)$$



★ Démonstration : Découle assez immédiatement du théorème précédent ou directement du TAF. On notera cependant que l'hypothèse d'intervalle ouvert est nécessaire pour le sens direct (pas pour le sens réciproque), afin de pouvoir considérer un voisinage autour de a...
Le schéma ci-contre le montre également : les extrémités de la courbe fournissent des extrema locaux, sans pour autant que la dérivée s'annule en ces valeurs.

★

IV.3 Convexité des fonctions

Définitions 7 - Fonction concave / convexe, point d'inflexion

D1# f est **convexe** sur I lorsque :

$$\forall a,b\in \mathrm{I},\ \forall\lambda\in[0;1],\ f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

D2# f est **concave** sur I lorsque :

$$\forall a,b\in \mathrm{I},\ \forall\lambda\in[0;1],\ f(\lambda a+(1-\lambda)b)\geq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

D3# Le point $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$** lorsque f change de convexité en x_0.

Important ! $[x;y]=\{\lambda x+(1-\lambda)y\ /\ \lambda\in[0;1]\}$.

Petite remarque f est concave ssi $-f$ est convexe...

Graphiquement :

En gros... En gros, f est convexe (resp. concave) si la portion de $\mathcal{C}_f$ comprise entre entre $\mathrm{A}(a, f(a))$ et $\mathrm{B}(b, f(b))$ est au-dessous (resp. au-dessus) de la corde [AB].

À retenir... C'est une notion liée à la vitesse de croissance / décroissance d'une fonction... Par exemple :
- une fonction croissante et convexe croît de plus en plus vite ;
- une fonction croissante et concave croît de moins en moins vite.

Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$...

Les représentations graphiques précédentes nous permettent aisément d'observer les propriétés suivantes :

Propriétés 4

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors :

P1#

$$\begin{aligned}\big(f \text{ est convexe sur I}\big) &\iff \big(f' \text{ est croissante sur I}\big)\\ &\iff \big(\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de ses tangentes sur I}\big)\\ &\iff \big(\forall x\in\mathrm{I},\ f''(x)\geq 0\big)\end{aligned}$$

P2#

$$\begin{aligned}\big(f \text{ est concave sur I}\big) &\iff \big(f' \text{ est décroissante sur I}\big)\\ &\iff \big(\mathcal{C}_f \text{ est au-dessous de ses tangentes sur I}\big)\\ &\iff \big(\forall x\in\mathrm{I},\ f''(x)\leq 0\big)\end{aligned}$$

P3#

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{M}(x_0,f(x_0)) \text{ est un point d'inflexion de } \mathcal{C}_f\big) &\iff \big(\text{la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en M traverse la courbe en M}\big)\\ &\iff \big(f'' \text{ s'annule en changeant de signe en } x_0\big)\end{aligned}$$

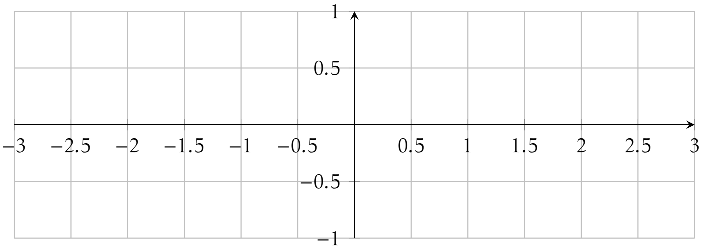
★ Démonstration : On admet ces propriétés dont les démonstrations pourront éventuellement faire l'objet d'un exercice... ★

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour étudier la convexité d'une fonction...**
Dans la plupart des cas, f est de classe $\mathcal{C}^2$, donc on étudie le signe de sa dérivée seconde (sauf si le sens de variation de sa dérivée est évident).

Exemple 4

Étudions la fonction $f : x \longmapsto xe^{-x^2/2}$ pour représenter au mieux sa courbe.

♣ **Indication...** $f(1)\simeq 0,6$; $\sqrt{3}\simeq 1,7$; $f(\sqrt{3})\simeq 0,4$.



Une dernière propriété concernant les extrema globaux cette fois :

Propriétés 5 - Condition suffisante d'extremum global sur un ouvert

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle **ouvert** I et $a \in \mathrm{I}$.

P1#

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est convexe sur I} \\ f'(a) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \big(f(a) \text{ est un minimum (global) de } f \text{ sur I}\big)$$

P2#

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est concave sur I} \\ f'(a) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \big(f(a) \text{ est un maximum (global) de } f \text{ sur I}\big)$$

✘ Attention ! Ce sont des conditions suffisantes, pas nécessaires.

★ Démonstration : En exercice... ★

Application classique de la convexité : démontrer certaines inégalités...

Certaines inégalités classiques sont des "inégalités de convexité" ; c'est à dire qu'elles traduisent par exemple le fait qu'une courbe convexe est au dessus d'une de ses tangentes.

♣ Méthode 3 ♣ Petite astuce...
...dans le cas d'une inégalité dont un des deux membres est l'expression d'une fonction convexe ou concave et l'autre membre l'expression d'une tangente...

Exemple 5

Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Petite remarque C'est tout de même assez anecdotique... Le Réflexe ! reste d'étudier la fonction $x \longmapsto e^x - (x+1)$.