Exercices du chapitre 17
Dérivabilité & convexité des fonctions

Un bon exercice serait de démontrer les formules de dérivations usuelles (somme, produit, inverse, quotient, composée) et généraliser celles qui peuvent l'être (somme, produit) pour des dérivées n-ième...

●○○○ Exercice 1 - Dérivabilité en un point
Pour chaque fonction donnée, étudier sa dérivabilité en a.

1. $f : x \longmapsto e^{-x}\sqrt{x}$ en $a = 0$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ en $a = 0$
3. $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$ en $a = 0$
4. $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+1 & \text{si } x < 0 \\ e^x - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $a = 0$
5. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $a = 1$
6. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $a = 0$

●○○○ Exercice 2 - Limites usuelles avec des taux d'accroissement...
1. Rappeler et redémontrer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.
2. Soit $\alpha > 0$. Étudier la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.
3. Étudier la limite des fonctions $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, $x \longmapsto \dfrac{e^x-1}{x^2}$, $x \longmapsto \dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}$ et $x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$ en 0.

●●○○ Exercice 3 - Avec des taux d'accroissement...
Justifier que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

●●○○ Exercice 4 - Prolongement $\mathcal{C}^1$
Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2\ln(x)$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.
Est-elle deux fois dérivable en 0 ?

●●○○ Exercice 5 - Dérivée n-ième
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{2x}$.

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner les valeurs des réels a_0, b_0, a_1, b_1 tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (a_0x + b_0)e^{2x} \quad ; \quad f'(x) = (a_1x + b_1)e^{2x}$$
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n, b_n tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_nx + b_n)e^{2x}$$
On précisera les relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.
4. Déterminer le terme général de (a_n).
5. On considère la suite (c_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{b_n}{2^n}$. Établir une relation de récurrence sur (c_n), puis déterminer le terme général de (b_n).
6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f^{(n)}(x)$.
7. Retrouver le résultat précédent à l'aide de la formule de Leibniz.

●●○○ Exercice 6 - Dérivée n-ième
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 + x)e^{2x-1}$.

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n, c_n tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_nx^2 + b_nx + c_n)e^{2x-1}$$
On précisera les relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.
3. Comment pourrait-on maintenant en déduire les termes généraux des suites (a_n), (b_n) et (c_n) ?
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $f^{(n)}$ en utilisant la formule de Leibniz.

●●○○ Exercice 7 - IAF & suite récurrente

On considère les fonctions $f : x \longmapsto 2 - \frac{1}{2}\ln(x)$ et $g : x \longmapsto f(x) - x$.

On considère également la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations complet de g sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. *On la note* α.
3. Justifier que $\alpha \in [1;e]$.
4. Étudier le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq e$.
6. Démontrer que : $\forall x \in [1;e],\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ puis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
7. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}$; puis conclure que (u_n) converge et préciser sa limite.

●●○○ Exercice 8 - IAF & suite récurrente

On considère la fonction $f : x \longmapsto x - 2 + e^{-x}$. On nomme $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif. Prouver que $\alpha \in]1,2[$.
3. On considère la fonction $g : x \longmapsto 2 - e^{-x}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   - 3.a. Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.
   - 3.b. Montrer que la suite (u_n) est bornée par 1 et 2.
   - 3.c. Établir que pour tout réel x appartenant à $[1,2]$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$.
   - 3.d. Démontrer que pour tout entier naturel n : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$.
   - 3.e. Déterminer la limite de (u_n).
   - 3.f. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{e^n} \leq 10^{-5}$ et interpréter le résultat. *Donnée :* $\ln(10) \simeq 2,3$.

●●●○ Exercice 9 - Séries de Riemann & de Bertrand

1. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \ln(\ln(x))$.
   - 1.a. Dresser le tableau de variations complet de f sur son ensemble de définition.
   - 1.b. Démontrer que pour tout $x \in [2;+\infty[$, $f(x+1) - f(x) \leq \frac{1}{x\ln(x)}$.
   - 1.c. En déduire que la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente.
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ telle que f' est positive et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
   - 2.a. Montrer que : $\forall x \in [2,+\infty[,\ f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$.
   - 2.b. Déterminer alors une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum_{k\geq 2} f'(k)$.
   - 2.c. **Applications.** Étudier la nature des séries suivantes : $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ et $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha > 0$.

●●○○ Exercice 10 - Étude de fonctions

Pour chacune des fonctions ci-dessous :

- déterminer son ensemble de définition
- étudier sa parité
- dresser son tableau de variations complet sur son ensemble de définition
- étudier sa convexité

1. $f : x \longmapsto \frac{x}{x^2+3}$
2. $f : x \longmapsto e^x + e^{-x}$
3. $f : x \longmapsto e^x - e^{-x}$
4. $f : x \longmapsto x\ln(x) - x^2$
5. $f : x \longmapsto x^2\ln(x)$
6. $f : x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$
7. $f : x \longmapsto x^2 - x\ln(x) - 1$

●○○○ Exercice 11 - C'est faux !

Les affirmations suivantes sont fausses. Proposer des contre-exemples pour les infirmer.

1. Si f' est convexe, alors f est convexe.
2. Si f est continue et convexe sur $[a;b]$ avec $f(a) = f(b) = 0$, alors f est positive sur l'intervalle $[a;b]$.

3. Si $f''(a)=0$, alors $\mathcal{C}_f$ est traversée par sa tangente en $\mathrm{A}(a;f(a))$.
4. Si f est convexe et g est concave, alors $f+g$ est convexe.

●○○○ Exercice 12 - Position relative

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\ f(x)=3x-3x\ln(x)$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et $\mathcal{T}_1$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_1$.

●○○○ Exercice 13 - Propagation d'un virus...

On considère que le nombre d'individus infectés par un certain virus, exprimé en centaines, est modélisé par la fonction N définie sur l'intervalle $[0;60]$ par $\mathrm{N}(t)=t^2e^{-0.05t}+1$, où t est le temps écoulé depuis le 1er janvier 2020, exprimé en jours.
Au bout de combien de jours la vitesse de croissance du nombre d'individus infectés a-t-elle diminué ?

●●○○ Exercice 14 - Avec la convexité

1. **1.a.** En utilisant la convexité d'une fonction judicieusement choisie, démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

   1.b. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.
2. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$.

●●●○ Exercice 15 - Réciproque d'une fonction convexe croissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, strictement croissante, convexe et bijective. Déterminer la convexité de f^{-1} sur $f(\mathrm{I})$.

●●●○ Exercice 16 - Inégalités de convexité

1. Démontrer que pour tous $a,b\in\mathbb{R}$: $e^{\frac{a+b}{2}}\leq\dfrac{e^a+e^b}{2}$.
2. Démontrer que la fonction $x\longmapsto\ln(\ln(x))$ est concave sur $]1;+\infty[$. En déduire que pour tous $a,b\in]1;+\infty[$, $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geq\sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

●●●○ Exercice 17 - Moyennes arithmétique & géométrique

1. Soit f une fonction concave sur un intervalle I. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tous $a_1,a_2,...,a_n\in\mathrm{I}$:
$$f\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)\geq\frac{f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)}{n}$$
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tous réels strictement positifs $a_1,a_2,...,a_n$:
$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\leq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

●●●○ Exercice 18 - Lien signe de f' & variation de f

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $x\in\mathrm{I}$, $f'(x)>0$. L'objectif est de démontrer que f est strictement croissante sur I.
Considérons alors $a,b\in\mathrm{I}$ tels que $a<b$.

1. Dans un premier temps, montrons que $f(a)\leq f(b)$. Raisonnons pas l'absurde et supposons que $f(a)>f(b)$.
   Considérons les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0=a$, $b_0=b$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:
   - si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)<f(a_n)$, alors $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$;
   - si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)\geq f(a_n)$, alors $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$.

   1.a. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $f(a_n)>f(b_n)$.

   1.b. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$.

   1.c. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. *Notons $c\in[a;b]$ la limite commune de ces deux suites.*

   1.d. Justifier que pour $x\in[a;b]$ suffisamment proche de c, $f(x)-f(c)$ et $x-c$ ont même signe.

   1.e. Déterminer alors le signe de $f(c)-f(a_n)$ et celui de $f(b_n)-f(c)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   1.f. Aboutir à une contradiction puis conclure.
2. Montrons enfin, en raisonnant par l'absurde, que nécessairement $f(a)<f(b)$.

●●●○ Exercice 19 - TAF !

1. **Résultat préliminaire 1.** On considère une fonction f définie sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ telle que f possède un maximum en $c\in]a;b[$.

   1.a. En revenant à la définition, démontrer que $f_g'(c)\geq 0$ et $f_d'(c)\leq 0$.

1.b. En déduire que $f'(c) = 0$.

Le raisonnement est le même si $f(c)$ est un minimum.

On a ainsi démontré le résultat : si f est dérivable sur $]a;b[$ et possède un extremum en $c \in]a;b[$, alors $f'(c) = 0$.

2. **Résultat préliminaire 2.** On considère une fonction f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, telle que $f(a) = f(b)$.
   2.a. Que dire de $f'(c)$ pour tout $c \in]a;b[$ si f est constante ?
   Dans la suite de l'exercice, on supposera que f n'est pas constante.
   2.b. Représenter l'allure d'une telle fonction.
   2.c. Justifier que f possède un minimum et un maximum sur $[a;b]$, et que l'un des deux au moins est différent de $f(a)$.
   2.d. En déduire qu'il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.
   *On a ainsi démontré que si f est une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$. C'est le **théorème de Rolle**.*
3. **Théorème des accroissements finis.** Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$.
   3.a. Déterminer une fonction g, définie sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que :
   $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff g'(c) = 0$$
   3.b. Conclure.

●●●○ Exercice 20 - Égalité de Taylor-Lagrange et démonstrations sur la convexité

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.

1. Soient $a, b \in \mathrm{I}$. Posons $g : x \longmapsto f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \dfrac{(b-x)^2}{2}\mathrm{K}$, où K est un réel.
   1.a. Donner $g(b)$.
   1.b. Déterminer K de sorte que $g(a) = 0$.
   1.c. Démontrer que si $g(a) = 0$, alors qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.
2. Déduire de la question précédente que pour tous $a, b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$:
   $$\exists c \in]a;b[\ / \ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$$
   Ce résultat est connu sous le nom d'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.
3. Démontrer que si $a \in \mathrm{I}$:
   $$\left.\begin{array}{l} f \text{ est convexe sur I} \\ f'(a) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(f(a) \text{ est un minimum (global) de } f \text{ sur I}\Big)$$
4. Établir un résultat analogue si f est concave.

●●●○ Exercice 21 - Une équation fonctionnelle...

L'objectif de l'exercice est de déterminer toute les fonctions f, définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

- f est dérivable en 0,
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$. *On notera $(\mathcal{R})$ cette relation.*

On admet que si g est une fonction dérivable et bijective sur un intervalle I, alors g^{-1} est dérivable en tout $x \in g(\mathrm{I})$ tel que $g'(x) \neq 0$ et :
$$\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(x)}$$

1. Montrer que pour tout nombre réel t : $-1 \leq \dfrac{2t}{1+t^2} \leq 1$.
2. Trouver toutes les fonctions constantes vérifiant la relation $(\mathcal{R})$.
3. *On suppose désormais que f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.*
   3.a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq f(x) \leq 1$.
   3.b. Démontrer que $f(0) = 0$.
   3.c. Démontrer que la fonction f est impaire.
   3.d. Nous allons maintenant démontrer, en raisonnant par l'absurde, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 1$.
   Supposons alors qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.
      3.d.i. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
      3.d.ii. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$ puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
      3.d.iii. Conclure.
   3.e. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
   3.f. Notons $a = f'(0)$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a\Big(1 - f(x)^2\Big)$.
   3.g. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ selon les valeurs de a ; puis justifier que f admet des limites en $\pm\infty$ que l'on déterminera.
   3.h. Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.
   3.i. Démontrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$ et que pour tout $y \in]-1,1[$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{\frac{1}{a}}{1-y^2}$.
   3.j. En déduire l'expression de $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in]-1;1[$ puis celle de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclure.