18

Probabilités

Généralités sur les variables aléatoires discrètes

Introduction...

Pas plus inspiré que l'année dernière... et aucune blague ne me vient à l'esprit !

Pour bien démarrer...

1 # Revoir les chapitres 12,14 et 16.

2 # Rappeler les sommes des séries usuelles :

3 # Si X est une variable aléatoire sur Ω, rappeler les définitions de $[X = a]$, $[X \leq a]$, $[X > a]$ (où $a \in \mathbb{R}$).

4 # Si X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, alors la formule de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est :

5 # Comment interpréter $\mathbb{E}(X)$?

6 # Formule de Koenig-Huygens :

7 # La fonction de répartition de X, notée F_X, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

8 # Formule des probabilités totales donnant $\mathbb{P}(B)$ avec $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements :

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé. Commençons par définir, dans ce nouveau cadre probabiliste, la notion de variable aléatoire :

Définition 1 - Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

☞ Pour info...

Dans le cas d'un univers fini, la condition "$\forall x \in \mathbb{R}$, $\{w \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$" n'était pas mentionnée pour définir une VA.
En effet, dans ce cas-là, nous travaillions avec $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$... et comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\}$ est bien une partie de Ω, cette condition était toujours vérifiée !

I Variable aléatoire discrète : définitions & exemples

Définition 2 - Variable aléatoire discrète

X est une variable aléatoire **discrète** lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

☞ Rappel...

Dénombrable signifie

Exemples 1

Dans chaque cas, donnons l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire et précisons si c'est une variable aléatoire discrète ou non.

E1 On lance trois fois de suite, de façon indépendante, une pièce équilibrée et on note X le nombre de PILE obtenus.

E2 On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'un dé cubique équilibré et on note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier 6.

E3 On note T la variable aléatoire donnant la taille, en cm, d'individus choisis au hasard dans la rue.

Petite remarque

Il serait également possible que I soit un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, mais nous n'en rencontrons pas.

Tout ce que nous verrons a déjà été vu dans le cas où $X(\Omega)$ est fini ; les résultats seront donc formulés dans le cas où $X(\Omega)$ est dénombrable. Dans toute la suite, X désignera une variable aléatoire discrète.

Définition 3 - Loi de probabilité d'une VA discrète

La **loi de probabilité de X** est l'application :

$$\mathbb{P}_X : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X=x]) \end{array} \right.$$

Autrement dit, la loi de probabilité de X est la donnée de $X(\Omega)$ et de toutes les $\mathbb{P}([X = x])$ pour $x \in X(\Omega)$.

Un premier résultat naturel, déjà vu dans le cas des VA finies, et qui se généralise donc :

Propriétés 1 - SCE associé à une variable aléatoire

P1# La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements associé à la variable aléatoire X.

P2# La série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x])$ converge et sa somme est égale à 1.

À retenir...

C'est le sce naturel induit par une VA.

★ Démonstration : Analogue à celle vue sur les variables aléatoires finies, P2 étant une conséquence de P1 d'après les propriétés sur $\mathbb{P}$. ★

Petite remarque

Si I est un ensemble fini, la série est en réalité une somme finie. Ce sera également le cas des autres séries du cours. Nous ne le mentionnerons pas toujours, puisque l'étude des VA à support fini a déjà été fa[...] 11.

Exemples 2

E1 **Donnons la loi de la variable aléatoire X (Exemples 1 - E1) :**

☞ Pour info...

Cette loi sera revue dans le chapitre 21 : c'est la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$.

E2 On effectue une succession infinie de tirages avec remise dans une urne composée de 20% de balles noires et 80% de balles blanches. On note Y_1 (resp. Y_2) la variable aléatoire égale au nombre de balles blanches tirées avant l'obtention de la première (resp. deuxième) balle noire.
Déterminons la loi de Y_1 et celle de Y_2.

✓ Rigueur !
Il est important, comme dans l'exemple précédent de définir clairement les "bons" évènements et d'écrire $[Y_1 = n]$ à l'aide de ceux-là.

Réciproquement, un résultat qui sera ponctuellement utile, et que nous admettons :

Propriété 2

Si $(p_i)_{i\in I}$ est une suite positive telle que la série $\sum_{i\in I} p_i$ est convergente et de somme égale à 1, alors pour toute suite (x_i) de réels, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X tels que :

- $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$
- $\forall i \in I,\ \mathbb{P}([X = x_i]) = p_i$.

Exemple 3

Soit (p_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $ptn \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. **Démontrons que cette suite définit une loi de probabilité.**

☞ **Rappel...**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$$

Propriétés 3

Notons F_X la fonction de répartition de X. On a :

P1# $\forall x \in \mathbb{R}$, ... $\leq F_X(x) \leq$ ......

P2# F_X est croissante sur $\mathbb{R}$

P3# $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) =$ ...... et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) =$ ......

P4# Pour tout $x \in X(\Omega)$, F_X est continue à droite en x et admet une limite finie à gauche en x.

Petite remarque

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est donc toujours *continue par morceaux* sur $\mathbb{R}$.

★ Démonstration :

P1# Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$, on a $F_X(x) \in [0;1]$.

P2#

★

Et, de la même façon que dans le chapitre 12 :

Propriété 4

La fonction de répartition caractérise la loi.
Autrement dit, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors :

X et Y ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction de répartition.

Exemples 4

E1 **Représentons la fonction de répartition de la variable aléatoire X (Exemples 2 - E1).**

☞ **Pour info...**

Cette fonction de répartition est constante par morceaux : cela caractérise les VA discrètes... Également, le "saut" en x donnent la valeur de $\mathbb{P}([X = x])$.

E2 **Déterminons la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_1 (Exemples 2 - E2)**

E3 Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Notons F_X sa fonction de répartition. Soit $k \in X(\Omega)$.
Exprimons $\mathbb{P}([X = k])$ en fonction de F_X.

II Transformation d'une variable aléatoire discrète

Considérons ici X une variable aléatoire et g une application définie sur $X(\Omega)$, à valeurs réelles. Nous pouvons ainsi définir $Y = g \circ X = g(X)$, et on admet que l'on a ainsi défini une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "Y"'] & X(\Omega) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

L'objectif est d'étudier Y et donc, de commencer par déterminer sa loi de probabilité...

Exemples 5

E1 On considère la variable aléatoire G dont la loi est définie par :

valeurs de G	-1	0	1	2
probabilités	$0,5$	$0,1$	$0,2$	$0,2$

Donnons la loi de $2G+1$:

Donnons la loi de G^2 :

E2 Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+$ et $g : x \longmapsto \ln(x)$, alors $Y = \ln(X)$.

- On a :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (g \circ X)(\Omega) \\ &= g\big(X(\Omega)\big) \\ &= \Big\{g(x) \ / \ x \in X(\Omega)\Big\} \\ &= \Big\{\ln(x) \ / \ x \in X(\Omega)\Big\} \end{aligned}$$

- Soient $y \in Y(\Omega)$ et $\omega \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} \omega \in [Y = y] &\iff Y(\omega) = y \\ &\iff \ln(X(\omega)) = y \\ &\iff X(\omega) = e^y \quad \text{injectivité de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}$$

D'où :

$$[Y = y] = [X = e^y]$$

Et par conséquent :

$$\mathbb{P}([Y = y]) = \mathbb{P}([X = e^Y])$$

✍ Rédaction

On peut aussi travailler directement sur l'égalité d'évènements :

$[Y = y] = [\ln(X) = y] = [X = e^y]$

Nous avons ainsi exprimé la loi de Y en fonction de celle de X, supposée connue.

E3 Si $g : x \longmapsto |x|$, alors $Y = |X|$. Et on a ainsi :

- $Y(\Omega) = (g \circ X)(\Omega) = g\big(X(\Omega)\big) = \big\{g(x) \,/\, x \in X(\Omega)\big\} = \big\{|x| \,/\, x \in X(\Omega)\big\}$.
- Soit $y \in Y(\Omega)$. **Exprimons $\mathbb{P}([Y = y])$ en fonction de la loi de X :**

III Espérance & variance

Avant de rentrer dans les détails, une définition et une propriété sur les séries :

Définition 4 - Série absolument convergente

On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Petite remarque

Si (u_n) est à termes positifs, CV et CVA sont donc équivalentes.

Propriété 5 - lien CVA / CV

La convergence absolue implique la convergence.
Autrement dit, si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

✘ Attention !

La réciproque est fausse : une série peut être convergente sans l'être absolument...
Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est CV (chapitre 14), mais pas ACV.

★ Démonstration : Soit (u_n) une suite telle que $\sum u_n$ est absolument convergente. Définissons les suites (v_n) et (w_n) par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } u_n < 0 \end{cases} \quad ; \quad w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \geq 0 \\ -u_n & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

En gros...

(v_n) est la "partie positive" de (u_n) et (w_n) sa "partie négative"...

De sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n - w_n$$

On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq v_n \leq |u_n| \;\; ; \;\; 0 \leq w_n \leq |u_n|$$

Or la série $\sum u_n$ est absolument convergente, c'est à dire que $\sum |u_n|$ est convergente.
Par critère de comparaison des séries à terme général positif, on obtient alors que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes.
Et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - w_n$, la série $\sum u_n$ est une combinaison linéaire de séries convergentes ; elle est donc convergente.
Conclusion : si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente. ★

III.1 Espérance...

Définition 5 - Espérance

On dit que la variable aléatoire X admet une **espérance** lorsque la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X = x])$ *est absolument convergente*.
Dans ce cas, **l'espérance de X**, notée $\mathbb{E}(X)$ est la somme de cette série.

Pourquoi ?

Pourquoi imposer la convergence absolue ?

À retenir...

En particulier, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, la convergence absolue de $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X = n])$ équivaut à sa convergence simple ; et, si $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X = n])$ est convergente, alors : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([X = n])$.

Rappelons les propriétés sur l'espérance, déjà vues dans le cas fini :

Propriétés 6

Soient X et Y sont deux variables aléatoires discrètes *admettant une espérance*. On a :

- **P1#** Si X est une variable aléatoire constante égale à m, alors $\mathbb{E}(X) = m$.
- **P2#** Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + bY$ admet une espérance et : $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ *(linéarité)*
- **P3#** Si X est à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. *(positivité)*

★ Démonstration : A légèrement adapter dans le cas d'une série, mais identique à celles vues dans le chapitre 12. ★

Exemples 6

E1 **Déterminons l'espérance de la variable aléatoire G (Exemples 5 - E1).**

Important ! Toutes les variables aléatoires finies admettent une espérance.

Par linéarité de l'espérance, on en déduit : $\mathbb{E}(2G + 1) =$

E2 **La variable aléatoire Y_1 (Exemples 2 - E2) admet-t-elle une espérance ? Si oui, calculons-la.**

✍ Rédaction Attention à la rédaction ! On reprendra celles vues sur les séries...

E3 **La variable aléatoire Z (Exemples 4 - E3) admet-t-elle une espérance ? Si oui, calculons-la.**

Cas d'une variable aléatoire $Y = g(X)$...

Rappelons et généralisons ce qui avait été vu dans le chapitre 12...

Théorème 1 - de transfert

La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}([X = x])$ est absolument convergente et dans ce cas $\mathbb{E}(g(X))$ est la somme de cette série.

En gros...
Ce théorème nous dispense de déterminer la loi de $Y = g(X)$, car le calcul de son espérance ne nécessite pas de connaître les valeurs de $\mathbb{P}([Y = y_i])$.

★ Démonstration : Théorème admis. ★

À retenir...
En particulier, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si la série $\sum_{n \geq 0} n^2 \mathbb{P}([X = n]$ est (absolument) convergente, alors :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}([X = n])$$

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire $Y = g(X)$:**
ON UTILISE LE THÉORÈME DE TRANSFERT !

Exemple 7

Montrons que la variable aléatoire Y_1^2 (Exemples 2 - E2 & Exemples 6 - E2) admet une espérance et calculons-la.

III.2 Variance & écart-type...

Définition 6 - Moments d'une variable aléatoire

Soit $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un **moment d'ordre r** lorsque X^r admet une espérance.
Dans ce cas, le moment d'ordre r est $\mathbb{E}(X^r)$.

Petite remarque
Le moment d'ordre 1 est l'espérance...
En pratique, seul le moment d'ordre 2 nous intéressera... et on le calculera à l'aide du théorème de transfert !

Exemple 8

Dans l'exemple précédent, on a vu que Y^2 admet une espérance ; autrement dit, la variable aléatoire Y admet un moment d'ordre 2, égal à

Théorème 2

Soient $q, r \in \mathbb{N}$ distincts tels que $q < r$.
Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.

Idée de la démonstration
On suppose que $\sum_{x\in X(\Omega)} |x^r|\mathbb{P}([X=x])$ pour établir que a série $\sum_{x\in X(\Omega)} |x^q|\mathbb{P}([X=x])$ CV... en utilisant le critère de comparaison sur les séries à terme général positif.

★ **Démonstration** : Supposons que X admette un moment d'ordre r.
Ainsi, par théorème de transfert, la série $\sum_{x\in X(\Omega)} |x^r|\mathbb{P}([X=x])$ est convergente.

Soit $x \in X(\Omega)$.

- Si $|x| \leq 1$:
  Alors, par croissance de la fonction $t \longmapsto t^q$ sur $\mathbb{R}^+$, on a :
  $$|x|^q \leq 1$$
- Si $|x| > 1$:
  Mais :
  $$q < r$$
  D'où, en multipliant par $\ln(|x|) > 0$ (car $|x| > 1$) :
  $$q\ln(|x|) < r\ln(|x|)$$
  Et, par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:
  $$\exp\left(q\ln(|x|)\right) < \exp\left(r\ln(|x|)\right)$$
  Autrement dit :
  $$|x|^q < |x|^r$$

Dans les deux cas, on obtient :
$$|x|^q \leq 1 + |x|^r$$
Or, $\mathbb{P}([X=x]) \geq 0$, d'où :
$$|x|^q\mathbb{P}([X=x]) \leq \mathbb{P}([X=x]) + |x|^r\mathbb{P}([X=x])$$
On a ainsi :

- $\forall x \in X(\Omega),\ 0 \leq |x|^q\mathbb{P}([X=x]) \leq \mathbb{P}([X=x]) + |x|^r\mathbb{P}([X=x])$
- Mais :
  - la série $\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x])$ est une série convergente (de somme égale à 1, car $\left([X=x]\right)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements),
  - la série $\sum_{x\in X(\Omega)} |x|^r\mathbb{P}([X=x])$ est une série convergente (car X admet un moment d'ordre r, et par théorème de transfert).

  Par conséquent : la série $\sum_{x\in X(\Omega)} \left(\mathbb{P}([X=x]) + |x|^r\mathbb{P}([X=x])\right)$ est convergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{x\in X(\Omega)} |x|^q\mathbb{P}([X=x])$ est également convergente. Autrement dit, par théorème de transfert, X admet un moment d'ordre q.
Conclusion : si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q. ★

Définitions 7 - Variance & écart-type

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.

D1# On dit que la variable aléatoire X admet une **variance** lorsque $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ admet une espérance.
Dans ce cas, on note $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$ (*qui est donc un nombre positif*).

D2# Si X admet une variance, alors on note $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$: c'est l'**écart-type** de X.

☞ Pour info...
Puisque $\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2 \geq 0$, les cas où X n'admet pas de variance sont les cas où cette variance est *infinie* : les valeurs de X qui ont un poids important sont trop étalées...

A nouveau, la petite formule qui fait plaisir pour le calcul de la variance :

Théorème 3 - Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.
X admet une variance si, et seulement si, elle admet un moment d'ordre 2; et dans ce cas :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Petite remarque
D'après les théorèmes 2 et 3 : si X admet une variance, alors elle admet une espérance (heureusement, vue la formule de KH).
La réciproque est utile : si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.

★ **Démonstration** : Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. La formule a déjà été démontrée dans le chapitre 12 (découle immédiatement de la linéarité de l'espérance). Démontrons donc l'équivalence.
Commençons déjà par développer $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$:
$$\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$
Par double-implication...

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que X admette une variance. D'après l'égalité ci-dessus, on obtient :
$$X^2 = \left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 + 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$
Mais X admet une variance, donc $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ admet une espérance; tout comme X et $\mathbb{E}(X)^2$ (qui est une variable aléatoire constante).
Donc X^2 est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance : par conséquent, elle admet également une espérance (Propriétés 5 - P2).
Autrement dit, X admet un moment d'ordre 2.

$\Leftarrow$ Supposons que X admette un moment d'ordre 2.
On avait :

$$\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$

Mais comme X admet un moment d'ordre 2, X^2 admet une espérance ; ce qui est également le cas de X et $\mathbb{E}(X)$.
Donc $\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance : par conséquent, elle admet également une espérance. Autrement dit, X admet une variance.

★

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour étudier/calculer une variance :**
on regarde si X admet un moment d'ordre 2 (avec le théorème de transfert), puis deux cas :

- si non, alors X n'a pas de variance ;
- si oui, alors on calcule $\mathbb{E}(X^2)$, puis on calcule $\mathbb{V}(X)$ avec la formule de Koenig-Huygens.

Important !
Parfois, l'énoncé fait calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$ puis demander d'en déduire $\mathbb{V}(X)$... Il suffit de remarquer que : $\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, pour ensuite avoir $\mathbb{E}(X^2)$ et enfin $\mathbb{V}(X)$.

Exemples 9

E1 **Calculons la variance de G (Exemples 4 - E1 & Exemples 6 - E1).**

Petite remarque
Toutes les variables aléatoires finies admettent un moment d'ordre quelconque et donc une espérance et une variance (car ce sont alors des sommes finies).

E2 La variable aléatoire Y_1 (Exemples 2 - E2, Exemples 6 - E2, Exemple 7) admet un moment d'ordre 2. Par conséquent, elle admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_1) &= \mathbb{E}(Y_1^2) - \mathbb{E}(Y_1)^2 \\ &= \end{aligned}$$

E3 La variable aléatoire Z (Exemples 6 - E3) n'admet pas d'espérance ; elle n'admet donc pas de moment d'ordre et pas non-plus de variance.

Rappelons les propriétés déjà vues sur la variance :

Propriétés 7

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une variance. On a :

P1# $X+Y$ admet une variance et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\big(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\big)$

P2# Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $aX+b$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X) \quad ; \quad \sigma(aX+b) = \text{............}$$

P3# $\mathbb{V}(X) = 0$ si, et seulement si, X ....

Vocabulaire
La variable aléatoire X est

★ Démonstration : Découlent des propriétés sur l'espérance et éventuellement de la formule de Koenig-Huygens... Comme dans le cas fini.

★

III.3 Variable aléatoire centrée, réduite, centrée & réduite.

Définitions 8 - VA centrée / réduite

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance.

D1# On dit que X est **centrée** lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.

D2# On dit que X est **réduite** lorsque $\sigma(X) = 1$.

Propriété 8

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance et si $\mathbb{V}(X) \neq 0$, alors :

- la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée ;
- la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

✎ **Notation**
Si $\sigma(X) \neq 0$, on note parfois $X^* = \dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

★ Démonstration : Les propriétés sur l'espérance et la variance permettent de démontrer sans effort ces deux résultats...

★

IV Indépendance de variables aléatoires

Pour terminer, une définition qui n'est au programme qu'en deuxième année, mais que nous aurons tout de même l'occasion de rencontrer :

Définitions 9 - Indépendance de VA

D1# Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.
On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque :

$$\forall \mathrm{I}, \mathrm{J} \subset \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([\mathrm{X} \in \mathrm{I}] \cap [\mathrm{Y} \in \mathrm{J}]\big) = \mathbb{P}([\mathrm{X} \in \mathrm{I}]) \times \mathbb{P}([\mathrm{Y} \in \mathrm{J}])$$

D2# Soient $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $(\mathrm{X}_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ une suite de n variables aléatoires discrètes.
On dit que les variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque :

$$\forall \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_n \subset \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [\mathrm{X}_k \in \mathrm{I}_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([\mathrm{X}_k \in \mathrm{I}_k])$$

D3# Soit $(\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes.
On dit que la suite $(\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes.

Petite remarque

On a en particulier, pour tous $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ et $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$: $\mathbb{P}\big([\mathrm{X} = x] \cap [\mathrm{Y} = y]\big) = \mathbb{P}([\mathrm{X} = x]) \times \mathbb{P}([\mathrm{Y} = y])$.

En gros...

Si X et Y sont indépendantes, alors tout évènement lié à l'une est indépendant de tout évènement lié à l'autre.

Propriété 9 - Lemme des coalitions

Soient $n \in [\![3;+\infty[\![$ et $(\mathrm{X}_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ une suite de n variables aléatoires discrètes.
Si les variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont indépendantes, alors pour tout $p \in [\![2;n-1]\!]$, toute variable aléatoire fonction des $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $\mathrm{X}_{p+1}, \ldots, \mathrm{X}_n$.

Exemple 10

Soit $p \in]0;1[$. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{X}_n(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathbb{P}([\mathrm{X}_n = 1]) = p$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$. On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{S}_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.

Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([\mathrm{S}_n = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$