Exercices du chapitre 18
Variables aléatoires discrètes

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Probabilités manquantes

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. On sait de plus que les évènements $[X=0]$ et $[X=1]$ ont même probabilité. Déterminer cette probabilité.

Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, la famille $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}([X=n])$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$$

Mais :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([X=1]) = \frac{2}{3}$$

Mais $\mathbb{P}([X=0]) = \mathbb{P}([X=1])$...

Conclusion : $\mathbb{P}([X=0]) = \mathbb{P}([X=1]) = \frac{1}{3}$.

●○○○ Exercice 2 - Paramètre à déterminer

Soit X une variable aléatoire telle que :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\exists a \in \mathbb{R}_*^+ \ /\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=n]) = a\frac{1}{3^n}$

Déterminer a.

Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la famille $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}([X=n])$ est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$$

Mais :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= a\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) \\ &= a\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}a\end{aligned}$$

Conclusion : $a = 2$.

●○○○ Exercice 3 - Avec la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, dont la fonction de répartition vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_X(n) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Déterminer la loi de X.

On a déjà $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$.

- On sait que :

$$[X \leq n] = [X=n] \cup [X<n]$$

Mais X est à valeurs entières, donc : $[X<n] = [X \leq n-1]$.
D'où :

$$[X \leq n] = [X=n] \cup [X \leq n-1]$$

➠Réflexe !
Quand on veut retrouver la loi à partir de la fonction de répartition, on pense à écrire cette égalité d'évènements...

- Or, les évènements $[X = n]$ et $[X \leq n-1]$ sont incompatibles, d'où :
$$\mathbb{P}([X \leq n]) = \mathbb{P}([X = n]) + \mathbb{P}([X \leq n-1])$$

Ainsi :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = n]) &= \mathbb{P}([X \leq n]) - \mathbb{P}([X \leq n-1]) \\
&= F_X(n) - F_X(n-1) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \qquad n, n-1 \in \mathbb{N}, \text{ car } n \in \mathbb{N}^* \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Conclusion : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = n]) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3}$.

●○○○ Exercice 4

On dispose de trois urnes numérotées 1,2 et 3 constituées de la sorte :

- l'urne 1 contient deux boules blanches
- l'urne 2 contient une boule blanche et une boule rouge
- l'urne 3 contient deux boules rouges

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne au hasard, puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule avec remise, jusqu'à l'éventuelle apparition d'une boule blanche.
Pour $k \in \{1; 2; 3\}$, on note U_k l'évènement : "on choisit l'urne k".
On considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On attribue la valeur 0 à X si l'on n'obtient jamais de boule blanche.

1. 1.a. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simul_X()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

Les programmes sont regroupés à la dernière question.

1.b. En déduire un programme `Python` permettant d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 1000 réalisations de X.

Les programmes sont regroupés à la dernière question.

2. 2.a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

Justifions, par double-inclusion, que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$\boxed{\subset}$ Puisque X désigne le rang d'apparition de la première balle blanche et que X prend la valeur 0 si aucune balle blanche n'est tirée, on a déjà $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que l'évènement $[X = n]$ est non vide.

- Si $n = 0$:
L'issue consistant à choisir l'urne 3 et à tirer une infinité de balles rouges appartient à l'évènement $[X = 0]$.
- Si $n = 1$:
L'issue consistant à choisir l'urne 2 puis à obtenir une balle blanche au premier tirage appartient à l'évènement $[X = 1]$.
- Si $n \geq 2$:
L'issue consistant à choisir l'urne 2 puis à tirer $n-1$ balles rouges puis une balle blanche appartient à l'évènement $[X = n]$.

On a ainsi démontré : $\forall n \in \mathbb{N}, [X = n] \neq \emptyset$. Autrement dit :
$$\mathbb{N} \subset X(\Omega)$$

> ☞ **Rappel...**
> $X(\Omega)$ est l'ensemble image de Ω par X : c'est l'ensemble de toutes les images des issues de Ω.
> Pour montrer que $\mathbb{N} \subset X(\Omega)$, il faut justifier que chaque entier n est l'image d'au moins une issue par X... Pour cela, il suffit de trouver une issue dont l'image est n.

Conclusion : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

2.b. Déterminer $\mathbb{P}_{U_1}([X = 1])$, $\mathbb{P}_{U_2}([X = 1])$ et $\mathbb{P}_{U_3}([X = 1])$.

- Supposons l'évènement U_1 réalisé.
Les tirages s'effectuent alors dans l'urne 1, qui ne contient que deux balles blanches. Par conséquent, le premier tirage fournira une balle blanche, et ainsi, l'évènement $[X = 1]$ sera réalisé.
D'où :
$$\mathbb{P}_{U_1}([X = 1]) = 1$$
- Supposons l'évènement U_2 réalisé.
Les tirages s'effectuent alors dans l'urne 2, qui contient une balle blanche et une balle rouge. L'évènement $[X = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on tire directement la balle blanche au premier tirage.
D'où, par équiprobabilité du choix des balles :
$$\mathbb{P}_{U_2}([X = 1]) = \frac{1}{2}$$
- Supposons l'évènement U_3 réalisé.
Les tirages s'effectuent alors dans l'urne 3, qui ne contient que deux balles rouges. Il est alors impossible de tirer une balle blanche.
D'où :
$$\mathbb{P}_{U_2}([X = 1]) = 0$$

2.c. A l'aide de la formule des probabilités totales, calculer $\mathbb{P}([X = 1])$.

D'après la formule des probabilités totales avec (U_1, U_2, U_3) comme système complet d'évènements, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = 1]) &= \mathbb{P}(U_1 \cap [X = 1]) + \mathbb{P}(U_2 \cap [X = 1]) + \mathbb{P}(U_3 \cap [X = 1]) \qquad \mathbb{P}(U_1), \mathbb{P}(U_2), \mathbb{P}(U_3) \text{ sont non nulles} \\
&= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}([X = 1]) + \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}_{U_2}([X = 1]) + \mathbb{P}(U_3)\mathbb{P}_{U_3}([X = 1]) \qquad \text{question précédente et équiprobabilité du choix de l'urne} \\
&= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$. Démontrer que $\mathbb{P}([X=j]) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$.

D'après la formule des probabilités totales avec (U_1, U_2, U_3) comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X=j]) & = & \mathbb{P}(U_1 \cap [X=j]) + \mathbb{P}(U_2 \cap [X=j]) + \mathbb{P}(U_3 \cap [X=j]) & \big\} \ \mathbb{P}(U_1), \mathbb{P}(U_2), \mathbb{P}(U_3) \text{ sont non nulles} \\ & = & \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}([X=j]) + \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}_{U_2}([X=j]) + \mathbb{P}(U_3)\mathbb{P}_{U_3}([X=j]) & \big\} \ \text{question précédente et équiprobabilité du choix de l'urne} \end{array}$$

Or :

- Comme à la question précédente : $\mathbb{P}_{U_3}([X=j]) = 0$.
- Supposons l'évènement U_1 réalisé.
  Les tirages s'effectuent alors dans l'urne 1, qui ne contient que deux balles blanches. Par conséquent, le premier tirage fournira une balle blanche, et ainsi, puisque $j \geq 2$, il est impossible d'obtenir la première balle blanche au j-ième tirage.
  D'où :
  $$\mathbb{P}_{U_1}([X=j]) = 0$$
- Supposons l'évènement U_2 réalisé.
  Les tirages s'effectuent alors dans l'urne 2, qui contient une balle blanche et une balle rouge. Par conséquent, l'évènement $[X=j]$ est réalisé si, et seulement si, on des balles rouges des tirages 1 à $j-1$, puis une balle blanche au tirage j.
  D'où, par indépendance des tirages (car effectués avec remise) et équiprobabilité du choix de la balle :
  $$\mathbb{P}_{U_2}([X=j]) = \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X=j]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Conclusion : $\forall j \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([X=j]) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$.

4. Déduire de ce qui précède la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$.

Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, la famille $\big([X=j]\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} \mathbb{P}([X=j])$ est convergente et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=j]) = 1$$

Mais :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=j]) & = & \mathbb{P}([X=1]) + \displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j \\ & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2}\right) \\ & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \dfrac{1}{2}\right) \\ & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \\ & = & \dfrac{2}{3} \end{array}$$

✘ Attention !
Deux expressions différentes : selon que $j = 1$ ou $j \geq 2$...

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{3}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=0]) = \dfrac{1}{3}$.

Petite remarque
On remarque que $\mathbb{P}([X=0]) = \mathbb{P}(U_3)$... Normal, car si $\mathbb{P}_{U_2}([X=0]) = 0$...

5. Justifier que X admet une espérance et une variance et les calculer.

- **Espérance.**
  - On sait que :

    $$\begin{array}{lll} X \text{ admet une espérance} & \text{si, et seulement si,} & \text{la série} \displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n]) \text{ est absolument convergente} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{la série} \displaystyle\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X=n]) \text{ est convergente, car il s'agit d'une série à} \\ & & \text{terme général positif} \end{array}$$

  - Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

    $$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) & = & 0 + \mathbb{P}([X=1]) + \displaystyle\sum_{n=2}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) \\ & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{array}$$

    Or, $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une troncature d'une série géométrique convergente.

    Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

◇ On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-1\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X)=1$.

- **Variance.**
  ◇ D'après le théorème de transfert :

X^2 admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} n^2\mathbb{P}([X=n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

◇ Soit $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n^2\mathbb{P}([X=n]) &= 0+\mathbb{P}([X=1])+\sum_{n=2}^{N}(n(n-1)+n)\mathbb{P}([X=n]) && \text{linéarité de la somme} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2^2}\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{2}\in]-1;1[$, donc les séries $\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ sont des troncatures de séries géométriques convergentes. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} n^2\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

◇ On en déduit que X admet un moment d'ordre 2, et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2^2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && \text{voir calcul de l'espérance} \\ &= 1+\frac{1}{3}\frac{1}{2^2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= 1+\frac{1}{3}\frac{1}{2^2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} \\ &= 1+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

◇ Ainsi, X admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 \\ &= 1+\frac{4}{3}-1 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une variance et $\mathbb{V}(X)=\frac{4}{3}$.

6. Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.

```python
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul_X():
    n=rd.randint(1,4)
    if n==1:
        return 1
    elif n==3:
        return 0
    else:
        p=rd.random()
        c=1
        while p>1/2:
            p=rd.random()
            c=c+1
        return c

Lbornes=[-0.5+k for k in range(0,19)]
L=[simul_X() for k in range(1,10001)]
plt.hist(L,Lbornes,density=True,edgecolor='k')
```

```
plt.show()

E=sum(L)/len(L)
L2=[x**2 for x in L]
M=sum(L2)/len(L2)
V=M-E**2
print(E,V)
```

●●○○ Exercice 5 - Nombre d'échecs avant premier et deuxième succès

On effectue une succession infinie de tirages avec remise dans une urne composée de 25% de balles noires et 75% de balles blanches. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de balles blanches tirées avant l'obtention de la première (resp. deuxième) balle noire. On attribue à X la valeur -1 si aucune balle noire n'est tirée ; et à Y la valeur -1 si au plus une balle noire est tirée.
On note également, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k l'évènement "obtenir une balle blanche lors du tirage k".

1. Loi de X.

1.a. Donner $X(\Omega)$.

$X(\Omega) = [\![-1;+\infty[\![$.

1.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}([X = n])$.

- Si $n = 0$:

$[X = 0n]$ est réalisé	si, et seulement si,	on obtient aucune balle blanche avant la première noire
	si, et seulement si,	on obtient une balle noire au premier tirage

  D'où :
  $$[X = 0] = \overline{B_1}$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{4}$$

- Si $n \geq 1$:

$[X = n]$ est réalisé	si, et seulement si,	on obtient n balles blanches avant la première noire
	si, et seulement si,	on obtient une balle blanche des tirages 1 à n, puis une balle noire au tirage $n+1$

  D'où :
  $$[X = n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \cap \overline{B_{n+1}}$$
  Ainsi, par indépendance des lancers, on obtient :
  $$\mathbb{P}([X = n]) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{4}$$

Les deux cas peuvent se regrouper...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, n\ \mathbb{P}([X = n]) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{4}$.

1.c. En déduire $\mathbb{P}([X = -1])$.

Puisque $X(\Omega) = [\![-1;+\infty[\![$, la famille $\big([X = n]\big)_{n \in [\![-1;+\infty[\![}$ est un système complet d'évènements. Ainsi, la série $\sum_{n \geq -1} \mathbb{P}([X = n])$ est convergente et : $\sum_{n=-1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.

Or :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Petite remarque

L'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])$ a bien du sens. En effet, puisque $\sum_{n \geq -1} \mathbb{P}([X = n])$ est convergente, il en est de même de a série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}([X = n])$, qui en est une troncature.

Par conséquent :
$$\mathbb{P}([X = -1]) = 0$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X = -1]) = 0$.

1.d. Justifier que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

- On sait que :

X admet une espérance	si, et seulement si,	la série $\sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente
	si, et seulement si,	la série $\sum_{n \geq -1} n\mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente
	si, et seulement si,	la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente (car série et troncature ont même nature, ou car $\mathbb{P}([X = -1]] = 0$)
	si, et seulement si,	la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}([X = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=0}^{N} n\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{4}\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Or, $\frac{3}{4} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=-1}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \quad \mathbb{P}([X=-1])=0 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{1}{4}\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X)=3$.
En répétant un grand nombre de fois cette expérience, on obtiendra en moyenne 3 balles blanches avant l'apparition de la première balle noire.

1.e. Justifier que X admet une variance et la calculer.

- Par théorème de transfert :

X^2 admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq -1} n^2\mathbb{P}([X=n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=-1}^{N} n^2\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=0}^{N} n^2\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N} n^2\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N}\Big(n(n-1)+n\Big)\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{linéarité de la somme} \\ &= \frac{3^2}{4^3}\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \frac{3}{4^2}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Or, $\frac{3}{4} \in]-1;1[$, donc les séries $\sum_{n\geq 0} n(n-1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ et $\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ sont des séries géométriques convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} n^2\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

- On en déduit que X^2 admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=-1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}([X=n]) \quad \mathbb{P}([X=-1])=0 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{3^2}{4^3}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \frac{3}{4^2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3^2}{4^3}\frac{2}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^3} + \mathbb{E}(X) \\ &= 18+3 \\ &= 21\end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens, X admet une variance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \Big(\mathbb{E}(X)\Big)^2 \\ &= 21-9 \\ &= 12\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une variance et $\mathbb{V}(X)=12$.

2. **Loi de Y.**

2.a. Donner $Y(\Omega)$.

$Y(\Omega) = [\![-1;+\infty[\![$.

2.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}([Y = n])$.

- Si $n = 0$:
  On a :
  $$[Y = 0] = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$$
  Puis, par indépendance des lancers :
  $$\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{1}{16}$$

- Si $n \geq 1$:

  [Y = n] est réalisé si, et seulement si, on obtient n balles blanches avant l'apparition de la deuxième balle noire
  si, et seulement si, on obtient 1 balle noire et n balles blanches sur les lancers 1 à $n+1$, puis une balle noire au lancer $n+2$

  D'où :
  $$\begin{aligned}[Y = n] &= \left(\overline{B_1} \cap B_2 \ldots \cap B_{n+1} \cap \overline{B_{n+2}}\right) \\ &\quad \cup \left(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap \ldots \cap B_{n+1} \cap \overline{B_{n+2}}\right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \cup \left(B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap \overline{B_{n+1}} \cap \overline{B_{n+2}}\right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{n+1} \left(\overline{B_k} \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} B_i \right) \cap \overline{B_{n+2}} \right)\end{aligned}$$
  D'où, par incompatibilité deux à deux des évènements en jeu dans l'union (la première balle noire ne pouvant être obtenue à deux rangs différents) :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = n]) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(\overline{B_k} \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} B_i \right) \cap \overline{B_{n+2}} \right) \quad \text{par indépendance des lancers} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{3}{4} \right) \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= (n+1) \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^n\end{aligned}$$

Les deux cas peuvent se regrouper...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = (n+1) \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2.c. n admet que, de la même façon qu'à la question 1.c., $\mathbb{P}([Y = -1]) = 0$. Justifier que Y admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

- On sait que :

  Y admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \in Y(\Omega)} n\mathbb{P}([Y = n])$ est absolument convergente
  si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq -1} n\mathbb{P}([Y = n])$ est absolument convergente
  si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}([Y = n])$ est absolument convergente (car série et troncature ont même nature, ou $\mathbb{P}([Y = -1]) = 0$)
  si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}([Y = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif
  si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}([Y = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :
  $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([Y = n]) &= \sum_{n=0}^{N} n(n+1) \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{linéarité de la somme et changement d'indice } k = n+1 \\ &= \frac{1}{4^2} \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3}{4^3} \sum_{k=1}^{N+1} k(k-1) \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}\end{aligned}$$
  Or, $\frac{3}{4} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{k \geq 1} k(k-1) \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}$ est ne série géométrique convergente.
  Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}([Y = n])$ est convergente.

- On en déduit que Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{n=-1}^{+\infty} n\mathbb{P}([\mathrm{Y}=n]) && \mathbb{P}([\mathrm{Y}=-1])=0 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([\mathrm{Y}=n]) \\
&= \frac{3}{4^3}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \\
&= \frac{3}{4^3}\,\frac{2}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^3} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Conclusion : Y admet une espérance et $\mathbb{E}(\mathrm{Y})=6$.
En répétant un grand nombre de fois cette expérience, on obtiendra en moyenne 6balles blanches avant l'apparition de la deuxième balle noire.

3. Écrire deux fonctions Python permettant de simuler une réalisation des variables aléatoires X et Y.

```python
import numpy.random as rd

def simul_X():
    X=0
    while rd.random()<3/4:
        X=X+1
    return X

def simul_Y():
    Y=0
    c=0 #nombre de noires
    while c<2:
        while rd.random()<3/4:
            Y=Y+1
        c=c+1
    return Y
```

●●○○ Exercice 6 - Saut en hauteur

Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1,2,\dots,n,\dots$. Il ne peut tenter de passer la hauteur $(n+1)$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs $1,2,\dots,n$. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, si le sauteur peut tenter le n-ième saut, la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{1}{n}$.
Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : "le sauteur peut tenter et réussit son k-ième saut" et on note X la variable aléatoire donnant le numéro du dernier saut réussi. On attribue à X la valeur 0 si tous les sauts sont réussis.

1. Écrire une fonction Python telle que l'exécution de `simul_X()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```python
import numpy.random as rd

def simul_X():
    n=1
    while rd.random()<1/n:
        n=n+1
    return n-1
```

Petite remarque
Puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la boucle `while` s'arrêtera presque-sûrement.

✘ Attention !
n désigne le numéro du saut tenté... Donc le programme doit renvoyer $n-1$, qui sera bien le numéro du dernier saut réussi.

2. Déterminer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la valeur $\mathbb{P}([\mathrm{X}=n])$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   - On a :

$[\mathrm{X}=n]$ est réalisé si, et seulement si, le dernier saut réussi est le n-ième
si, et seulement si, les sauts 1 à n sont tentés et réussis et le $n+1$-ième est loupé

D'où :

$$[\mathrm{X}=n]=\left(\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{S}_k\right)\cap\overline{\mathrm{S}_{n+1}}$$

   - Ainsi, d'après la formule des probabilités composées, puisque $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{S}_k\right)\neq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{S}_k\right)\cap\overline{\mathrm{S}_{n+1}}\right) &= \mathbb{P}(\mathrm{S}_1)\times\mathbb{P}_{\mathrm{S}_1}(\mathrm{S}_2)\times\dots\times\mathbb{P}_{\mathrm{S}_1\cap\dots\cap\mathrm{S}_{n-1}}(\mathrm{S}_n)\times\mathbb{P}_{\mathrm{S}_1\cap\dots\cap\mathrm{S}_n}(\overline{\mathrm{S}_{n+1}}) \\
&= \frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\dots\times\frac{1}{n}\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!} \\
&= \frac{n}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

3. En déduire $\mathbb{P}([X=0])$.

D'après la question précédente et l'énoncé, on a $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Ainsi, la famille $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}([X=n])$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=n])=1$.

Or, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right) && \text{par télescopage}\\ &= 1-\frac{1}{(N+1)!}\end{aligned}$$

Mais : $\lim_{N\to+\infty} 1-\frac{1}{(N+1)!}=1$. Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X=n])=1$$

Important ! Il est également possible de travailler sur les sommes infinies... MAIS, la linéarité sur les sommes infinies n'est valable qu'en cas de convergence des séries en jeu. Il faut donc mentionner leur convergence, sinon, il manque clairement un argument !

Conclusion : $\mathbb{P}([X=0])=0$.

4. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

- On sait que :

X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) && \text{linéarité de la somme}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n!}-\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!} && \text{changement d'indice } k=n-1 \text{ dans la première somme}\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}-\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Or, la série $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}$ est une série exponentielle convergente ; et, d'après la question précédente, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(n+1)!}$ est également convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}\\ &= e-1\end{aligned}$$

Conclusion : X possède une espérance et $\mathbb{E}(X)=e-1$.

●●○○ Exercice 7 - Deux PILE consécutifs

On joue à PILE ou FACE avec une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux PILE consécutifs ; X prendra la valeur 0 si une telle combinaison n'apparaît jamais. Pour $n\in[\![2;+\infty[\![$, on note $p_n=\mathbb{P}([X=n])$.

1. Expliciter les évènements $[X=2]$, $[X=3]$, $[X=4]$ et donner leurs probabilités.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on note P_k l'évènement "obtenir PILE au k-ième lancer" et $F_k=\overline{P_k}$.

- L'évènement $[X=2]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient PILE aux lancers 1 et 2.
D'où :

$$[X=2]=P_1\cap P_2$$

Ainsi, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([X=2])=\frac{4}{9}$$

- On a :

$[X=3]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient le premier double-PILE aux lancers 2 et 3
si, et seulement si, on obtient FACE au premier lancer, puis PILE aux lancers 2 et 3

D'où :

$$[X=3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3$$

Ainsi, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([X=3]) = \frac{4}{27}$$

- De la même façon :

$$[X=4] = \left(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4\right) \cup \left(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4\right)$$

Or P_1 et F_1 sont incompatibles, donc $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$ et $F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$ également. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([[X=4]) & = & \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4\right) + \mathbb{P}\left(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4\right) & \text{par indépendance des lancers} \\ & = & \dfrac{4}{81} + \dfrac{8}{81} & \\ & = & \dfrac{12}{81} & \\ & = & \dfrac{4}{27} & \end{array}$$

2. A l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$,

$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$$

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec (F_1, P_1) comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X=n+2]) & = & \mathbb{P}\left(F_1 \cap [X=n+2]\right) + \mathbb{P}\left(P_1 \cap [X=n+2]\right) & \mathbb{P}(F_1) \text{ et } \mathbb{P}(P_1) \text{ sont non nulles} \\ & = & \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}([X=n+2]) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}([X=n+2]) & \\ & = & \dfrac{1}{3}\mathbb{P}_{F_1}([X=n+2]) + \dfrac{2}{3}\mathbb{P}_{P_1}([X=n+2]) & \end{array}$$

Ensuite :

- Supposons F_1 réalisé.
Dans ce cas :

$[X=n+2]$ est réalisé	si, et seulement si,	les lancers 2 à $n+2$ terminent par le premier double-PILE
	si, et seulement si,	on obtient le premier double-PILE au bout de $n+1$ lancers

☞ **Rappel...**
De 2 à $n+2$ inclus, il y a $n+2-2+1=n+1$ entiers.

D'où :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{F_1}([X=n+2]) & = & \mathbb{P}([X=n+1]) \\ & = & p_{n+1} \end{array}$$

- Supposons P_1 réalisé. Autrement dit, le premier lancer a donné PILE.
Puisque $n \geq 2$, on a $n+2 \geq 4$. Ainsi, il est impossible d'avoir un autre PILE au lancer 2.
Dans ce cas :

$[X=n+2]$ est réalisé	si, et seulement si,	on obtient FACE au lancer 2, puis les lancers 3 à n+2 terminent par le premier double-PILE

Notons alors $\widetilde{D_{n+2}}$ l'évènement "les lancers 3 à n+2 terminent par le premier double-PILE". Dans ce cas :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}_{P_1}([X=n+2]) & = & \mathbb{P}(F_2 \cap \widetilde{D_{n+2}}) & \text{par indépendance des lancers} \\ & = & \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(\widetilde{D_{n+2}}) & \\ & = & \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(\widetilde{D_{n+2}}) & \end{array}$$

Mais :

$\widetilde{D_{n+2}}$ est réalisé	si, et seulement si,	les lancers 3 à n+2 terminent par le premier double-PILE
	si, et seulement si,	on obtient le premier double-PILE au bout de n lancers

☞ **Rappel...**
De 3 à $n+2$ inclus, il y a n entiers.

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\widetilde{D_{n+2}}) & = & \mathbb{P}([X=n]) \\ & = & p_n \end{array}$$

D'où :

$$\mathbb{P}_{P_1}([X=n+2]) = \frac{1}{3}p_n$$

Conclusion : pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $p_{n+2} = \dfrac{1}{3}p_{n+1} + \dfrac{2}{9}p_n$.

3. En déduire, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, l'expression de p_n.

La suite $(p_n)_{n \geq 2}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{9} = 0$, dont les solutions sont $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{-1}{3}$.
Ainsi :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ p_n = \lambda\left(\frac{2}{3}\right)^n + \mu\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

Or, d'après la question **1.** : $p_2 = \dfrac{4}{9}$ et $p_3 = \dfrac{4}{27}$.
Mais :

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_2 & = & \dfrac{4}{9} \\ p_3 & = & \dfrac{4}{27} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{4}{9}\lambda + \dfrac{1}{9}\mu & = & \dfrac{4}{9} \\ \dfrac{8}{27}\lambda - \dfrac{1}{27}\mu & = & \dfrac{4}{27} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4\lambda + \mu & = & 4 \\ 8\lambda - \mu & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \dfrac{2}{3} \\ \mu & = & \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Par conséquent :

$$p_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

> **Conclusion :** $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$.

Petite remarque
En utilisant le sce $\left([X = n]\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$, on pourrait alors obtenir $\mathbb{P}([X=0]) = 0$.

4. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.
   - On sait que :

$$\begin{aligned} \text{X admet une espérance} \quad & \text{si, et seulement si,} \quad \text{la série} \sum_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n]) \text{ est absolument convergente} \\ & \text{si, et seulement si,} \quad \text{la série} \sum_{\substack{n\geq 0\\ n\neq 1}} n\mathbb{P}([X=n]) \text{ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif} \end{aligned}$$

   - Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=2}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) \quad \text{question précédente et linéarité de la somme} \\ &= \frac{2^2}{3^2}\sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{4}{3^2}\sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

   Or, $\frac{2}{3} \in]-1;1[$ et $\frac{-1}{3} \in]-1;1[$ donc les séries $\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$ sont des troncatures de séries géométriques convergentes.
   Par conséquent, la série $\sum_{\substack{n\geq 0\\ n\neq 1}} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.
   - On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{2^2}{3^2}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{4}{3^2}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2^2}{3^2}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{4}{3^2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2^2}{3^2}3^2 - \frac{4}{3^2}\frac{3^2}{4^2} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

> **Conclusion :** X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{15}{4}$.

5. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simul_X()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```python
import numpy.random as rd

def simul_X():
    c,d=0,0 # c compte les PILE consécutifs , d compte les lancers
    while c<2:
        d=d+1
        x=rd.random()
        if x<2/3:
            c=c+1
        else :
            c=0
    return d
```

●●○○ Exercice 8 - Jusqu'à la balle rouge, avec rajout de balles blanches

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec les règles suivantes :

- si on obtient la boule rouge, on arrête les tirages ;
- sinon, on remet la boule blanche tirée dans l'urne, on ajoute une boule blanche supplémentaire et on recommence.

On note T la variable aléatoire associée au nombre de tirages ainsi effectués. T prendra la valeur 0 si la balle rouge n'est jamais tirée.
Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: B_k l'évènement "tirer la balle blanche au tirage k" et $R_k = \overline{B_k}$.

1. Soit $i \in [\![2;+\infty[\![$. Déterminer $\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i)$.

   Supposons l'évènement $\bigcap_{k=1}^{i-1} B_i$ réalisé.
   Autrement dit, les tirages 1 à $i-1$ ont donné une balle blanche. Ainsi, $i-1$ balles blanches ont été ajoutées.
   Par conséquent, le tirage suivant s'effectue dans une urne constituée de $i-1+1 = i$ balles blanches et 1 balle

rouge.
L'évènement B_i est alors réalisé si, et seulement si, on tire une des i balles blanches parmi les $i+1$ balles. Par équiprobabilité du choix des balles, on a alors :

$$\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{i}{i+1}$$

Conclusion : $\forall i \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{i}{i+1}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}([T=n])$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Distinguons deux cas :

- Si $n=1$:
L'évènement $[T=1]$ est réalisé si, et seulement si, on tire la balle blanche au premier tirage. D'où :
$$[T=1] = R_1$$
Puis, par équiprobabilité du choix des balles :
$$\mathbb{P}([T=1]) = \frac{1}{2}$$

- Si $n \geq 2$:

$[T=n]$ est réalisé si, et seulement si, on a effectué n tirages
si, et seulement si, les tirages 1 à $n-1$ ont donné une balle blanche et le tirage n la balle rouge

D'où :
$$[T=n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k\right) \cap R_n$$
Puis, d'après la formule des probabilités composées, puisque $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}) \neq 0$:
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T=n]) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}}(R_n) && \text{d'après la question précédente}\\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n}\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}}(R_n) && \text{raisonnement analogue à la question précédente}\\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n}\frac{1}{n+1} && \text{télescopage}\\
&= \frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Les deux cas se regroupent...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([T=n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3. En déduire la probabilité de tirer la balle rouge.
D'après l'énoncé et la question précédente : $T(\Omega) = \mathbb{N}$. Ainsi, la famille $\big([T=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements.
Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}([T=n])$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([T=n]) = 1$.
Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}([T=n]) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}\\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right) && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} && \text{télescopage}\\
&= 1 - \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

Petite remarque
Pour le coup, ici, impossible d'utiliser la linéarité sur les sommes infinies, puisque les séries $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}$ sont divergentes...

Mais : $\lim\limits_{N\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{N+1} = 1$. D'où :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T=n]) = 1$$

Conclusion : $\mathbb{P}([T=0]) = 0$.

4. T admet-elle une espérance ? Si oui, préciser sa valeur.

- On sait que :

T admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\in T(\Omega)} n\mathbb{P}([T=n])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geq 0} n\mathbb{P}([T=n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([T=n]) &= \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}([T=n]) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \qquad \text{changement d'indice } k=n+1 \\ &= \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

Or, la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k}$ est une troncature d'une série de Riemann divergente (d'exposant $\alpha = 1$).

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([T=n])$ est divergente.

Conclusion : la variable aléatoire T n'a pas d'espérance.

●●○○ Exercice 9 - Obtenir chaque face

On lance indéfiniment une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir PILE est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir chacun des deux côtés de la pièce ; et X prend la valeur 0 sinon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k l'évènement "obtenir PILE au lancer k" et $F_k = \overline{P_k}$.

- On a déjà : $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (X peut prendre la valeur 0, d'après l'énoncé ; mais X ne peut pas valoir 1).
- Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$.
  - ◇ On a :

$[X=n]$ est réalisé	si, et seulement si,	n lancers sont nécessaires pour obtenir les deux côtés de la pièce
	si, et seulement si,	les lancers 1 à $n-1$ ont donné le même côté et le lancer n l'autre côté

  D'où :

$$[X=n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} P_k \cap F_n\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} F_k \cap P_n\right)$$

  - ◇ Or, les évènements P_n et F_n sont incompatibles, c'est donc également le cas des évènements $\bigcap_{k=1}^{n-1} P_k \cap F_n$ et $\bigcap_{k=1}^{n-1} F_k \cap P_n$.

  Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X=n]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} P_k \cap F_n\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} F_k \cap P_n\right)$$

  Puis, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([X=n]) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3}$$

- Déterminons enfin $\mathbb{P}([X=0])$.
  Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, la famille $\left([X=n]\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ est un système complet d'évènements. Ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \mathbb{P}([X=n])$ est convergente et :

$$\mathbb{P}([X=0]) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$$

  Après calculs, on obtient :

$$\mathbb{P}([X=0]) = 0$$

Conclusion : $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$
$\mathbb{P}([X=0]) = 0$; $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}([X=n]) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3}$.

2. Justifier que X admet une espérance et préciser sa valeur.

- On sait que :

X admet une espérance	si, et seulement si,	la série $\sum_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente
	si, et seulement si,	la série $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) &= 0+\sum_{n=2}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

par linéarité de la somme

Or, $\frac{1}{3}\in]-1;1[$ et $\frac{2}{3}\in]-1;1[$, donc les séries $\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ sont des troncatures de séries géométriques convergentes. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0\mathbb{P}([X=0])+\sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1\right)+\frac{2}{3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}-1\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}-1\right) \\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X)=\frac{7}{2}$.

3. Soit la variable aléatoire $Y = X(X-1)$.

3.a. Démontrer que Y admet une espérance et préciser sa valeur.

- Par théorème de transfert :

Y admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in X(\Omega)} n(n-1)\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} n(n-1)\mathbb{P}([X=n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{2}{3^2}\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\frac{2}{3^3}\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\end{aligned}$$

par linéarité de la somme

Or, $\frac{1}{3}\in]-1;1[$ et $\frac{2}{3}\in]-1;1[$, donc les séries $\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ sont des troncatures de séries géométriques convergentes. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} n(n-1)\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

- On en déduit que Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{2}{3^2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\frac{2}{3^3}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ &= \frac{2}{3^2}\frac{2}{(1-\frac{2}{3})^3}+\frac{2}{3^2}\frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} \\ &= \frac{27}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y)=\frac{27}{2}$.

3.b. En déduire que X admet une variance et préciser sa valeur.

On remarque que $X^2 = Y + X$. Puisque X et Y admettent une espérance, c'est également le cas de X^2 et de plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(X)=17$$

Par conséquent, X admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\frac{19}{4}$$

Conclusion : X admet une variance et $\mathbb{V}(X)=\frac{19}{4}$.

4. Écrire une fonction Python permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X. En déduire un programme permettant de confirmer les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

```
import numpy.random as rd

def simul_X():
    x=rd.random()
    c=1
    if x<1/3:
        while x<1/3:
            x=rd.random()
            c=c+1
    else :
        while x>1/3:
            x=rd.random()
            c=c+1
    return c

L=[simul_X() for n in range(100000)]
E=sum(L)/len(L)
L2=[x**2 for x in L]
M=sum(L2)/len(L2)
V=M-E**2
print(E,V)
```

●●○○ Exercice 10 - Type concours

Une personne envoie chaque jour un mail codé par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de $0,1$, alors qu'elle est de $0,05$ avec le serveur B.

   1.a. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un mail.

   Notons E l'évènement "avoir un erreur de transmission lors de l'envoi d'un mail" ; et notons $\mathcal{A}$ l'évènement "le mail est envoyé par le serveur A" ainsi que $\mathcal{B}$ l'évènement "le mail est envoyé par le serveur B". D'après la formule des probabilités totales, avec $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\mathcal{A}\cap E)+\mathbb{P}(\mathcal{B}\cap E)\\
&= \mathbb{P}(\mathcal{A})\times\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(E)+\mathbb{P}(\mathcal{B})\times\mathbb{P}_{\mathcal{B}}(E) \quad \mathbb{P}(\mathcal{A}) \text{ et } \mathbb{P}(\mathcal{B}) \text{ sont non nulles}\\
&= 0,7\times 0,1+0,3\times 0,05\\
&= \frac{7}{100}+\frac{15}{1000}\\
&= \frac{85}{1000}\\
&= \frac{17}{200}
\end{aligned}$$

   Conclusion : la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un mail est égale à $\frac{17}{200}$.

   1.b. Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

   Cela revient à calculer $\mathbb{P}_E(\mathcal{A})$.
   Puisque $\mathbb{P}(E)\neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_E(\mathcal{A}) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap E)}{\mathbb{P}(E)}\\
&= \frac{\frac{7}{100}}{\frac{17}{200}}\\
&= \frac{14}{17}
\end{aligned}$$

   Conclusion : la probabilité recherchée est égale à $\frac{14}{17}$.

2. Un jour donné, appelé jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBA... signifie que les deux premiers jours, l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3,4,5 il a choisi le serveur B et le jour 6 le serveur A.
   Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième de longueur 3 (ce qui est également le cas de la série BBAAAB...).
   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 celle de la deuxième série.
   Ainsi, pour $k\in\mathbb{N}^*$, dire que $L_1=k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.
   Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement "le serveur A a été choisi le jour n", et on définit de même l'évènement B_n.

   > **Petite remarque**
   > En toute rigueur, l'énoncé aurait dû attribuer une valeur à L_1 dans le cas où c'est le même serveur qui est toujours choisi... De même pour L_2.

   2.a. Déterminer $\mathbb{P}([L_1=2])$.

   - On a :

$[L_1 = 2]$ est réalisé si, et seulement si, la première série a une longueur de 2
si, et seulement si, le même serveur a été choisi sur les jours 1 et 2, puis l'autre lors du jour 3

Ainsi :

$$[L_1 = 2] = \big(A_1 \cap A_2 \cap B_3\big) \cup \big(B_1 \cap B_2 \cap A_3\big)$$

✘ Attention ! Pour dire que la première série est de longueur 2, il faut indiquer le serveur du troisième jour !

- Or, A_1 et B_1 sont incompatibles, c'est donc également le cas de $A_1 \cap A_2 \cap B_3$ et $B_1 \cap B_2 \cap A_3$. Ainsi :

$$\mathbb{P}([L_1 = 2]) = \mathbb{P}\big(A_1 \cap A_2 \cap B_3\big) + \mathbb{P}\big(B_1 \cap B_2 \cap A_3\big)$$

Puis, les choix de serveurs étant supposés indépendants les uns des autres, on obtient :

$$\mathbb{P}([L_1 = 2]) = 0,7^2 \times 0,3 + 0,3^2 \times 0,7$$

2.b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([L_1 = k]) = 0,3^k \times 0,7 + 0,7^k \times 0,3$$

Soit $k \in [\![1;+\infty[\![$.

- On a :

$[L_1 = k2]$ est réalisé si, et seulement si, la première série a une longueur de k
si, et seulement si, le même serveur a été choisi sur les jours 1 à k, puis l'autre lors du jour $k+1$

Ainsi :

$$[L_1 = k] = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap B_{k+1}\right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) \cap A_{k+1}\right)$$

- Or, A_{k+1} et B_{k+1} sont incompatibles, c'est donc également le cas de $\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap B_{k+1}$ et $\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) \cap A_{k+1}$. Puis, les choix de serveurs étant supposés indépendants les uns des autres, on obtient le résultat voulu.

> **Conclusion :** pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([L_1 = k]) = 0,3^k \times 0,7 + 0,7^k \times 0,3$.

2.c. Vérifier que $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}([L_1 = k])$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) = 1$.

La convergence de $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}([L_1 = k])$ est assurée car :

- $\big([L_1 = k]\big)_{k\geq 1}$ est une sous-famille du sce $\big([L_1 = k]\big)_{k\in L_1(\Omega)}$,
- et que la série $\sum_{k\in L_1(\Omega)} \mathbb{P}([L_1 = k])$ est convergente (de somme égale à 1).

Petite remarque Sinon, on travaille sur la somme partielle.

On peut alors se lancer dans le calcul :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) &= 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} 0,3^k + 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} 0,7^k \\
&= 0,7\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 0,3^k - 1\right) + 0,3\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 0,7^k - 1\right) \\
&= 0,7\left(\frac{1}{1-0,3} - 1\right) + 0,3\left(\frac{1}{1-0,7} - 1\right) \\
&= 0,3 + 0,7 \\
&= 1
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** la série $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}([L_1 = k])$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) = 1$.

2.d. Montrer que L_1 admet une espérance et la calculer.

On avait obtenu $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = n]) = 1$, on peut donc considérer que $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

✓ Rigueur ! Ce n'est pas vraiment correct, mais l'énoncé ne nous laisse pas le choix. Voir la première remarque de l'exercice.

- On sait que :

L_1 admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in L_1(\Omega)} n\mathbb{P}([L_1 = n])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}([L_1 = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}([L_1 = n]) = 0,7 \times 0,3 \sum_{n=1}^{N} n0,3^{n-1} + 0,3 \times 0,7 \sum_{n=1}^{N} n0,7^{n-1}$$

Or, $0,3$ et $0,7$ appartiennent à $]-1;1[$, donc les séries $\sum_{n\geq 1} n0,3^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 1} n0,7^{n-1}$ sont des séries géométriques convergentes .
Par conséquent, la série L_1 admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}([L_1=n]) \\
&= 0,7\times 0,3\sum_{n=1}^{+\infty} n0,3^{n-1} + 0,3\times 0,7\sum_{n=1}^{+\infty} n0,7^{n-1} \\
&= 0,7\times 0,3\times \frac{1}{(1-0,3)^2} + 0,3\times 0,7\times\frac{1}{(1-0,7)^2} \\
&= \frac{3}{7}+\frac{7}{3} \\
&= \frac{58}{21}
\end{aligned}$$

Conclusion : L_1 admet une espérance et $\mathbb{E}(L_1)=\dfrac{58}{21}$.

2.e. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Justifier soigneusement que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\Big([L_1=k]\cap[L_2=n]\Big) = 0,3^{k+1}\times 0,7^n + 0,7^{k+1}\times 0,3^n$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$[L_1=k]\cap[L_2=n]$ est réalisé si, et seulement si, la première série est de longueur k et la seconde de longueur n
si, et seulement si, un serveur est choisi des jours 1 à k, puis l'autre des jours $k+1$ à n puis à nouveau le premier le jour $n+1$

✘ Attention ! Pour savoir que la seconde chaîne a une longueur de n, il faut indiquer le serveur qui suivra : celui du jour $k+n+1$.

D'où :

$$[L_1=k]\cap[L_2=n] = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=k+1}^{k+n}B_i\right)\cap A_{k+n+1}\right)\cup\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}B_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=k+1}^{k+n}A_i\right)\cap B_{k+n+1}\right)$$

Or A_{n+k+1} et B_{n+k+1} sont incompatibles, c'est donc également le cas de $\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=k+1}^{k+n}B_i\right)\cap A_{k+n+1}$ et $\left(\bigcap_{i=1}^{k}B_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=k+1}^{k+n}A_i\right)\cap B_{k+n+1}$. Puis, par indépendance du choix des serveurs, on obtient le résultat voulu.

Conclusion : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\Big([L_1=k]\cap[L_2=n]\Big)=0,3^{k+1}\times 0,7^n+0,7^{k+1}\times 0,3^n$.

2.f. En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, la valeur de $\mathbb{P}([L_2=n])$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités, avec $\Big([L_1=k]\Big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, on a :

✔ Rigueur ! En fait, $\Big([L_1=k]\Big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'évènements, mais cette notion n'est pas au programme ; et la FPT est bien encore valable pour un SQCE... A mettre en lien avec la première remarque faite sur l'exercice.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([L_2=n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big([L_1=k]\cap[L_2=n]\Big) && \text{question précédente}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} 0,3^{k+1}\times 0,7^n + 0,7^{k+1}\times 0,3^n && \text{par linéarité de la somme, car } \sum_{k\geq 1}0,3^{k+1} \text{ et } \sum_{k\geq 1}0,7^{k+1} \text{ sont convergentes}\\
&= 0,7^n\sum_{k=1}^{+\infty}0,3^{k+1} + 0,3^n\sum_{k=1}^{+\infty}0,7^{k+1} \\
&= 0,7^n0,3^2\sum_{i=0}^{+\infty}0,3^i + 0,3^n0,7^2\sum_{i=1}^{+\infty}0,7^i && \text{changements d'indices } i=k+1\\
&= 0,3^20,7^{n-1}+0,7^20,3^{n-1}
\end{aligned}$$

★ Classique ! ★ Question classique, qui sera revue l'an prochain dans le chapitre sur les couples de variables aléatoires. Autant commencer à se familiariser cette année.

Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([L_2=n])=0,3^20,7^{n-1}+0,7^20,3^{n-1}$.

Remarque : on a facilement $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}([L_2=n])=1$...

●●○○ Exercice 11 - Type concours

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On note :

- pour $n\in\mathbb{N}^*$, P_n l'évènement "obtenir PILE au lancer n" et $F_n=\overline{P_n}$
- X la variable aléatoire qui prend n comme valeur (pour $n\in[\![2;+\infty[\![$) lorsque l'on obtient pour la première fois PILE puis FACE dans cet ordre aux lancers $n-1$ et n. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si une telle combinaison n'arrive jamais.

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}([X=2])$.
3. **Loi de X.**

3.a. Décrire l'évènement $[X=3]$ à l'aide des évènements P_k et F_k puis calculer sa probabilité.

3.b. Écrire, pour $n \in [\![3;+\infty[\![$, l'évènement $[X=n]$ comme union de $n-1$ évènements incompatibles.

3.c. En déduire : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([X=n]) = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Vérifier que cette relation est encore valable pour $n=2$.

3.d. Déduire des questions précédentes la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$. Interpréter le résultat.

4. Dans cette question, on se propose de retrouver la loi de X par une autre méthode...

4.a. A l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$,

$$\mathbb{P}([X=n+1]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X=n]) + \frac{1}{2^{n+1}}$$

4.b. On pose, pour $n \in [\![2;+\infty[\![$, $u_n = 2^n\mathbb{P}([X=n])$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est arithmétique.

4.c. En déduire, pour $n \in [\![2;+\infty[\![$, l'expression $\mathbb{P}([X=n])$.

5. Justifier que X admet une espérance et la calculer.

Petite remarque
Je n'ai pas eu envie d'écrire le corrigé de cet exercice... Si besoin, il s'agit d'un exercice du sujet EDHEC 1998 voie E.

●●○○ Exercice 12 - Type concours

On réalise une suite de lancers de pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p, avec $p \in]0;1[$, jusqu'à obtenir deux PILE consécutifs. On note $q = 1-p$. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du second PILE consécutif.
Par exemple, les lancers FFFPFPFPP donnent $X=9$.
On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k l'évènement "obtenir PILE au lancer k" et $F_k = \overline{P_k}$.

1. Déterminer les probabilités : $\mathbb{P}([X=2])$, $\mathbb{P}([X=3])$ et $\mathbb{P}([X=4])$.

- L'évènement $[X=2]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient PILE aux lancers 1 et 2.
D'où : $[X=2] = P_1 \cap P_2$. Ainsi, par indépendance des lancers : $\mathbb{P}([X=2]) = p^2$.
- De même, on a : $[X=3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3$, donc, par indépendance des lancers : $\mathbb{P}([X=3]) = qp^2$.
- Et enfin : $[X=3] = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$.
Or, les évènements $F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$ et $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$ sont incompatibles (car F_1 et P_1 le sont). D'où :
$$\mathbb{P}([X=4]) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$$
Puis, par indépendance des lancers, on obtient :
$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([X=4]) & = & q^2p^2 + qp^3 \\ & = & qp^2(q+p) \\ & = & qp^2\end{array}$$

2. Justifier que $\left(F_1; P_1 \cap F_2; P_1 \cap P_2\right)$ est un système complet d'évènements.

☞ Rappel...
La famille $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un SCE lorsque :
- $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k = \Omega$
- $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$

- On a :
$$F_1 \cap (P_1 \cap F_2) = \varnothing \ ;\ F_1 \cap (P_1 \cap P_2) = \varnothing \ ;\ (P_1 \cap P_2) \cap (P_1 \cap F_1) = \varnothing$$
Les évènements sont deux à deux incompatibles.
- De plus :
$$\begin{array}{rcl}F_1 \cup (P_1 \cap F_2) \cup (P_1 \cap P_2) & = & F_1 \cup \left(P_1 \cap (F_2 \cup P_2)\right) \\ & = & F_1 \cup (P_1 \cap \Omega) \\ & = & F_1 \cup P_1 \\ & = & \Omega\end{array}$$

Conclusion : $\left(F_1; P1 \cap F_2; P_1 \cap P_2\right)$ est un système complet d'évènements.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=n+2]) = q\mathbb{P}([X=n+1]) + pq\mathbb{P}([X=n])$.
Soit $n \in [\![1;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements mentionné à la question précédente, on a :
$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([X=n+2]) & = & \mathbb{P}(F_1 \cap [X=n+2]) + \mathbb{P}((P_1 \cap F_2) \cap [X=n+2]) + \mathbb{P}((P_1 \cap P_2) \cap [X=n+2]) \\ & = & \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}([X=n+2]) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) \times \mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}([X=n+2]) \\ & = & q\mathbb{P}_{F_1}([X=n+2]) + pq\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}([X=n+2])\end{array}$$
$(P_1 \cap P_2) \cap [X=n+2] = \varnothing$, car $n+2 \geq 3$...

Or :
- Supposons l'évènement F_1 réalisé.
Dans ce cas :

$[X=n+2]$ est réalisé	si, et seulement si,	les lancers 2 à $n+1$ se terminent par le premier double-PILE
	si, et seulement si,	on obtient le premier double-PILE en $n+1$ lancers

En gros...
Ce n'est pas le rang des lancers qui compte, mais leur nombre...

Par conséquent :
$$\mathbb{P}_{F_1}([X=n+2]) = \mathbb{P}([X=n+1])$$
- Supposons l'évènement $P_1 \cap F_2$ réalisé.
Dans ce cas :

$[X=n+2]$ est réalisé	si, et seulement si,	les lancers 3 à $n+1$ se terminent par le premier double-PILE
	si, et seulement si,	on obtient le premier double-PILE en n lancers

☞ Rappel...
Si a et b sont des entiers tels que $a \leq b$, alors :
$\mathrm{Card}\left([\![a;b]\!]\right) = b-a+1$.

Par conséquent : $\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}([X = n+2]) = \mathbb{P}([X = n])$.

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}([X = n+2]) = q\mathbb{P}([X = n+1]) + pq\mathbb{P}([X = n])$.

4. Ici, on suppose que $p = \dfrac{2}{3}$.
   Voir l'exercice 7
   - **4.a.** Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([X = n])$.
   - **4.b.** Justifier que X admet une espérance et une variance. Les calculer. Interpréter le résultat de l'espérance.

●●●○ Exercice 13 - Type concours

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 (l'origine) avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Écrire une fonction `Python` telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `simul_X(n,p)` renvoie une réalisation de X_n.

```python
import numpy.random as rd

def simulX(n,p):
    X=0
    for k in range(1,n+1):
        if rd.random()<p:
            X=X+1
        else:
            X=0
    return X
```

2.
   - **2.a.** Donner la loi de X_1.
     Aucune difficulté...

     Conclusion : $X_(\Omega) = \{0;1\}$, $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$ et $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1-p$.

   - **2.b.** Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.
     Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
     - Si $k = 1$:
       $$[T = 1] = [X_1 = 0]$$
     - Si $k \geq 2$:

       $[T = k]$ est réalisé si, et seulement si, k est le premier instant du retour à l'origine du mobile
       si, et seulement si, le mobile avance des instants 1 à $k-1$, puis retourne à l'origine à l'instant k

       D'où :
       $$[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \neq 0]\right) \cap [X_k = 0]$$

   - **2.c.** En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
     Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
     - Si $k = 1$: alors $\mathbb{P}([T = 1]) = 1-p$
     - Si $k \geq 2$: alors, d'après la formule des probabilités composées, puisque $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \neq 0]\right) \neq 0$:

       $$\begin{aligned} \mathbb{P}([T = k]) &= \mathbb{P}([X_1 \neq 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1 \neq 0]}([X_2 \neq 0]) \times \ldots \times \mathbb{P}_{[X_1 \neq 0] \cap \ldots \cap [X_{k-2} \neq 0]}([X_{k-1} \neq 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1 \neq 0] \cap \ldots \cap [X_{k-1} \neq 0]}([X_k = 0]) \\ &= p^{k-1}(1-p) \end{aligned}$$

       En effet, peu importe sa position, la probabilité que me mobile avance est p et celle qu'il retourne à l'origine est $1-p$.

     ✘ Attention !
     Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ ne sont pas indépendantes ! La position du mobile à un instant dépend bien évidemment de sa position à l'instant précédent !
     En définissant l'évènement A_i "le mobile avance à l'instant i", on aurait $[T = k] = \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i \cap \overline{A_k}$, et ici, les évènements $A_1, A_2, \ldots$ sont indépendants ! Mais ce n'est pas dans l'esprit de l'exercice.

   - **2.d.** Justifier que la variable aléatoire T possède une espérance et la calculer.
     Méthode habituelle...

     Conclusion : T admet une espérance et $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{1-p}$.

   - **2.e.** Justifier que la variable aléatoire $T(T-1)$ possède une espérance et la calculer. En déduire que T possède une variance et la déterminer.

- Méthode habituelle...

Conclusion : $T(T-1)$ admet une espérance et $\mathbb{E}(T(T-1)) = \dfrac{2p}{(1-p)^2}$.

- Remarquons que :

$$T^2 = T(T-1) + T$$

Or T et $T(T-1)$ admettent une espérance. Donc T^2 est la somme de deux variables aléatoires ayant une espérance, elle admet donc également une espérance et par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T^2) &= \mathbb{E}(T(T-1)) + \mathbb{E}(T)\\ &= \frac{2p}{(1-p)^2} + \frac{1}{1-p}\\ &= \frac{1+p}{(1-p)^2}\end{aligned}$$

Autrement dit, T possède un moment d'ordre 2. Ainsi, T admet une variance, et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(T) &= \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2\\ &= \frac{1+p}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-p)^2}\\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\end{aligned}$$

Conclusion : T admet une variance et $\mathbb{V}(T) = \dfrac{p}{(1-p)^2}$.

3. 3.a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
La variable aléatoire X_0 est constante égale à 0, donc $X_0(\Omega) = \{0\} = [\![0;0]\!]$: l'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et montrons que $X_{n+1}(\Omega) = [\![0;n+1]\!]$.
Par double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Par hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, et comme le mobile ne peut qu'avancer d'une place ou revenir à 0 à l'instant suivant, on a bien $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![0;n+1]\!]$.

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in [\![0;n+1]\!]$. Montrons que $[X_{n+1} = k] \neq \varnothing$.

⇝ Si $k = 0$:
A tout moment, le mobile peut retourner à la position 0. Donc $[X_{n+1} = 0] \neq \varnothing$.

⇝ Si $k \in [\![1;n+1]\!]$:
Alors $k-1 \in [\![0;n]\!]$, et, par hypothèse de récurrence, on a ainsi $k-1 \in X_n(\Omega)$. Autrement dit, le mobile peut se trouver à la position $k-1$ à l'instant n.
Par conséquent, en se délaçant vers la droite, il se trouvera en position k à l'instant $n+1$.
Ainsi : $[X_{n+1} = k] \neq \varnothing$.

On a établi :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ [X_{n+1} = k] \neq \varnothing$$

D'où :

$$[\![0;n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega)$$

Par conséquent : $X_{n+1}(\Omega) = [\![0;n+1]\!]$. L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le système complet d'évènements $\big([X_{n-1} = k]\big)_{0\leq k\leq n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1-p$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_{n-1} = k]\big)_{0\leq k\leq n-1}$ comme système complet d'évènements :

> **Petite remarque**
> C'est bien le cas, puisque $X_{n-1}(\Omega) = [\![0;n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n = 0]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0]) && \forall k \in [\![0;n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k])\mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}([X_n = 0])\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times (1-p)\\ &= (1-p)\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) && X_{n-1}(\Omega) = [\![0;n-1]\!],\text{ donc } \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1\\ &= 1-p\end{aligned}$$

4. 4.a. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1;n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\mathbb{P}([X_n = k-1])$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in [\![1;n+1]\!]$. On a :

$[X_{n+1} = k]$ est réalisé	si, et seulement si,	le mobile se situe en position k à l'instant $n+1$
	si, et seulement si,	puisque $k \neq 0$, le mobile se situait en position $k-1$ à l'instant n et a avancé

> **Petite remarque**
> Il est également possible d'utiliser la FPT avec $\big([X_{n-1} = k]\big)_{0\leq k\leq n-1}$ comme SCE. Le raisonnement pour simplifier la somme est alors analogue...

D'où : $\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\mathbb{P}([X_n = k-1])$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1;n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\mathbb{P}([X_n = k-1])$.

4.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0;n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  Immédiat d'après la question **3.**. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.
  Et montrons : $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p^k(1-p)$.
  Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Deux cas se présentent :
  - Si $k = 0$:
    Immédiat d'après la question **3.**.
  - Si $k \in [\![1;n]\!]$:
    D'après la question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) &= p\mathbb{P}([X_n = k-1]) \\ &= pp^{k-1}(1-p) \qquad \text{par hypothèse de récurrence, puisque } k-1 \in [\![0;n-1]\!] \\ &= p^k(1-p) \end{aligned}$$

  On a bien établi :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p^k(1-p)$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0;n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.

4.c. Déduire alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on a : $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

Mais :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) = \ldots = 1 - p^n$$

D'où :

$$\mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$$

Explication :
L'évènement $[X_n = n]$ est réalisé si, et seulement si, des instants 1 à n le mobile a avancé. Ce qui se produit avec une probabilité égale à p^n.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$.

5. **5.a.** Montrer que : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

Deux méthodes possibles :

- *par récurrence (bon entraînement),*
- *poser $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ et en donner une autre expression ; dériver les deux formes et les égaler... Déjà fait "des millions de fois selon AS".*

5.b. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Puisque $X_n(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire X_n admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X_n = k]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}([X_n = k]) + n\mathbb{P}([X_n = n]) \qquad \text{questions 4.b. et 4.c.} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} kp^k(1-p) + np^n \\ &= (1-p)p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n \qquad \text{question précédente} \\ &= (1-p)p\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n \\ &= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p}{1-p} + \frac{np^n(1-p)}{1-p} \\ &= \frac{(n-1)p^{n+1} + p - np^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{-p^{n+1} + p}{1-p} \\ &= \frac{p(1-p^n)}{1-p} \end{aligned}$$

> ✘ **Attention !**
> Il y a plusieurs expressions de $\mathbb{P}([X_n = k])$, selon que $k = n$ ou pas...

Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$
Et cette expression est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$...

6. 6.a. Montrer, en utilisant la question 4.a., que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons déjà que, puisque $X_{n+1}(\Omega)$ est un ensemble fini, X_{n+1} admet un moment de tout ordre, donc en particulier un moment d'ordre 2.
Par théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_{x+1}^2\right) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) && \text{d'après la question 4.a.} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 p \mathbb{P}([X_n = k-1]) && \text{changement d'indice } i = k-1 \\
&= p\sum_{i=0}^{n} (i+1)^2 \mathbb{P}([X_n = i]) \\
&= p\sum_{i=0}^{n} i^2 \mathbb{P}([X_n = i]) + 2p\sum_{i=0}^{n} i\mathbb{P}([X_n = i]) + p\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = i]) && \text{car } X_n(\Omega) = [\![0;n]\!] \\
&= p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)
\end{aligned}$$

6.b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} && \text{d'après la question précédente} \\
&= p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} && \text{d'après la question 5.b.} \\
&= p\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2p\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= p\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2p\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + (2n-1)\frac{p^{n+2}}{1-p} + 2\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= p\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + p(2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} + 2p\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + 2\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{2p^2 - 2p^{n+2} + p - p^2 + 2p^{n+2}}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}
\end{aligned}$$

Petite remarque
Si on bloque un peu pendant le calcul, ne pas hésiter à partir du membre de droite...

6.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

- (u_n) est ainsi une site arithmético-géométrique...
  - Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x = px + \dfrac{p(1+p)}{1-p} \iff x = \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.

    Notons $\alpha = \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.
  - Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \alpha$. Sans mal, on montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison p et de premier terme $v_0 = u_0 - \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$... Et ensuite : $u_0 = ... = \dfrac{-p}{1-p}$.
  - Bref, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p}{(1-p)^2}(1 + p - 2p^n)$$

- D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_n^2\right) &= u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
&= ... \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}(1 + p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1})
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left(X_n^2\right) = \dfrac{p}{(1-p)^2}(1 + p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1})$.

6.d. Montrer enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque X_n possède un moment d'ordre 2, elle possède également une variance et ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}\big(X_n^2\big)-\mathbb{E}(X_n)^2 && \text{d'après la question précédente}\\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\Big(1+p-(2n+1)p^n+(2n-1)p^{n+1}\Big)-\left(\frac{p(1-p^n)}{1-p}\right)^2\\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\Big(1+p-(2n+1)p^n+(2n-1)p^{n+1}-p(1-p^n)^2\Big)\\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\Big(1+p-(2n+1)p^n+(2n-1)p^{n+1}-p+2p^{n+1}-p^{2n+1}\Big)\\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\Big(1-(2n+1)p^n+(2n+1)p^{n+1}-p^{2n+1}\Big)\\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\Big(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\Big)
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\Big(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\Big)$.

●●●○ Exercice 14 - Type concours

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1.a. Démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}([X>k-1]) - \mathbb{P}([X>k])$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}([X>k]) - n\mathbb{P}([X>n])$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a : $[X>k-1] = [X \geq k]$.
Or :
$$[X \geq k] = [X=k] \cup [X>k]$$
D'où :
$$[X>k-1] = [X=k] \cup [X>k]$$
Mais $[X=k]$ et $[X>k]$ sont incompatibles, donc :
$$\mathbb{P}([X>k-1]) = \mathbb{P}([X=k]) + \mathbb{P}([X>k])$$
D'où :
$$\mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}([X>k-1]) - \mathbb{P}([X>k])$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}([X>k-1]) - \mathbb{P}([X>k])$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat précédent, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{k=0}^{n} k\Big(\mathbb{P}([X>k-1]) - \mathbb{P}([X>k])\Big) && \text{linéarité de la somme}\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X>k-1]) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X>k])\\
&= \sum_{k=0}^{n} (k-1+1)\mathbb{P}([X>k-1]) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X>k]) && \text{linéarité de la somme}\\
&= \sum_{k=0}^{n} (k-1)\mathbb{P}([X>k-1]) + \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}([X>k-1]) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X>k]) && \text{télescopage entre première et troisième somme}\\
&= -\mathbb{P}([X>-1]) - n\mathbb{P}([X>n]) + \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}([X>k-1]) && \text{changement d'indice } i=k-1\\
&= -\mathbb{P}([X>-1]) - n\mathbb{P}([X>n]) + \sum_{i=-1}^{n-1}\mathbb{P}([X>i])\\
&= -\mathbb{P}([X>-1]) - n\mathbb{P}([X>n]) + \mathbb{P}([X>-1]) + \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}([X>i])\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}([X>i]) - n\mathbb{P}([X>n])
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}([X>k]) - n\mathbb{P}([X>n])$.

1.b. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}([X>k])$ est convergente. Démontrer que X possède une espérance.

- On sait que :

X admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} n\mathbb{P}([X=k])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X = k])$.

Ensuite :

◇ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = (n+1)\mathbb{P}([X = n+1]) \geq 0$.
Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) - n\mathbb{P}([X > n])$$

Or :

⇝ $n\mathbb{P}([X > n]) \geq 0$,

⇝ la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k])\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (immédiat) et converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$ (car la série $\sum \mathbb{P}([X > k])$ est supposée convergente).

Par conséquent, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k])\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$.

On obtient donc, par transitivité :

$$S_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc majorée.

Par théorème de convergence monotone, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente. Autrement dit, la série $\sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}([X = k])$ est convergente.

Conclusion : X possède une espérance.

1.c. Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.
Démontrer alors que la suite $\big(n\mathbb{P}([X > n])\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, puis que la série $\sum \mathbb{P}([X > k])$ est convergente et enfin :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

◇ On sait que :

$$n\mathbb{P}([X > n]) \geq 0$$

◇ *Cherchons donc à majorer $n\mathbb{P}([X > n])$ par une expression de limite nulle en $+\infty$ pour conclure avec le théorème d'encadrement.*
Puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} n\mathbb{P}([X > n]) &= n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}([X = k]) \end{aligned}$$

Or :

On a :

$$\forall k \in [\![n+1;+\infty[\![,\ n \leq k$$

D'où (une probabilité étant positive) :

$$\forall k \in [\![n+1;+\infty[\![,\ n\mathbb{P}([X = k]) \leq k\mathbb{P}([X = k])$$

Puis, en sommant de $n+1$ à $+\infty$, licite car les séries $\sum_{k\geq n+1} \mathbb{P}([X = k])$ et $\sum_{k\geq n+1} k\mathbb{P}([X = k])$ sont des troncatures de séries convergentes, la deuxième puisque X admet une espérance, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}([X = k]) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}([X = k])$$

Par transitivité, on en déduit :

$$\begin{aligned} n\mathbb{P}([X > n]) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X = k]) \end{aligned}$$

relation de Chasles

Pour frimer...
On pourrait aussi dire que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])$ est le reste d'ordre n d'une série convergente ; il tend donc vers 0 quand $n \to +\infty$.

On a donc établi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n\mathbb{P}([X > n]) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X = k])$$

Mais : la série $\sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}[X=k])$ est convergente, donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k])$.
Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k]) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) = 0$$

Par théorème d'encadrement, on obtient finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}([X>n]) = 0$$

- D'après la question **1.a.** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X>k]) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) + n\mathbb{P}([X>n])$$

Or :
  - d'après le résultat précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}([X>n]) = 0$$

  - puisque X admet une espérance, et que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{E}(X)$$

★Subtile...★
Nul besoin d'avoir $X(\Omega) = \mathbb{N}$ pour dire que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k])$; l'information $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ suffit. En effet, certaines probabilités $\mathbb{P}([X=k])$ seraient nulles si $k \notin X(\Omega)$.

Par conséquent, la série $\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}([X>k])$ est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>k]) = \mathbb{E}(X)$$

Conclusion : la série $\sum \mathbb{P}([X>k])$ est convergente et $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>k])$.

2. **Une application.** On dispose d'une urne contenant N balles indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs et avec remise d'une balle ; et on note X_n la variable aléatoire égale au maximum des nombres obtenus sur ces n tirages.
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du i-ème tirage.

2.a. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Donner la loi de Y_i.
Les tirages étant effectués avec remise, on a : $Y_i(\Omega) = [\![1;N]\!]$, et par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne :

$$\forall k \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}([Y_i=k]) = \frac{1}{N}$$

☞ Pour info...
Y_i suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$... Voir chapitre 21.

2.b. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}([X_n \leq k])$.
On a :

$$X_n = \max(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$$

Soit $k \in [\![1;N]\!]$.

$[X_n \leq k]$ est réalisé	si, et seulement si,	$[\max(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \leq k]$ est réalisé
	si, et seulement si,	pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $[Y_i \leq k]$ est réalisé

D'où :

$$[X_n \leq n] = \bigcap_{i=1}^{n} [Y_i \leq k]$$

Les tirages étant effectués avec remise, ils sont indépendants. Par conséquent, les variables aléatoires $U_1, Y_2, ..., Y_n$ sont mutuellement indépendantes. D'où :

$$\mathbb{P}([X_n \leq k]) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y_i \leq k])$$

Or :

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, d'après la question précédente : $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([Y_i=j]) = \frac{1}{N}$.
D'où, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_i \leq k]) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{N} \\ &= \frac{k}{N} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n \leq k]) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{N} \\ &= \left(\frac{k}{N}\right)^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}([X_n \leq k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

Vérification
Puisque $X_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$, on vérifie que $\mathbb{P}([X_n \leq N]) = 1$...

2.c. En déduire que X_n possède une espérance et l'exprimer sous forme d'une somme.

Puisque $X_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$ est fini, la variable aléatoire X_n possède une espérance.

Ainsi, d'après la question **1.c.**, la série $\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}([X_n > k])$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n > k]) \qquad X_n(\Omega) = [\![1;N]\!] \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \Big(1 - \mathbb{P}([X \leq k])\Big) \\
&= 1 + N - 1 - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= N - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

●●○○ Exercice 15 - Deux inégalités classiques

1. Soit Y est une variable aléatoire réelle à valeurs discrètes positives admettant une espérance $\mathbb{E}(Y)$. Soit a un réel strictement positif. Notons $A = \{\omega \in \Omega \ / \ Y(\omega) \geq a\}$. Considérons la variable aléatoire Z définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \ Z(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.a. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.

$Z(\Omega) = \{0; a\}$, donc Z possède une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= 0\mathbb{P}([Z=0]) + a\mathbb{P}([Z=a]) \qquad [Z=a] = A = [Y \geq a] \\
&= a\mathbb{P}([Y \geq a])
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Z) = a\mathbb{P}([Y \geq a])$.

Important !
Il s'agit de démontrer :
$$\forall \omega \in \Omega, \ Z(\Omega) \leq Y(\Omega)$$

1.b. Établir : $Z \leq Y$.

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

- si $\omega \in A$:
  Dans ce cas, $Z(\omega) = a$ et $Y(\omega) \geq a$. D'où : $Z(\omega) \leq Y(\omega)$.
- si $\omega \notin A$:
  Dans ce cas, $Z(\omega) = 0$. Mais Y est à valeurs positives, donc $Y(\omega) \geq 0$. D'où : $Z(\omega) \leq Y(\omega)$.

Conclusion : $\forall \omega \in \Omega, \ Z(\Omega) \leq Y(\Omega)$.
Autrement dit : $Z \leq Y$.

1.c. Conclure sur l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}([Y \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$

☞ Rappel...
Dans le cours, on a vu la *positivité* de l'espérance :
$T \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(T) \geq 0$
Il suffit d'appliquer la positivité à la variable aléatoire $Y - Z$, puis la linéarité de l'espérance pour conclure sur la *croissance* de l'espérance.
Et on retrouve aisément la positivité à partir de la croissance... Bref, ces deux propriétés sont équivalentes (grâce à la linéarité).

On sait que $Z \leq Y$. Donc, par croissance de l'espérance (puisque Z et Y admettent toutes deux des espérances) :

$$\mathbb{E}(Z) \leq \mathbb{E}(Y)$$

Ainsi, d'après la question **1.a.** :

$$a\mathbb{P}([Y \geq a]) \leq \mathbb{E}(Y)$$

Or $a > 0$...

Conclusion : $\mathbb{P}([Y \geq a]) \leq \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{a}$.

2. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance et une variance.
A l'aide de l'inégalité de Markov, établir l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \ \mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\Big) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$

☞ Rappel...
Définition : X admet une variance lorsque $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance et dans ce cas : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$. Notons $Y = \Big(X - \mathbb{E}(X)\Big)^2$. Ainsi :

- Y est une variable aléatoire discrète à valeurs positives,
- Y admet une espérance, puisque X admet une variance.

Ainsi, d'après l'inégalité de Markov ($\alpha^2 > 0$) :

$$\mathbb{P}\Big(Y \geq \alpha^2\Big) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha^2}$$

Mais :

- $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{V}(X)$

- Et, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} Y(\omega) \geq \alpha^2 &\iff (X(\omega) - \mathbb{E}(X))^2 \geq \alpha^2 && \text{par stricte croissance de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ &\iff \sqrt{(X(\omega) - \mathbb{E}(X))^2} \geq \sqrt{\alpha^2} && \alpha \geq 0 \\ &\iff \left|X(\omega) - \mathbb{E}(X)\right| \geq \alpha \end{aligned}$$

Ainsi :

$$[Y \geq \alpha^2] = \left[\left|X(\omega) - \mathbb{E}(X)\right| \geq \alpha\right]$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\Big) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$

Conclusion : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+,\ \mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\Big) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$.

☞ Pour info...

Pour une belle application de cette inégalité, on peut démontrer le théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein : voir la simulation d'oral de ET et HD le 29/03/2023.