19

Fonctions
Intégrales sur un segment

Introduction...

Le calcul d'aires remonte à l'antiquité; et l'on voit déjà, dans les travaux d'Archimède, l'utilisation des *infinitésimaux* pour calculer certaines aires. La méthode d'exhaustion fut également utilisée. Dans les deux cas, on peut résumer le principe ainsi :

voir la figure comme une *limite* de figures plus élémentaires dont on peut trouver l'aire.

Pour une vidéo sur l'aire d'un disque vue par Archimède : ici
On peut aussi obtenir l'aire d'un disque en l'approchant par une suite de polygones réguliers...
Pour cibler un peu plus sur le chapitre : il est possible de démontrer que l'aire sous la courbe de la fonction carrée sur l'intervalle $[0;1]$ (notée $\mathcal{A}$) vaut $\frac{1}{3}$. Dans ce but, on approche cette portion de paraboles par des rectangles (méthode des rectangles) : ici.
On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq \mathcal{A} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Puis le résultat voulu, par théorème d'encadrement!

Dans ce chapitre, on s'occupera surtout de faire le lien entre calcul d'aires sous une courbe et dérivée de fonction! Ce lien, qui sera détaillé dans le théorème fondamental de l'analyse est dû à James Gregory (1638-1675, écossais) puis Newton et Leibniz qui furent d'importants contributeurs en calcul infinitésimal (calcul différentiel et calcul intégral). Le principe, de voir le domaine sous la courbe comme suite de rectangles adjacents, est à la base même de la théorie de l'intégration que nous manipulerons. C'est Riemann, à qui l'on doit sa formalisation dans la seconde moitié du XIXème siècle, qui a donné son nom à cette théorie. Il existe en revanche d'autres théories d'intégration : l'intégrale de Lebesgue (début du XXème siècle) qui a abouti à toute la théorie de la mesure et aux probabilités, mais aussi l'intégrale de Kurzweil-Henstock (peu après 1950). Cette dernière, développée indépendamment par Jaroslav Kurzweil (1936-2022, tchèque) et Ralph Henstock (1923-2007, anglais) a l'avantage d'être presque aussi simple à aborder que l'intégrale de Riemann, tout en étant aussi puissante que celle de Lebesgue! De la lecture sur le sujet ici. Bref, on s'égare...

Pour bien démarrer...

1 # C'est l'occasion de revoir les études de fonctions (limites, continuité, dérivabilité) et de suites (limites).

2 # Il faut savoir parfaitement dériver :

Fonction	Dérivée	Valable sur
	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
	$x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$
	$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
	$x \longmapsto \frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
	$x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
	$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
	$x \longmapsto e^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$	$\mathbb{R}$
	$u'e^u$	intervalles sur lesquels u est dérivable
	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	intervalles sur lesquels u est dérivable et strictement positive
	$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	intervalles sur lesquels u est dérivable
	$\frac{u'}{u}$	intervalles sur lesquels u est dérivable et ne s'annule pas
	$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	intervalles sur lesquels u est dérivable et ne s'annule pas
$f \circ g$		là où tout se passe bien

Dans tout le chapitre, a et b désigneront des réels tels que $a < b$ et f sera une fonction définie sur $[a;b]$.

I Définition et premières propriétés

Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ du plan. L'unité d'aire (u.a) est alors l'aire du *rectangle* de côtés [OI] et [OJ].

Définitions 1 - Intégrale d'une fonction de signe constant

D1# Si f est *continue et positive* sur $[a;b]$, on appelle **intégrale de f sur $[a;b]$** le nombre qui exprime l'aire, en u.a, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

D2# Si f est *continue et négative* sur $[a;b]$, on appelle **intégrale de f sur $[a;b]$** *l'opposé* du nombre qui exprime l'aire, en u.a, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Notation / vocabulaire

- Dans les deux cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ cette intégrale. La variable x est *muette* (comme l'indice d'une somme) : on ne l'introduit donc pas...
- dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, la fonction f est appelée **intégrande**.

Dans le cas d'une fonction qui change de signe un nombre fini de fois sur $[a;b]$:

☞ Pour info...

Plus compliqué si f s'annule une infinité de fois sur $[a;b]$, mais nous ne rencontrerons pas de telles fonctions. Pour une construction plus précise (hors programme) de la notion d'intégrale : ici.

✘ Attention !

Dans ce cas, les aires se "compensent"... Les intégrales de fonctions non positives ne s'écrivent pas en u.a, puisque leur interprétation en terme d'aire n'est pas correcte !

Et par convention, on pose :

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

Exemples 1

Avec l'aide éventuelle de schémas, on obtient :

E1 $\displaystyle\int_2^5 2dx =$ $\qquad\displaystyle\int_{-2}^4 \frac{-1}{3}dx =$ $\qquad$ et plus généralement, pour tout $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b \mathrm{C}dx =$

E2 $\displaystyle\int_0^4 xdx =$ $\qquad$ et $\displaystyle\int_4^0 xdx =$

E3 $\forall b > 0,\ \displaystyle\int_0^b xdx =$

E4 $\displaystyle\int_0^3 (t+1)dt =$

E5 $\displaystyle\int_{-2}^2 |x|dx =$

E6 $\displaystyle\int_{-3}^3 zdz =$

Petite remarque

Plus généralement, pour tout réel a :
- si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx =$
- si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx =$

On peut même définir l'intégrale d'une fonction qui n'est pas continue...

Définition 2 - Fonction continue par morceaux

On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a;b]$ lorsqu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ telle que chaque restriction de f à $]a_i;a_{i+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[a_i;a_{i+1}]$.
Autrement dit : f est **continue par morceaux** sur $[a;b]$ lorsque f est continue sur $]a_i;a_{i+1}[$ et admet des *limites finies* à droite en a_i et à gauche en a_{i+1} pour $i \in [\![0;n-1]\!]$.

Graphiquement :

Voici les propriétés importantes sur l'intégrale. Certaines seront admises et découlent de la notion intuitive d'aire et de la construction d'intégrale (mise sous le tapis) ; quand d'autres pourront être démontrées à partir des premières...

Propriétés 1

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$, alors :

P1# $\displaystyle\int_a^a f(x)dx =$

P2# pour tous $\alpha,\beta,\gamma \in [a;b]$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx =$ *(relation de Chasles)*

P3# pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx =$ *(linéarité)*

P4# si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors *(croissance)*

P5# en particulier : $\displaystyle(b-a)\min_{x\in[a;b]}\big(f(x)\big) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\max_{x\in[a;b]}\big(f(x)\big)$

P6# $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

P7# si f est **continue et positive**, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0 \iff \forall x \in [a;b],\ f(x) = 0.$

Petite remarque — Puisque $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$, la relation de Chasles est valable peu importe l'ordre de α,β,γ...

✘ Attention ! P4 n'est pas une équivalence !!

✘ Attention ! ATTENTION à l'ordre des bornes !
P4, P5 et P6 fournissent des inégalités inversées si les bornes sont dans l'ordre décroissant...

★ Démonstration :

P5#

P6#

P7#

★

Exemple 2

Considérons la suite (I_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

- Justifions que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \geq 0$.

- Étudions les variations de la suite (I_n).

- Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que pour tout $x \in [0;1]$, $x^n e^{-x} \leq x^n$.

- On donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

- Concluons sur la limite de la suite (I_n).

✓ **Rigueur !**
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0;1]$, l'intégrale I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II Théorème fondamental de l'analyse

C'est le théorème qui relie les intégrales aux dérivées... Et qui donne sens à tout ce qui va suivre.

Théorème 1 - Théorème fondamental de l'analyse

Si f est continue sur $[a;b]$, alors la fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ et :

$$\forall x \in [a;b],\ \mathrm{F}'(x) = f(x)$$

★ DÉMONSTRATION :

★

III Primitive d'une fonction continue

DÉFINITION 3 - PRIMITIVE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Une **primitive de f sur I** est une fonction F, définie et dérivable sur I, telle que : $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}'(x) = f(x)$.

PETITE REMARQUE

Si f est continue sur I, alors F est $\mathcal{C}^1$ sur I.

III.1 Primitives usuelles...

Le plus important ici... est de bien savoir dériver !

EXEMPLES 3

À RETENIR...

Assez souvent utilisée... Il est bon de la connaître.

E1 En considérant $\mathrm{F} : x \longmapsto x\ln(x) - x$, déterminons une primitive de ln sur $\mathbb{R}_*^+$.

E2 Donnons deux primitives de $f : x \longmapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$:

E3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Donnons une primitive de $f : x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$:

E4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donnons une primitive de $f : x \longmapsto x^\alpha$ sur .... :

E5 Donnons une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} + e^x - 5$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$:

E6 Donnons une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + e^{-x}$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$:

E7 Donnons une primitive de $f : x \longmapsto e^{2x} + \dfrac{1}{3}x$ sur $\mathbb{R}$:

E8 Donnons une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$:

E9 Donnons une primitive de $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$:

E10 Donnons une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ sur $\mathbb{R}$:

E11 Donnons une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{3x}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$:

✘ Attention ! $\ln(x)$ n'existe que pour $x > 0$...

♡ Astuce du chef ! ♡

III.2 Existence & unicité sous condition...

Théorème 2 - Existence & unicité (sous condition) des primitives

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors :

1. f admet une infinité de primitives sur I *(infinité de primitives)*
2. les primitives de f sont *égales à constante additive près.*
   Autrement dit, si F et G sont deux primitives de f, alors :
   $$\exists C \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C$$
3. pour tous $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe *une unique* primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$ *(unicité sous condition)*

Important ! Il existe des fonctions continues dont on ne peut pas exprimer les primitives avec les fonctions usuelles, c'est le cas par exemple de la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$. Le théorème de Liouville (qui est d'un niveau bien supérieur à ce cours) évoque ce sujet.

★ Démonstration :

★ Classique ! ★ **La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.** C'est une version plus fine du théorème fondamental de l'analyse.

★

En clair... Si on connaît une primitive F de f, alors on connaît **toutes** les primitives : l'ensemble des primitives de f est $\{x \longmapsto F(x) + C \ / \ C \in \mathbb{R}\}$.
Et si on impose une valeur particulière, ne reste plus qu'une seule primitive qui convient.

Terminons cette partie avec un théorème (dont la démonstration découle des théorèmes 1 et 2) qui ancrera définitivement le lien primitive/intégrale et qui sera très souvent utilisé :

Théorème 3

Si f est continue sur $[a;b]$ et si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

★Subtile...★
Ce théorème affirme, au passage, que la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive F (et heureusement) !

✎ Notation
Les **crochets d'intégration** : très pratiques pour faire les choses en deux temps : trouver une primitive, puis calculer.

★ Démonstration :

★

♣ Méthode 1 ♣ Pour dériver une fonction φ définie par une intégrale :

- Si $\varphi : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$, alors on utilise directement le théorème fondamental de l'analyse : $\varphi' = f$.
- S'il existe deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J, à valeurs dans I telles que $\varphi : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$, alors :
  - ◇ puisque f est continue sur I, elle admet des primitives qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Notons F l'une d'elles.
  - ◇ Ainsi : $\forall x \in \mathrm{J},\ \varphi(x) = \mathrm{F}\big(v(x)\big) - \mathrm{F}\big(u(x)\big)$.
  - ◇ Or :
    - ⇝ u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, et à valeurs dans I,
    - ⇝ F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

    Donc : φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et, pour tout $x \in \mathrm{J}$:

$$\begin{array}{rcl}\varphi'(x) & = & v'(x)\mathrm{F}'\big(v(x)\big) - u'(x)\mathrm{F}'\big(u(x)\big) \\ & = & v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big)\end{array}$$

✓ Rigueur !
Pour justifier que φ est définie sur J.
Soit $x \in \mathrm{J}$. *Il s'agit de montrer que $\varphi(x)$ existe.*
• f est continue sur I
• $u(x) \in \mathrm{I}$ et $v(x) \in \mathrm{I}$
Donc f est continue sur $[u(x), v(x)]$ (ou $[v(x), u(x)]$).
Ainsi, $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ existe.

Exemples 4

E1 Considérons $\varphi : x \longmapsto \int_0^{x^2} \sqrt{t}e^{-t^3}dt$.

- Justifions que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

♣ Méthode !
Tout l'enjeu consiste à vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}e^{-t^3}$ est continue sur $[0; x^2]$.

- Démontrons que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis déterminons l'expression de sa dérivée.

E2 Démontrons que la fonction $\varphi : x \longmapsto \int_{-x}^{2x} e^{-t} \ln(1+t^2)dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa dérivée.

IV Méthodes de calculs d'intégrales.

IV.1 "A vue" !

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour calculer** $\int_a^b f(x)dx$:

- on cherche une primitive F de f
- puis : $\int_a^b f(t)dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

Petite remarque

Si on ne trouve pas de primitive de f, on peut regarder les méthodes suivantes...

Exemples 5

E1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n dx =$

E2 $\int_1^e \frac{1}{x} dx =$

IV.2 Par intégration par parties

Théorème 4 - Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

♡ Astuce du chef ! ♡

Ce théorème peut aussi permettre d'obtenir une primitive d'un produit : il suffit de calculer $\int_a^x u'v$...

★ Démonstration :

★

♣ **Méthode 3** ♣ **On peut éventuellement utiliser une IPP quand :**

- on ne peut pas trouver de primitive à vue
- il est plus facile de calculer $\int_a^b u'v$ que $\int_a^b uv'$
- on a des intégrandes de la forme $x \longmapsto x^n e^{x^m}$ (avec $n \neq m-1$) ou bien $x \longmapsto x^n \ln(x)$

Réflexe !

On pense à effectuer une IPP quand l'objectif de la question est d'obtenir une relation de récurrence sur une suite d'intégrales.

EXEMPLES 6

A l'aide d'une intégration par parties, calculons les intégrales suivantes :

E1 $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$

Posons : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto x \\ v : x \longmapsto -e^{-x} \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left|\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{array}\right.$.

Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-x}dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)dx \\
&= \Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\
&= \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx \\
&= -e^{-1} - \Big[e^{-x}\Big]_0^1 \\
&= -e^{-1} - \left(e^{-1} - 1\right) \\
&= 1 - 2e^{-1}
\end{aligned}$$

PETITE REMARQUE

On a le choix pour v, puisqu'il s'agit en fait de poser v' et de la primitiver...

RÉDACTION

Les étapes avec les formules ne sont pas nécessaires ! En pratique, on passera directement à la troisième ligne.

E2 $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)dx$

✘ ATTENTION !

Il y a toujours deux possibilités pour effectuer une IPP... L'habitude permettra de ne pas se tromper, mais partez déjà du principe qu'il faut savoir primitiver v'...

E3 $\displaystyle\int_1^x \ln(t)dt$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}_*^+$.

IV.3 Avec changement de variable...

Voici le théorème qui est la clé de la méthode que nous verrons ensuite...

Théorème 5 - Changement de variable

Si f est continue sur un intervalle I et si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ telle que $g([a,b]) \subset \mathrm{I}$, alors :

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

★ Démonstration :

★

★Subtile...★

On pose t en fonction de x, mais il est parfois plus commode d'avoir x en fonction de t... C'est pour cela que le changement de variable idéal est bijectif ; et c'est dans ce cadre-là qu'il faut être capable de travailler.

On obtient ainsi : $\int_c^d f(t)dt = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f\big(g(x)\big)g'(x)dx$...

♣ **Méthode 4** ♣ **Quand et comment effectuer un changement de variable ?**

- la plupart du temps, il sera donné, sauf éventuellement si c'est un changement de variable affine...
- en pratique, on écrira $t = g(x)$ et dans ce cas $dt = g'(x)dx$
- utiliser la formule du changement de variable

Exemples 7

E1 **A l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{-x}}dx$.**

E2 **A l'aide du changement de variable $t =$ ...., calculons $\displaystyle\int_0^3 e^{-\sqrt{x+1}}dx$.**