Exercices du chapitre 19
Intégrales sur un segment

●○○○ Exercice 1 - Recherche de primitives

Dans chaque cas, donner une primitive F de f.

1. $f : x \longmapsto 3x^2 + x - 1$
2. $f : x \longmapsto e^x + \dfrac{1}{x}$
3. $f : x \longmapsto e^{-x} + \dfrac{1}{x^2}$
4. $f : x \longmapsto e^{-2x} - \dfrac{3}{x^3}$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3}e^{-3x} + \dfrac{1}{x^4}$
6. $f : x \longmapsto 2xe^{x^2}$
7. $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$
8. $f : x \longmapsto \dfrac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1}}$
9. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
10. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$
11. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$
12. $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2 + 3}$
13. $f : x \longmapsto (2x + 1)^4$
14. $f : x \longmapsto \dfrac{-x}{(x^2 + 1)^2}$
15. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^3}$
16. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}\big(\ln(x)\big)^2$
17. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
18. $f : x \longmapsto 3^x$
19. $f : x \longmapsto e^{-e^{-x} - x}$

●○○○ Exercice 2 - Primitive avec condition

Dans chaque cas, donner l'unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

1. $f : x \longmapsto e^{-x} + \dfrac{2}{x}$, $\quad x_0 = 1, y_0 = 1$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}e^{3x} + 2x^4 - 1$, $\quad x_0 = 0, y_0 = 0$

●○○○ Exercice 3 - Calcul d'intégrales

Justifier l'existence des intégrales suivantes et les calculer :

1. $\displaystyle\int_{10}^{0} e^{-x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^4}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4}\,dx$
4. $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{x-1}{x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int_{n}^{n+1} \frac{1}{4x}\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
6. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int_{1}^{10} \frac{1}{k}\,dx$ avec $k \in \mathbb{R}^*$
8. $\displaystyle\int_{-7}^{7} (x^3 + x)\,dx$
9. $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$
10. $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$
11. $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{\big(\ln(x)\big)^3}{x}\,dx$
12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}\,dx$
13. $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{-\lambda x}\,dx$, pour $\lambda > 0$
14. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{x+1}\,dx$
15. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x(x+1)}\,dx$
16. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x + 1}$

●●○○ Exercice 4 - IPP

A l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{1}^{2} (2-x)e^{-x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{2x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_{e}^{e^2} x^2\ln(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2e^x\,dx$
6. $\displaystyle\int_{0}^{x} te^{-\lambda t}\,dt$, pour $x, \lambda > 0$

●●○○ Exercice 5 - Changement de variable

A l'aide d'un changement de variable (parfois indiqué), calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{2x+1}\,dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}}\,dx$ $\;(t = 1 + e^x)$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ $\;(t = \sqrt{1+e^x})$
4. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$ $\;(t = \sqrt{x+1})$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{-x}}\,dx$
6. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)e^{-\ln(x)^2}}{x}\,dx$

●○○○ Exercice 6 - Suites d'intégrales

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$:

1. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2}\,dx$
2. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$
3. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$
4. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^2}\,dx$
5. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^n\,dx$
6. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 xe^{-n^2x}\,dx$

●○○○ Exercice 7 - Suites d'intégrales

Considérons la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

1. Dériver la fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto (1+x)\ln(1+x)-(1+x)$.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
4. Conclure que (I_n) converge et déterminer sa limite.

●●○○ Exercice 8 - Suites d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\,dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Démontrer que la suite (I_n) est bornée.
3. Étudier la monotonie de la suite (I_n) et en déduire qu'elle est convergente.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x(1-x^n)\,dx \leq \mathrm{I}_n \leq \int_0^1 x\,dx$. Donner alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

●●○○ Exercice 9 - Suites d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx$.

1. Étudier les variations de la suite (I_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement de I_n entre deux entiers. En déduire que (I_n) converge.
3. Étudier la fonction $f : x \longmapsto x(1-x)$ sur $[0;1]$ puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{4^n}$.
4. En déduire la limite de la suite (I_n).

●●○○ Exercice 10 - Suites d'intégrales

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$.

1. Calculer I_0.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{e}{n!}$.
3. En déduire la limite de la suite (I_n).
4. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.
5. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k!}$ et donner sa somme.

●●○○ Exercice 11 - Interversion limite / intégrale

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto 2nxe^{-nx^2}$.

Que dire de l'égalité suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$?

●●○○ Exercice 12 - Fonction définie par une intégrale

Considérons $\mathrm{F} : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Étudier la parité de F.
3. Dresser le tableau de signes de F.
4. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et déterminer sa dérivée.
5. En déduire le tableau de variations de F sur son ensemble de définition.
6. Justifier que pour tout $t \in]0;1]$, on a $\dfrac{e^{-1}}{t} \leq \dfrac{e^{-t}}{t} \leq \dfrac{1}{t}$. En déduire un encadrement de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in]0;1]$ puis $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \mathrm{F}(x)$.

●●○○ **Exercice 13** - **Fonction définie par une intégrale**

Considérons $F : x \longmapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Justifier que F est définie sur $]0;+\infty[$.
2. Étudier le signe de $F(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.
3. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et déterminer sa dérivée.
4. Démontrer que pour tout $x \in]0;1]$, $F(x) \leq e^x \ln(x)$. En déduire que F possède une limite en 0 et la déterminer.
5. Dresser le tableau de variations complet de F sur $]0;+\infty[$.

●●○○ **Exercice 14** - **Fonction définie par une intégrale**

On considère la fonction $g : x \longmapsto \int_{-x}^x \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction g est impaire.
3. Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).
6. Justifier que g admet une limite en $+\infty$.
7. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq \frac{e^x - e^{-x}}{1+x^2}$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ puis $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

●●○○ **Exercice 15** - **Fonction définie par une intégrale**

Considérons $F : x \longmapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Étudier la parité de F, son signe ainsi que ses variations.
2. Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leq 1$. Que peut-on en déduire sur le comportement asymptotique de F en $\pm\infty$?
3. On pose, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.
   - 3.a. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et déterminer $G'(x)$. Que peut-on dire ?
   - 3.b. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 2F(1)$.

●●○○ **Exercice 16** - **Fonction définie par une intégrale**

On définit la fonction f sur $[0;1]$ par : $f(0) = 0$, $f(1) = \ln(2)$ et pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $[0;1]$.
2.
   - 2.a. Soit $x \in]0;1[$. Calculer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.
   - 2.b. En déduire que pour tout $x \in]0;1[$: $x^2 \ln(2) \leq f(x) \leq x\ln(2)$.
   - 2.c. En déduire que f est continue sur $[0;1]$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ puis déterminer ses variations.

●●○○ **Exercice 17** - **Fonction définie par une intégrale**

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0) = \frac{1}{2}$ et pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t+1} dt$.

1.
   - 1.a. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\forall t \in [0;x]$, $\frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2}$.
   - 1.b. Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
   - 1.c. En déduire que f est continue en 0.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

●●○○ **Exercice 18** - **Série harmonique alternée**

L'objectif de cet exercice est d'établir la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ et de déterminer sa somme.

1. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}^-$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n t^{k-1}$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) + \int_x^0 \frac{t^n}{1-t} dt$.

3. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-1}^{0}\frac{t^n}{1-t}dt\right)=0$.

4. En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^k}{k}$ et de déterminer sa somme.

●●○○ EXERCICE 19 - COMPARAISON SÉRIES / INTÉGRALES

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[2;+\infty[$. Posons, pour tout $x\in[\![2;+\infty[\![$, $\mathrm{F}(x)=\int_2^x f(t)dt$; ainsi que, pour tout $n\in[\![2;+\infty[\![$, $\mathrm{S}_n=\sum_{k=2}^{n}f(k)$.

1. Justifier que F possède une limite en $+\infty$. De même pour $(\mathrm{S}_n)_{n\geq2}$.
2. Soit $k\in[\![2;+\infty[\![$. Établir : $f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(t)dt\leq f(k)$.
3. En déduire : $\forall n\in[\![2;+\infty[\![$, $\mathrm{S}_{n+1}-\mathrm{S}_2\leq\mathrm{F}(n+1)\leq\mathrm{S}_n$.
4. Conclure sur le résultat suivant :

   la série $\sum_{n\geq2}f(n)$ est convergente si, et seulement si, F possède une limite finie en $+\infty$.

5. **Applications.**
   - 5.a. Redémontrer le théorème sur les séries de Riemann.
   - 5.b. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur le réel α, pour que la série $\sum_{n\geq2}\frac{1}{n\ln(n)^\alpha}$ soit convergente.

●●○○ EXERCICE 20 - SOMMES DE RIEMANN

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$. Soient également :

$$\mathrm{I}=\int_a^b f(t)dt\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{S}_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k),\ \text{où}\ \forall k\in[\![0;n]\!],\ x_k=a+k\frac{b-a}{n}$$

1. Justifier que $|f'|$ admet un maximum sur $[a;b]$. *On note alors* $\mathrm{M}=\max_{t\in[a;b]}|f'(t)|$.
2. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)dt$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0;n-1]\!]$. Vérifier que $\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x_k)dt=\frac{b-a}{n}f(x_k)$.
4. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}-\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\big(f(t)-f(x_k)\big)dt$.
5. Montrer que pour tout $t\in[x_k;x_{k+1}]$, $|f(t)-f(x_k)|\leq\mathrm{M}|t-x_k|\leq\mathrm{M}\frac{b-a}{n}$.
6. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|\mathrm{I}-\mathrm{S}_n|\leq\mathrm{M}\frac{(b-a)^2}{n}$ ainsi que la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
7. **Application.** Écrire un programme Python qui permet d'obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de $\int_0^1 e^{t^2}dt$.

●●●○ EXERCICE 21 - FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL

1. Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ainsi que $a\in\mathrm{I}$.
   Établir :
   $$\forall x\in\mathrm{I},\ \forall n\in\mathbb{N},\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$
2. Que devient la formule si I contient 0 et que l'on prend $a=0$?
3. **Applications.**
   - 3.a.
     - 3.a.i. Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$. Démontrer : $\forall n\in[\![\lfloor x\rfloor,+\infty[\![$, $\frac{x^n}{n!}\leq\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{n-\lfloor x\rfloor}\frac{x^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!}$.
     - 3.a.ii. En déduire, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^n}{n!}$.
     - 3.a.iii. Conclure que pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum\frac{x^n}{n!}$ est convergente, de somme égale à e^x.
   - 3.b. Montrer que pour tout $x\in]-1;1[$, la série $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ est convergente, de somme égale à $\ln(1+x)$.