20

Algèbre linéaire

Applications linéaires entre espaces vectoriels

Introduction...

Quiconque parle d'applications linéaires en dimension finie pense nécessairement au célèbre Théo-Raym Durrant (1843-2017, israelo-argentino-chinois), dont un très célèbre théorème porte son nom...
Sa contribution, tout comme celle de Izo Morfyssm (1917-2043, islando-arménien), fut considérable dans l'étude des applications linéaires. En effet, on leur doit un remarquable résultat sur le dual de l'espace vectoriel des classes d'équivalences des distributions tempérées modulo les formes quadratiques réelles : il est isomorphe au corps des matrices nilpotentes sur l'anneau $\mathbb{Z}/\pi\mathbb{Z}$. La démonstration de ce théorème repose, en partie, sur l'étude des formes modulaires définies sur la Lemniscate de Kolmogorov-Smirnov, à valeurs dans le demi-plan de Poincaré. Ce résultat, qui ne sera pas démontré dans ce cours (la marge étant trop étroite pour la contenir) pourrait en revanche faire l'objet d'un problème de "TOP3" : un grand classique donc.

Bref, nous commencerons modestement par l'étude des applications linéaires (les mêmes qu'en quatrième en fait)...

Pour bien démarrer...

1 # Revoir les chapitres 9 (matrices) et 15 (espaces vectoriels).

2 # La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ est une famille libre de vecteurs de l'espace vectoriel E lorsque :

3 # La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de vecteurs de l'espace vectoriel E lorsque :

4 # Une famille est une base si, et seulement si :

5 # La dimension d'un espace vectoriel est :

6 # Soient E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. **Définition :** F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

7 # Soient E, F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application.

- **Définition :** f est injective lorsque :
- **Définition :** f est surjective lorsque :

Dans tout ce chapitre, E et F sont des espaces vectoriels réels.

I Définition et premiers exemples

Définitions 1 - Application linéaire

D1# Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une **application linéaire** lorsque :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

D2# Un **endomorphisme** est une application linéaire de E dans E.

D3# Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.

D4# Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

> **En gros...** Une application linéaire est une application compatible avec les combinaisons linéaires !

> **Notation** On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F ; et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ (l'ensemble des endomorphismes de E).

Viennent naturellement quelques propriétés immédiates :

Propriétés 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

P1# $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

P2# $\forall \vec{u} \in E,\ f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$

P3# $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n \in E\ :\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{u}_i).$

> ♡ **Astuce du chef !** ♡ Les deux premières propriétés peuvent aussi servir pour montrer qu'une application n'est pas linéaire...

★ Démonstration :

★

Exemples 1

E1 L'application $\vec{u} \in E \longmapsto \vec{u}$ est un endomorphisme, et même un automorphisme, de E : c'est l'**identité**, notée id_E.

E2 L'application $\vec{u} \in E \longmapsto \vec{0}_F$ est une application linéaire de E dans F : c'est l'application linéaire nulle.

E3 L'application $P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

E4 Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $f : x \longmapsto ax$, avec $a \in \mathbb{R}$.

> **Petite remarque** Quel scoop... on sait ça depuis la quatrième !

E5 L'application $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tA$ est une application linéaire.

E6 L'application qui, à une variable aléatoire, associe son espérance, est une application linéaire. En revanche, l'application qui, à une variable aléatoire, associe sa variance, n'est pas une application linéaire.

> **Pourquoi ?** On sait que $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$... Mais, de façon générale, $\mathbb{V}(aX+bY) \neq a\mathbb{V}(X) + b\mathbb{V}(Y)$...

E7 Considérons l'application f définie sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ par : $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix}$. **Montrons que f est une application linéaire de .... dans ....**

E8 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque et f l'application définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$. **Montrons que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.**

Vocabulaire
On dira que f est l'application linéaire *canoniquement associée* à A.

E9 Soit φ l'application définie sur $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui, à toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \int_0^{x^2} t f(t)\,dt$. **Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.**

Confusion d'objets !
$\varphi(f)$ est une fonction !

E10 Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (3x-y, x+5y+1)$. **Montrons que f n'est pas une application linéaire.**

E11 Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = P^2 + P'$. **Montrons que f n'est pas une application linéaire.**

Propriétés 2 - Structure de $\mathcal{L}(E,F)$

Soient E, F, G trois espaces vectoriels réels.

P1# $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel réel.

P2# Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(\ldots,\ldots)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(\ldots,\ldots)$.

Autrement dit :
Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire... Et la composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

★ Démonstration :

★

Propriété 3

Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

★ Démonstration :

☞ **Rappels...**

Si f est une application bijective de A dans B, alors f^{-1} est bijective de B dans A ; et on a aussi :

$f \circ f^{-1} = \ldots\ldots$; $f^{-1} \circ f = \ldots\ldots$

★

II Noyau & image d'une application linéaire

Dans toute la suite, f désigne une application linéaire de E dans F.

Définition 2 - Noyau d'une application linéaire

Le **noyau** de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble défini par :

$$\ker(f) = \left\{\vec{u} \in \mathrm{E} \;/\; f(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathrm{F}}\right\}$$

Propriété 4

$\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

Un résultat très utile en pratique qui relie noyau et injectivité d'une application linéaire :

Propriété 5 - Injectivité et noyau

f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$

✘ Attention !

Cela ne veut pas dire que $\ker(f)$ est vide (un espace vectoriel n'est jamais vide) : mais seulement qu'il est *réduit au vecteur nul.*

Démonstration :

★Subtile...★

On a, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$:

$$\begin{aligned} & f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \\ \iff & f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0}_F \\ \iff & f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}_F \\ \iff & \vec{u} - \vec{v} \in \ker(f) \\ \iff & \exists \vec{w} \in \ker(f) \ / \ \vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \end{aligned}$$

On dit parfois que le noyau mesure *le défaut d'injectivité...*

Exemples 2

E1 Reprenons $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix}$ (Exemples 1 - E7). **Déterminons son noyau. L'application linéaire f est-elle injective ?**

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff$$

E2 Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'application f définie sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par : $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$. On sait (Exemples 1 - E8) que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. **Déterminons son noyau. L'application linéaire f est-elle injective ?**

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in \ker(f) \iff$$

E3 L'application $f : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto P'$ n'est pas injective, car $\ker(f) =$

En dimension finie (ce qui sera, sauf cas très exceptionnels, toujours le cas), la recherche du noyau d'une application linéaire peut toujours se ramener à la résolution d'un système linéaire homogène.

Définition 3 - Image d'une application linéaire

L'**image** de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \vec{v} \in F \ /\ \exists\ \vec{u} \in E,\ \vec{v} = f(\vec{u}) \right\} = \left\{ f(\vec{u}) \ /\ \vec{u} \in E \right\}$$

☞ **Rappels...**

• En fait : $\mathrm{Im}(f) = f(E)$. C'est l'ensemble de toutes les images des vecteurs de E par f...
• On avait également vu que f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$. On ne peut pas faire mieux dans le cas des applications linéaires.

Voici une propriété que l'on utilisera pour déterminer l'image d'une application linéaire :

Propriété 6

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et même :

$$\text{si } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \text{ est une famille génératrice de E, alors } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\Big)$$

♣ Méthode !
En pratique, on prend la base canonique de E...

★ Démonstration :

★

Exemples 3

E1 Reprenons $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix}$. **Déterminons son image. L'application linéaire f est-elle surjective ?**

E2 Justifions que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ y-z \end{pmatrix}$ est une application linéaire. Déterminons son image. L'application linéaire f est-elle surjective ?

Petite partie à la limite du programme : espaces vectoriels isomorphes et dimension

Soient E un espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots, \vec{e}_n$ des vecteurs de E. On pose f l'application suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \end{array} \right.$$

Sans difficulté, on vérifie que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathrm{E})$. De plus :

- par définition, f est surjective si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E ;
- par définition : $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots, \vec{e}_n)$ est libre. D'après la propriété 3, f est donc injective si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots, \vec{e}_n)$ est libre.

On en déduit donc : f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans E si, et seulement si, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E. En particulier, si f est un isomorphisme, alors $\dim(\mathrm{E}) = n$. On retient donc pour l'instant :

$$\boxed{\text{si } \mathbb{R}^n \text{ et E sont isomorphes, alors } \dim(\mathrm{E}) = n}$$

Petite remarque
Au passage, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est l'image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^n$...

Vocabulaire
On dit que deux EV sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme entre les deux.

On est en droit de se poser la question de savoir si la réciproque de cette implication est encore valable... Et oui, c'est bien le cas !
Pour cela, supposons que $\dim(\mathrm{E}) = n$ et considérons $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et posons f l'application suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \end{array} \right.$$

D'après ce qui précède, puisque $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, f est un isomorphisme. D'où :

$$\boxed{\text{si } \dim(\mathrm{E}) = n, \text{ alors E est isomorphe à } \mathbb{R}^n}$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 1 - Isomorphisme et dimension

$\dim(\mathrm{E}) = n$ si, et seulement si, E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...)

☞ Pour info...
Et par conséquent : $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$ ssi E et F sont isomorphes.

Bien... tout ça pour quoi ?

> L'impact est en fait assez considérable : tout espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à un $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Autrement dit : tout vecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être vu comme une matrice ligne (ou colonne) : la matrice de ses coordonnées, une fois une base de E choisie.

Petite remarque
Ce résultat est à la fois puissant et décevant : tous les EV de dimension finie n ont la même tête que $\mathbb{R}^n$. C'est génial et peu original à la fois...

III Théorème du rang et conséquences

Définition 4 - Rang d'une application linéaire

Le **rang** de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

On a immédiatement :

Propriétés 7

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

P1# $\mathrm{rg}(f) \leq \min\big(\dim(\mathrm{E}), \dim(\mathrm{F})\big)$

P2# f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{F})$

Petite remarque
Par conséquent, si $\dim(\mathrm{E}) < \dim(\mathrm{F})$, alors f ne peut pas être surjective !

★ Démonstration :

Et pour terminer, un théorème très important en algèbre linéaire :

Théorème 2 - théorème du rang

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors :

$$\dim(E) = \dim\Big(\ker(f)\Big) + \mathrm{rg}(f)$$

✘ Attention ! C'est la dimension de l'espace de départ qui entre en jeu !

Démonstration : Allez voir en maths appro !

♣ Méthode 1 ♣ Pour déterminer noyau et image d'une application linéaire :

1. on commence par celui qui nous semble le plus simple (ou celui qui est demandé en premier),
2. on utilise le théorème du rang pour avoir la dimension de l'autre, et le déterminer par ensuite.

Exemples 4

E1 Reprenons $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ y-z \end{pmatrix}$ (Exemples 3 - E2). On avait obtenu $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Ainsi, d'après le théorème du rang :

$$\dim\Big(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\Big) = 2 + \dim\Big(\ker(f)\Big)$$

Autrement dit :

$$\dim\Big(\ker(f)\Big) = 1$$

De plus, en remarquant que $\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} \in \ker(f)$, on peut en déduire que $\ker(f) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Par conséquent, la famille : $\left(\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}\right)$ est :

- génératrice de $\ker(f)$,
- libre car

Conclusion : $\left(\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(f)$.

E2 Justifions que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Déterminons $\ker(f)$, puis le rang de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Deux conséquences importantes du théorème du rang :

PROPRIÉTÉ 8

Soient E et F deux espace vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors :

$$\begin{tikzcd} f \text{ injective} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & f \text{ surjective} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & f \text{ bijective} & \end{tikzcd}$$

Autrement dit, si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors :

$$\begin{tikzcd} \ker(f) = \{\vec{0}_E\} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathrm{rg}(f) = n \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & f \text{ bijective} & \end{tikzcd}$$

IMPORTANT !
Cas particulier important : cette propriété est vraie pour les endomorphismes.

★ DÉMONSTRATION : **Supposons que $\dim(E) = \dim(F)$ et raisonnons par cycle, c'est à dire montrons :**

$$f \text{ injective} \overset{(1)}{\Longrightarrow} f \text{ surjective} \overset{(2)}{\Longrightarrow} f \text{ bijective} \overset{(3)}{\Longrightarrow} f \text{ injective.}$$

$\star$

IV Lien application linéaire & matrice...

IV.1 Représentation matricielle d'une application linéaire

On commence déjà par un premier résultat élémentaire : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est une application linéaire.
En effet, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\lambda X_1 + \mu X_2) & = & A(\lambda X_1 + \mu X_2) \\ & = & \lambda AX_1 + \mu AX_2 \\ & = & \lambda\varphi(X_1) + \mu\varphi(X_2) \end{array}$$

✘ Attention !
Attention aux tailles des matrices... Puisque $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, X a p lignes ; donc la matrice A doit avoir p colonnes pour que le produit AX soit bien défini. Et on a bien $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, considérons E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et notons $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$. Munissons E d'une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p)$ et F d'une base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$. Soient également $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\vec{u} \in E$. Manipulons un peu l'expression de $\varphi(\vec{u})$...

Petite remarque
En pratique, on travaille le plus souvent dans les bases canoniques de E et F, même s'il est parfois utile de changer de base !

- Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p)$ est une base de E, il existe des uniques réels $x_1, x_2, ..., x_p$ tels que $\vec{u} = \sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j$.

  Par conséquent :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(\vec{u}) & = & \varphi\left(\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j\right) & \text{par linéarité de } \varphi \\ & = & \sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(\vec{e}_j) & \end{array}$$

- De plus, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, puisque $\varphi(\vec{e}_j) \in F$ et que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ est une base de F, il existe des uniques réels $a_{1,j}, a_{2,j}, ..., a_{n,j}$ tels que $\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i$.

Petite remarque
- $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p)$.
- $a_{1,j}, a_{2,j}, ..., a_{n,j}$ sont les coordonnées de $\vec{e}_j$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$.

On obtient ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(\vec{u}) & = & \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i\right) & \\ & = & \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_j a_{i,j} \vec{f}_i & \text{permutation des deux sommes} \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_j a_{i,j} \vec{f}_i & \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) \vec{f}_i & \end{array}$$

Par conséquent, les coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_n$ de $\varphi(\vec{u})$ dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$ sont définies par :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \quad (\star)$$

Et cela nous rappelle un produit matriciel ! Plus précisément, posons :

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_p})$;
- $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, la matrice colonne des coordonnées de $\varphi(\vec{u})$ (que l'on peut noter $\vec{v}$) dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$;
- $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice dont la colonne j contient les coordonnées de $\varphi(\vec{e_j})$ dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$.

On obtient ainsi :

$$(\star) \iff Y = AX$$

> Après avoir choisi une base de E et une base de F, la relation $\vec{v} = \varphi(\vec{u})$ se traduit matriciellement par : $Y = AX$ (avec les notations définies ci-dessus). Autrement dit, toute application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ peut être codée par une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et son action sur un vecteur $\vec{u} \in E$ se traduit simplement par le produit matriciel AX.

Afin d'énoncer clairement ce que nous venons d'établir, commençons par une définition :

Définition 5 - Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels tels que $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. Soit également $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $\mathcal{B}_E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_p})$ est une base de E et $\mathcal{B}_F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$ une base de F, alors on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées du vecteur $\varphi(\vec{e_j})$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \varphi(\vec{e_1}) & \dots & \varphi(\vec{e_p}) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & (\bigstar) & \\ & & \end{array} \right) & \begin{array}{c} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \\ \\ \vec{f_n} \end{array} \end{array}$$

Résumons ce que nous venons de faire dans le théorème suivant :

Théorème 3

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est une application linéaire.
2. Avec les notations de la définition précédente, pour tous $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in F$:
   - si X est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}_E$,
   - si Y est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}_F$,
   - si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$,

   alors :
   $$\vec{v} = \varphi(\vec{u}) \iff Y = AX$$
   Autrement dit :
   $$\vec{v} = \varphi(\vec{u}) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\vec{v}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{u})$$

Exemples 5

E1 Reprenons $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ y - z \end{pmatrix}$.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on remarque que $f(X) = AX$.
Par conséquent, f est ainsi une application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$; et la matrice A en est la matrice *canoniquement* associée.

✎ Notation

Si $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base $\mathcal{B}$, on note parfois $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u})$ la matrice colonne de ses coordonnées.

★ Subtile... ★

Puisque, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, les coordonnées de $\varphi(\vec{e_j})$ dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$ sont uniques, la matrice A ainsi définie est bien unique.

En gros...

En dimension finie : toutes les applications linéaires de E dans F se codent matriciellement sous la forme $X \longmapsto AX$! Là encore, c'est puissant et décevant à la fois...

Petite remarque

- Si $\dim(E) = \dim(F)$, la matrice est carrée.
- Si $E = F$, φ est un endomorphisme ; et en prenant la même base en départ et en arrivée, on considère la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$ que l'on notera simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

♣ Méthode !

Cela fournit donc une autre méthode pour montrer rapidement qu'une application (de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est linéaire...

Pourquoi ?

Pourquoi canoniquement ? Parce-que X et $f(X)$ sont tous deux exprimés dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

E2 Considérons $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+3z \end{pmatrix}$.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on remarque que $f(X) = AX$.

Par conséquent, f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; et A est sa matrice canoniquement associée. Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, puis donnons la matrice de f dans cette base.

E3 Considérons l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par : $\forall P(X) \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi\big(P(X)\big) = P(X) + (1-X)P'(X)$.

- Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

> ♣ **Méthode !**
> Pour montrer $\varphi\big(P(X)\big) \in \mathbb{R}_2[X]$, deux méthodes possibles :
> • écrire $P(X) = aX^2 + bX + c$ puis calculer $\varphi\big(P(X)\big)$...
> • travailler sur les degrés pour justifier que $\deg\big(\varphi(P(X))\big) \leq 2$.

- Déterminons la matrice φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, notée A.

- Déterminons maintenant, à l'aide des matrices, le noyau de φ.
Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $P(X)=a+bX+cX^2$.

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(P(X)\big)=\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}P(X)\in\ker(\varphi) &\iff \varphi(P(X))=0_{\mathbb{R}_2[X]}\\ &\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(P(X)\big)=0_{3,1}\\ &\iff A\times\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix}=0_{3,1}\end{aligned}$$

☞ **Rappel...**
La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

Confusion d'objets!

E4 Considérons $A=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}$ ainsi que $\varphi : M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\longmapsto AM$.
Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminons sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Nous venons d'établir qu'après avoir fixé des bases de E et F, chaque application linéaire $f\in\mathcal{L}(E,F)$ peut être représentée matriciellement par une unique matrice (c'est d'ailleurs ce qui permet de définir l'application Φ dans le théorème suivant). En fait, la réciproque est également vraie : une fois des bases de E et F choisies, chaque matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (où $p=\dim(E)$ et $n=\dim(F)$) définit une unique application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$...
On a même :

Théorème 4

Soient E et F deux espaces vectoriels tels que $\dim(E)=p$ et $\dim(F)=n$. Munissons E d'une base notée $\mathcal{B}_E$ et F d'une base notée $\mathcal{B}_F$.
L'application :

$$\Phi : \left|\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)\end{array}\right.$$

est un isomorphisme.
Par conséquent : $\dim\big(\mathcal{L}(E,F)\big)=np$.

Important!
Deux informations dans ce théorème :
• le caractère bijective : une fois des bases fixées, il y a correspondance unique entre une application linéaire et une matrice dans ces bases.
• le caractère linéaire : la matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires est la combinaison linéaire des matrices de chacune.

★ **Démonstration :**

- Écrivons $\mathcal{B}_E=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ et $\mathcal{B}_F=(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n)$.
  - Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $\varphi,\psi\in\mathcal{L}(E,F)$.
  Montrons $\Phi(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda\Phi(\varphi)+\mu\Phi(\psi)$; autrement dit, montrons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)+\mu\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\psi)$.
  Soient $i\in[\![1;n]\!]$ et $j\in[\![1;p]\!]$. Notons :
    - ⇝ $a_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$
    - ⇝ $b_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\psi)$
    - ⇝ $c_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda\varphi+\mu\psi)$

Par définition, on a :

$$\varphi(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{f_i} \quad ; \quad \psi(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\vec{f_i} \ ; \ (\lambda\varphi+\mu\psi)(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j}\vec{f_i}$$

Mais, on a également :

$$\begin{aligned}(\lambda\varphi+\mu\psi)(\vec{e_j}) &= \lambda\varphi(\vec{e_j})+\mu\psi(\vec{e_j}) \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{f_i}+\mu\sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\vec{f_i} \qquad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{i,j}+\mu b_{i,j})\vec{f_i}\end{aligned}$$

Or, la famille $(\vec{f_1},\dots,\vec{f_n})$ est une base de F, et par unicité de l'écriture d'un vecteur selon une base, on obtient :

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j}+\mu b_{i,j}$$

On a ainsi démontré :

$$\forall (i,j)\in [\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!],\ c_{i,j} = \lambda a_{i,j}+\mu b_{i,j}$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda\varphi+\mu\psi) = \lambda\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)+\mu\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\psi)$$

Conclusion : l'application Φ est linéaire.

- ⋄ Puisque Φ est linéaire, montrons qu'elle est injective en déterminant son noyau.
  Soit $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi\in\ker(\Phi) &\iff \Phi(\varphi) = 0_{n,p} \qquad \text{une matrice est nulle ssi chacune de ses colonnes est nulle} \\ &\iff \forall j\in[\![1;p]\!],\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(\varphi(\vec{e_j})\big) = 0_{n,1} \\ &\iff \forall j\in[\![1;p]\!],\ \varphi(\vec{e_j}) = \vec{0_F}\end{aligned}$$

  Or, $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ est une base de E et une application linéaire sur E est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie aux vecteurs d'une base de E, on en déduit que φ est l'application linéaire nulle.
  Ainsi :

$$\varphi\in\ker(\Phi) \iff \varphi = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

  Conclusion : $\ker(\Phi) = \{0_{\mathcal{L}(E,F)}\}$, et Φ est donc injective.

- ⋄ Montrons que Φ est surjective, autrement dit, montrons : $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \exists\varphi\in\mathcal{L}(E,F)\ /\ \Phi(\varphi) = A$.
  Soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Puisqu'une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie aux vecteurs d'une base de E (exercice 2) et que $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ est une base de E, considérons l'application linéaire φ définie par : $\forall j\in[\![1;p]\!],\ \varphi(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{f_i}$.
  De cette façon, on a :

$$\varphi\in\mathcal{L}(E,F)\ ;\ \Phi(\varphi) = A$$

  Conclusion : Φ est surjective.

Conclusion : Φ est un isomorphisme.

- Puisque Φ est un isomorphisme, on a :

$$\dim\big(\mathcal{L}(E,F)\big) = \dim\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\big)$$

Conclusion : $\dim\big(\mathcal{L}(E,F)\big) = np$.

★

IV.2 Noyau, image et rang d'une matrice

Vocabulaire
Si $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\longmapsto AX$ est l'application linéaire **canoniquement associée à A**.

D'après ce qui a été fait précédemment, et en notant $\varphi_A : X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\longmapsto AX$, on a :

- $\ker(\varphi_A) = \Big\{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\ /\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\Big\}$.
- Si $(E_1,E_2,\dots,E_p)$ représente la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathrm{Vect}\Big(\varphi_A(E_1),\varphi_A(E_2),\dots,\varphi_A(E_p)\Big)$.
  Mais, en notant, pour tout $j\in[\![1;p]\!]$, C_j la j-ième colonne de A, on a : $\varphi_A(E_j) = C_j$.
  D'où : $\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathrm{Vect}\Big(C_1,C_2,\dots,C_p\Big)$.
- $\mathrm{rg}(\varphi_A) = \dim\Big(\mathrm{Im}(\varphi_A)\Big) = \dim\Big(\mathrm{Vect}(C_1,C_2,\dots,C_p)\Big)$.

Ceci justifie les définitions suivantes :

En gros...
On est en train, petit à petit, de transformer l'étude des applications linéaires (en dimension finie), en l'étude des matrices...

Définitions 6

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

D1# Le **noyau** de A, noté ker(A), est l'ensemble défini par :

$$\ker(A) = \Big\{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\ /\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\Big\}$$

D2# L'**image** de A, notée Im(A), est l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\Big(C_1,C_2,\dots,C_p\Big)$$

où, pour tout $j\in[\![1;p]\!]$, C_j représente la j-ième colonne de A.

D3# Le **rang** de A, noté rg(A), est la dimension de Im(A).

Petite remarque
Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes.

Version matricielle du théorème du rang :

Théorème 5 - du rang

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors :

$$p = \dim\big(\ker(A)\big) + \operatorname{rg}(A)$$

Et de la même façon :

Propriété 9 - Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{tikzcd}
\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \operatorname{rg}(A) = n \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& A \text{ inversible} &
\end{tikzcd}$$

Exemples 6

E1 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(A) = 0$. Que dire de A ?

E2 Déterminons le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

E3 La matrice $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est de rang ...

E4 Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Puisque A contient deux colonnes non colinéaires, on a déjà $\operatorname{rg}(A)$.......... De plus, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$. Par conséquent, $\dim\big(\ker(A)\big)$..........

Ainsi, d'après le théorème du rang, on a nécessairement :

$$\operatorname{rg}(A) = \dots \quad ; \quad \dim\big(\ker(A)\big) = \dots$$

E5 La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, elle est donc de rang 3. Par conséquent, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3. On en déduit :

- A est inversible ;
- $\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$

E6 Donnons quelques matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 :

E7 Donnons quelques matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 2 :

IV.3 Pour finir...

Terminons avec quelques résultats complémentaires sur le lien application linéaire / matrice ; puis voyons une méthode algorithmique (ah bon ?!) pour déterminer le rang d'une matrice, et donc le rang d'une application linéaire !

Théorème 6

Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Notons $q = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $n = \dim(G)$ et considérons $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F, G.
On a déjà vu que $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$; mais on a de plus :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$$

Autrement dit, pour tous $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in G$, si :

- X est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}_E$
- Y est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}_G$
- A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ ($A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$)
- B est la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ ($B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)

alors :

$$\vec{v} = (g \circ f)(\vec{u}) \iff Y = BAX$$

En gros... La composition d'applications linéaires se traduit par le produit matriciel.

Important ! En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors A^2 est la matrice de $f \circ f$ dans $\mathcal{B}_E$; A^3 la matrice de $f \circ f \circ f$ dans $\mathcal{B}_E$...

★ Démonstration : Il suffit d'appliquer deux fois le second point du théorème 3 : une fois pour f, une fois pour g. ★

Et voici une conséquence immédiate de ce théorème, assez utile en pratique :

Propriété 10 - Isomorphismes et matrices

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Munissons E d'une base $\mathcal{B}_E$ et F d'une base $\mathcal{B}_F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$f \text{ est bijective si, et seulement si, } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \text{ est inversible}$$

Et, si f est bijective, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\right)^{-1}$.

★ Démonstration :

★

Théorème 7

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F.
Alors :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\right)$$

Autrement dit : le rang de f est égal au rang de toutes les matrices représentant f dans toutes les bases de E et F.

★Subtile...★ Heureusement qu'on a cette propriété en fait ! Sinon, le rang d'une AL dépendrait du choix des bases de E et F ; et la notion de rang d'AL n'aurait alors tout bonnement aucun sens !

★ Démonstration : En exercice... ★

Exemple 7

Considérons l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_2[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = xP'(x) - P(x+1)$$

Confusion d'objets ! $f(P)$ est une fonction...

- Justifions que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$, puis déterminons sa matrice canoniquement associée.

- Déduisons-en que f est bijectif.

Propriétés 11 - Rang et composition d'AL

P1# Soient E, F, G trois espaces vectoriels ainsi que $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $h \in \mathcal{L}(G,E)$.

- Si g est bijective, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.
- Si h est bijective, alors $\text{rg}(f \circ h) = \text{rg}(f)$.

Autrement dit : le rang est invariant par composition à droite et/ou à gauche par un isomorphisme.

P2# D'un point de vue matriciel : soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si B est inversible, alors $\text{rg}(BA) = \text{rg}(A)$.
- Si C est inversible, alors $\text{rg}(AC) = \text{rg}(A)$.

Autrement dit : le rang est invariant par multiplication à droite et/ou à gauche par une matrice inversible.

★ Démonstration : En exercice... ★

Et voici la conséquence tant attendue de ces propriétés :

On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et/ou sur les colonnes.

Par conséquent, il est possible de déterminer le rang d'une matrice en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener au rang d'une matrice triangulaire.

☞ **Rappel...**

On avait vu (Chapitre 9 - Exercice 7) que les opérations élémentaires sur les lignes peuvent s'interpréter matriciellement comme des multiplications à gauche par des matrices inversibles... C'est identique sur les colonnes, mais multiplication à droite...

Propriété 12 - Rang et transposition

Pour toute matrice A, on a : $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$.

★ Démonstration : En exercice... ★

♡ **Astuce du chef !** ♡

On peut donc trouver le rang d'une matrice en raisonnant sur la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes...

En conséquence, une propriété pratique :

Propriété 13

Le rang d'une réduite de Gauss est égal au nombre de lignes non nulles de cette matrice.

★ Démonstration : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la réduite de Gauss d'une matrice. Supposons que A possède m lignes nulles (avec $m \in [\![0;n]\!]$).

- Si $m = n$: alors $A = 0_{n,n}$ et donc $\mathrm{rg}(A) = 0$.
- Si $m \neq n$:
  D'après la propriété précédente :
  $$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$$
  Mais, puisque A est une réduite de Gauss, elle est triangulaire supérieure, donc ${}^tA$ est triangulaire inférieure comportant m colonnes nulles. Par conséquent, $\mathrm{Im}({}^tA)$ est engendrée par les $n-m$ autres colonnes non nulles de ${}^tA$ (et il y en a bien au moins une, car $m \neq n$).
  Or, A est échelonnée, donc les $n-m$ colonnes non nulles de ${}^tA$ sont échelonnées et forment donc une famille libre. Ces $n-m$ colonnes forment donc une base de $\mathrm{Im}({}^tA)$.
  D'où :
  $$\mathrm{rg}({}^tA) = n - m$$
  Conclusion : le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de A.

★

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour déterminer le rang d'une matrice :**

1. il arrive qu'il soit assez trivial (trois colonnes ou trois lignes identiques, non nulles),
2. soit elle est triangulaire supérieure, et on peut donner rapidement son rang...
3. soit on utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener au rang d'une réduite de Gauss de la matrice.

Exemple 8

Déterminons les valeurs du réel λ de sorte que la matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible.