Exercices du chapitre 20
Applications linéaires

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1
Dans chaque cas, l'application f donnée est-elle une application linéaire sur E ?

1. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x+y$
2. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2,\ f : (x,y) \longmapsto (x^2, x+y)$
3. $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ f : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}'(\mathrm{X})$
4. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+z \\ x-y \\ x+y+z \end{pmatrix}$
5. $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ f : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{P}(0) + \mathrm{P}'(\mathrm{X})$
6. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3,\ f : (x,y,z) \longmapsto (z, y, x+1)$

●●○○ Exercice 2
Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Montrer que si f et g coïncident sur une base de E, alors f et g sont égales.

●○○○ Exercice 3
Dans chaque cas, montrer que f est une application linéaire (expliciter les espaces vectoriels de départ et d'arrivée), donner sa matrice canoniquement associée puis déterminer une base de son noyau et de son image, et préciser également si elle est injective/surjective/bijective.

1. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$
2. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
3. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix}$
4. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ y-3z \\ 2z \end{pmatrix}$
5. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x-y+z$
6. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix}$
7. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2z \\ 2x+y+z \\ 2y-z \end{pmatrix}$
8. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+y+z \\ 3x+3y \end{pmatrix}$
9. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$
10. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+3y+2z+2t \\ 3x+4y+z+6t \\ 2x+y-z+4t \\ x-2y-3z+2t \end{pmatrix}$

●○○○ Exercice 4
Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et f l'application définie par : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\ f(\mathrm{P}(\mathrm{X})) = \mathrm{P}'(\mathrm{X})$.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$. Calculer $f(\mathrm{P}(\mathrm{X}))$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E, puis donner sa matrice dans la base canonique de E.
3. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

●○○○ Exercice 5
Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et f l'application définie par : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\ f(\mathrm{P}(\mathrm{X})) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{X}\mathrm{P}'(\mathrm{X})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E, puis donner sa matrice dans la base canonique de E.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

●○○○ Exercice 6
Considérons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(\mathrm{M}) = \mathrm{AMA}$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $f(\mathrm{I}_2)$ et $f(\mathrm{A})$.
3. Justifier que A est inversible et déterminer son inverse.
4. Déterminer le noyau de f. Que peut-on en conclure ?

5. Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.
6. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

●○○○ Exercice 7

Considérons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - **Montrons que f est une application linéaire.**
     Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrons que $f(\lambda\mathrm{M} + \mu\mathrm{N}) = \lambda f(\mathrm{M}) + \mu f(\mathrm{N})$.
     On a :
     $$\begin{aligned} f(\lambda\mathrm{M} + \mu\mathrm{N}) &= \mathrm{A}(\lambda\mathrm{M} + \mu\mathrm{N}) \\ &= \lambda\mathrm{AM} + \mu\mathrm{AN} \\ &= \lambda f(\mathrm{M}) + \mu f(\mathrm{N}) \end{aligned}$$
     Ainsi f est ne application linéaire.
   - Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Puisque $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a également $\mathrm{AM} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; autrement dit, $f(\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\ker(f)$. L'application f est-elle bijective ?
   - Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :
     $$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \ker(f) &\iff f(\mathrm{M}) = 0 \\ &\iff \mathrm{AM} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a+2c = 0 \\ b+2d = 0 \\ 3a+6c = 0 \\ 3b+6d = 0 \end{cases} \\ &\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\iff} \begin{cases} a+2c = 0 \\ b+2d = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -2c \\ 2 = -2d \\ c = c \\ d = d \end{cases} \\ &\iff \mathrm{M} = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff \mathrm{M} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
     Par conséquent : $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
     La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est ainsi génératrice de $\ker(f)$.
     C'est également une famille libre, car constituée de deux matrices non colinéaires.

     Conclusion : La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(f)$ qui est donc de dimension 2.
   - Puisque $\ker(f) \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, on en déduit que f n'est pas injective donc pas bijective.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   - Base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
   - De plus :
     - $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
     - $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
     - $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$
     - $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

     Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$
   - La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$ est donc :
     - génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
     - libre car constituée seulement de deux vecteurs non colinéaires.

   Petite remarque
   On pourrait également mentionner que son cardinal est égal à la dimension de $\mathrm{Im}(f)$... En effet, par théorème du rang, puisque $\dim\big(\ker(f)\big) = 2$ et que $\dim\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big) = 4$, on obtient : $\mathrm{rg}(f) = 2$...

   Conclusion : La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

●○○○ Exercice 8

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\forall P(X) \in \mathbb{R}_4[X],\ f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $\ker(f)$ puis $\text{Im}(f)$.

●●○○ Exercice 9 - A la recherche du spectre...

Définitions 1 - Valeurs propres et spectre d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D1# Un réel λ est une **valeur propre** de A lorsque : $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, \left(X \neq 0_{n,1} \text{ et } AX = \lambda X\right)$.
Un tel vecteur X est appelé **vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.**

D2# Le **spectre de A**, noté Sp(A), est l'ensemble des valeurs propres de A.

D3# Si λ est une valeur propre de A, alors l'**espace propre de A associé à λ**, noté $E_\lambda(A)$, est l'ensemble défini par :

$$E_\lambda(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = \lambda X\right\}$$

Important !
- Un vecteur propre doit bien être non nul, sinon, tous les réels seraient valeur propre de n'importe quelle matrice...
- En fait : $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$
- $E_\lambda(A)$ est l'espace vectoriel constitué du vecteur nul et de tous les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. Justifier que $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence des quatre propositions ci-dessous :
   (i) λ est valeur propre de A
   (ii) $\text{rg}(A - \lambda I_n) \neq n$
   (iii) $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible
   (iv) $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$
3. Déterminer le spectre de chacune des matrices suivantes.

Pour info... Les valeurs propres d'une matrices triangulaires sont ses coefficients diagonaux.

3.a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Sp(A) = {1; 2}

3.b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Sp(A) = ∅

3.c. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
Sp(A) = {0; 2}

3.d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
Sp(A) = {1; 4}

3.e. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
Sp(A) = {3; 4}

3.f. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Sp(A) = {0; 2; 3}

3.g. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Sp(A) = {1; 4}

3.h. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Sp(A) = {0}

●●○○ Exercice 10 - Type concours

Considérons $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et notons f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé.

1. Déterminer les réels λ de sorte que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.
2. Soit $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 0\}$. Montrer que E_0 est un espace vectoriel. En donner une base, constituée d'un seul vecteur, noté e_1, dont la première coordonnée vaut 1.
3. Même question avec les ensembles $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = X\}$ et $E_4 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 4X\}$ dont on notera respectivement e_2 et e_3 les vecteurs de leurs bases.

4. Démontrer que la famille (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. Déterminer la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3), on la notera D.
6. Soit P la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre, les vecteurs e_1, e_2 et e_3.
   - **6.a.** Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
   - **6.b.** Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
   - **6.c.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de A^n en fonction de n. Cette expression est-elle encore valable pour $n = 0$?

●●○○ Exercice 11 - Type concours

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer les réels λ de sorte que l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ne soit pas bijectif.
2. Justifier que l'on peut choisir une base de $\ker(f - \mathrm{id})$ constituée d'un unique vecteur dont la première composante est égale à 1. On notera e_1 ce vecteur.
3. Justifier que l'on peut choisir une base de $\ker(f - 2\mathrm{id})$ constituée d'un unique vecteur dont la seconde composante est égale à 1. On notera e_2 ce vecteur.
4. Déterminer un vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3$ de sorte que $f(e_3) = e_2 + 2e_3$.
5. Démontrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$; puis donner la matrice de f dans cette base, notée T.
6. Soit P la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre, les matrices colonnes des vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   - **6.a.** Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
   - **6.b.** Vérifier que $A = PTP^{-1}$.
   - **6.c.** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n en fonction de n.
   - **6.d.** En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.
7. Soit $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mathbin{/} AM = MA\}$.
   - **7.a.** Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   - **7.b.** Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on pose $M' = P^{-1}MP$. Montrer que :
   $$M \in \mathcal{C}_A \iff TM' = M'T$$
   - **7.c.** Montrer ensuite que M' vérifie $TM' = M'T$ si, et seulement si, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
   - **7.d.** En déduire que M appartient à $\mathcal{C}_A$ si, et seulement si, il existe trois réels a, b, c tels que : $M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
   - **7.e.** Déterminer alors une base de $\mathcal{C}_A$, puis préciser sa dimension.

●●○○ Exercice 12 - Type concours

Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, noté f, canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de f. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
2. Montrer que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$, puis déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
4. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u} \notin \ker(f)$, $\vec{v} \in \ker(f)$ et $\vec{v} \notin \mathrm{Vect}\big(f(\vec{u})\big)$.
5. Montrer que la famille $(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la matrice de f dans cette base.

●●○○ Exercice 13 - Type concours

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e_0(t) = 1 \ ;\ e_1(t) = t \ ;\ e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

1. **1.a.** Montrer que φ est linéaire.
   1.b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.
   1.c. Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2. **2.a.** Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2).
   2.b. Justifier que φ est un automorphisme de E.
   2.c. Déterminer les réels λ de sorte que $\varphi - \lambda\mathrm{id}$ ne soit pas bijectif.
   2.d. Donner le rang de $\varphi - \mathrm{id}$. En déduire la dimension de $\ker(\varphi - \mathrm{id})$.
3. **3.a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.
   3.b. En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.
   3.c. Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

●●○○ Exercice 14 - Type concours

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(\mathrm{M}) = \left({}^t\mathrm{A}\right)\mathrm{M} + \mathrm{MA}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. **2.a.** Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(\mathrm{M})$ est une matrice antisymétrique.
   2.b. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. On considère les trois matrices $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   3.a. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L})$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   3.b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
4. **4.a.** Calculer $f(\mathrm{J})$, $f(\mathrm{K})$ et $f(\mathrm{L})$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
   4.b. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$
   4.c. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ puis en donner une base.

●●●○ Exercice 15 - Type concours

Soit n un entier supérieur ou égal 2 et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\vec{v}$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, ..., v_n$ dans la base $\mathcal{B}$ et qui vérifie $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(\vec{x})$ défini par : $f(\vec{x}) = \vec{x} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\vec{v}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f \circ f = f$.
3. **3.a.** Montrer que le vecteur $\vec{y}$ appartient à l'image de f si et seulement si $f(\vec{y}) = \vec{y}$.
   3.b. Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n-1$.
   3.c. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $(\vec{e}_i - \vec{e}_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.
   3.d. En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?
4. Déterminer une base du noyau de f.

●●●○ Exercice 16 - Type concours

On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ ainsi que $f : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \longmapsto -3\mathrm{XP}(\mathrm{X}) + \mathrm{X}^2\mathrm{P}'(\mathrm{X})$.

1. **1.a.** Montrer que f est un endomorphisme de E.
   1.b. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E.
   1.c. La matrice M est-elle inversible ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

1.d. Déterminer une base de $\ker(f)$ puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soient u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

2.a. Soit $P \in E$ tel que $P \notin \ker(u^3)$. Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.

2.b. Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

2.c. Établir l'égalité $\ker(u) = \ker(g - \mathrm{id}_E)$.

●●○○ Exercice 17 - Caractérisations de surjectivité / injectivité

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, ainsi que $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie n et on considère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Démontrer les propriétés suivantes :

1. f est surjective si, et seulement si, $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$ est génératrice de F.

Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, on a : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$.
Or : f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$.
D'où : f est surjective si, et seulement si, $F = \mathrm{Vect}\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$.

Conclusion : f est surjective si, et seulement si, $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$ est génératrice de F.

> **Petite remarque**
> Ici, seul le caractère générateur de la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est utilisé...

2. f est injective si, et seulement si, $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$ est libre dans F.

Raisonnons par double-implication...

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective et montrons que la famille $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$ est libre dans F.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Supposons $\sum_{i=1}^{n} a_i f(\vec{e}_i) = \vec{0}_F$.

Par linéarité de f, on a ainsi :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i\right) = \vec{0}_F$$

Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i \in \ker(f)$$

Mais f est injective, donc $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$. D'où :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i = \vec{0}_E$$

Or la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, elle est donc en particulier injective. D'où :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_i = 0$$

Conclusion : la famille $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$ est libre.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que la famille $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$ est libre. Montrons que f est injective en montrant que $\ker(f) = \{0_E\}$.

Soit $\vec{x} \in E$. Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, il existe des uniques réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in \ker(f) &\iff f(\vec{x}) = \vec{0}_F \\
&\iff f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \vec{0}_F && \text{linéarité de } f \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} x_i f(\vec{e}_i) = \vec{0}_F && \text{liberté de la famille } \left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right) \\
&\iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = 0 \\
&\iff \vec{x} = \vec{0}_E
\end{aligned}$$

D'où : $\ker(f) = \{0_E\}$.
Conclusion : f est injective.

Conclusion : f est injective si, et seulement si, $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$ est libre dans F.

> **Petite remarque**
> La liberté de la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ a été utilisé dans l'implication directe... et dans l'implication réciproque, seul le caractère générateur a été utile en fait (l'unicité des $x_1, \ldots, x_n$ n'ayant pas servi).

3. f est bijective si, et seulement si, $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)$ est une base de F.

Immédiat d'après les deux résultats précédents...

> **À retenir...**
> Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, elle transforme une base en une base.

●●●○ Exercice 18 - Rang et composition

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n ainsi que f, g, h trois endomorphismes de E.
L'objectif de l'exercice est d'établir les trois résultats suivants :

- $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\left(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\right)$.
- Si h est bijectif, alors $\mathrm{rg}(f \circ h) = \mathrm{rg}(f)$.

- Si g est bijectif, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Démontrer le premier résultat.
On a l'équivalence suivante :

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\Big(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\Big) \iff \Big(\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g) \ \text{ ET } \ \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)\Big)$$

- **Montrons que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.**
  - Puisque f et g sont des endomorphismes de E, c'est également le cas de $g \circ f$. Transformons ainsi le résultat à établir grâce au théorème du rang :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f) & \iff & n - \dim\Big(\ker(g \circ f)\Big) \leq n - \dim\Big(\ker(f)\Big) \\ & \iff & \dim\Big(\ker(g \circ f)\Big) \geq \dim\Big(\ker(f)\Big) \end{array}$$

  - Il suffit alors, pour établir le résultat, de démontrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
Soit $x \in \ker(f)$. On a ainsi :

$$f(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

D'où :

$$\begin{array}{rcll} g\Big(f(x)\Big) & = & g(0_{\mathrm{E}}) & \text{car } g \text{ est linéaire} \\ & = & 0_{\mathrm{E}} & \end{array}$$

Ainsi :

$$x \in \ker(g \circ f)$$

On a donc établi :

$$\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$$

Par conséquent :

$$\dim\Big(\ker(f)\Big) \leq \dim\Big(\ker(g \circ f)\Big)$$

Conclusion : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.

✘ Attention !
On veille au bon vocabulaire. Ici, il **suffit** bien d'établir l'inclusion entre les noyaux, il ne *faut* pas !

- **Montrons que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.**
Pour démontrer ceci, il nous suffit d'établir :

$$\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$$

Soit $y \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Ainsi :

$$\exists x \in \mathrm{E} \ / \ y = f \circ g(x)$$

Notons alors x_0 un vecteur de E vérifiant $y = f \circ g(x_0)$. On a ainsi :

$$y = f\Big(g(x_0)\Big)$$

En posant $z_0 = g(x_0)$, on a $z_0 \in \mathrm{E}$ et :

$$y = f(z_0)$$

D'où :

$$y \in \mathrm{Im}(f)$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$$

Conclusion : $\mathrm{rg}(f \circ g) \leq \mathrm{rg}(f)$.

Conclusion : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\Big(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\Big)$.

2. 2.a. Montrer que si h est bijective, alors $\mathrm{Im}(f \circ h) = \mathrm{Im}(f)$.
Par double inclusion...

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f \circ h)$. Il existe alors $x \in \mathrm{G}$ tel que $y = f \circ h(x)$. C'est à dire $y = f(h(x))$. En particulier, $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Conclusion : $\mathrm{Im}(f \circ h) \subset \mathrm{Im}(f)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe alors $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$.
Mais $x \in \mathrm{E}$ et h est bijective, donc surjective, de G dans E. Ainsi, il existe $z \in \mathrm{G}$ tel que $x = h(z)$.
Par conséquent : $y = f(h(z))$. Et ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f \circ h)$.
Conclusion : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f \circ h)$.

Conclusion : si h est bijective (surjective suffit), alors $\mathrm{Im}(f \circ h) = \mathrm{Im}(f)$.

2.b. En déduire le second résultat recherché.
Immédiat d'après le résultat de la question précédente.

3. 3.a. Considérons l'application $g_{|\mathrm{Im}(f)}$: restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.
Autrement dit :

$$g_{|\mathrm{Im}(f)} : \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & \mathrm{G} \\ \vec{u} & \longmapsto & g(\vec{u}) \end{array} \right.$$

Montrer que $g_{|\mathrm{Im}(f)}$ est injective.
Par définition : $\ker(g_{|\mathrm{Im}(f)}) = \{x \in \mathrm{Im}(f) \ / \ g(x) = 0\}$.
Mais g est bijective, donc en particulier, elle est injective. Donc : $\ker(g) = \{0_{\mathrm{F}}\}$.
D'où : $\ker(g_{|\mathrm{Im}(f)}) = \{0_{\mathrm{F}}\}$: $g_{|\mathrm{Im}(f)}$ est injective.

3.b. En déduire le troisième résultat recherché.
Puisque $g_{|\mathrm{Im}(f)}$ est injective, elle est bijective de $\mathrm{Im}(f)$ dans $\mathrm{Im}(g_{|\mathrm{Im}(f)})$.
Et ainsi, $\dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big) = \dim\Big(\mathrm{Im}(g_{|\mathrm{Im}(f)})\Big)$.
Or : $\mathrm{Im}(g_{|\mathrm{Im}(f)}) = \{g(x) \ / \ x \in \mathrm{Im}(f)\} = \{g(f(z)) \ / \ z \in \mathrm{E}\} = \mathrm{Im}(g \circ f)$.
Par conséquent : $\dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big) = \dim\Big(\mathrm{Im}(g \circ f)\Big)$; autrement dit, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Conclusion : si g est bijective (injective suffit), alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

●●●● Exercice 19 - Rang de la transposée

Soient $n, p \in [\![2;+\infty[\![$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'objectif de l'exercice est d'établir : $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A)$.

1. **Résultat préliminaire.**
Établir :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left({}^tYY = 0 \iff Y = 0_{n,1}\right)$$

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $Y = 0_{n,1}$, alors on a immédiatement, en multipliant (par la gauche), par ${}^tY$: ${}^tYY = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que ${}^tYY = 0$ et écrivons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} {}^tYY &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \end{aligned}$$

Puisque ${}^tYY = 0$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 0$$

Or, une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls. D'où

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ y_k = 0$$

Par conséquent :

$$Y = 0_{n,1}$$

Conclusion : $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left({}^tYY = 0 \iff Y = 0_{n,1}\right)$

À retenir...
On essaie de se souvenir de ce petit résultat classique et parfois utile...

2. *Supposons dans cette question que $n = p$.*

2.a. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer : $AX = 0_{n,1} \iff {}^tAAX = 0_{n,1}$.
Raisonnons par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $AX = 0_{n,1}$, alors en multipliant (par la gauche) par ${}^tA$, on a directement : ${}^tAAX = 0_{n,1}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que ${}^tAAX = 0_{n,1}$.
En multipliant (par la gauche) par ${}^tX$, on obtient :

$${}^tX{}^tAAX = 0$$

Autrement dit :

$${}^t(AX)AX = 0$$

Mais $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'où, d'après la question précédente (avec $Y = AX$), on obtient :

$$AX = 0_{n,1}$$

Conclusion : $AX = 0_{n,1} \iff {}^tAAX = 0_{n,1}$.

✘ Attention !
${}^tX \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, donc ${}^tX \times 0_{n,1} = 0$...

☞ Rappel...
${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

2.b. En déduire que $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$ et que $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A{}^tA)$.

- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A) &\iff AX = 0_{n,1} \\ &\iff {}^tAAX = 0_{n,1} \quad \text{d'après la question précédente} \\ &\iff X \in \ker({}^tAA) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\ker(A) = \ker({}^tAA)$$

Et ainsi, d'après le théorème du rang, puisque A et ${}^tAA$ sont carrées d'ordre n :

$$n - \text{rg}(A) = n - \text{rg}({}^tAA)$$

D'où :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$$

- Le résultat précédent étant valable pour toute matrice A, en l'appliquant à la matrice ${}^tA$, on obtient :

$$\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A{}^tA)$$

Conclusion : $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$ et $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A{}^tA)$.

2.c. Conclure que $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$. *Indication : on pourra utiliser le premier résultat de l'exercice précédent.*

- Commençons pas interpréter matriciellement le premier résultat de l'exercice précédent. Nous avons ainsi, pour toutes matrices BC :

$$\text{rg}(BC) \leq \min\left(\text{rg}(B), \text{rg}(C)\right)$$

En particulier :

$$\text{rg}(BC) \leq \text{rg}(B)$$

- On obtient :

$$\text{rg}(A) \underset{\text{q préc}}{=} \text{rg}({}^t AA) \underset{\text{exo15}}{\leq} \text{rg}({}^t A) \underset{\text{q prec}}{=} \text{rg}(A{}^t A) \underset{\text{exo15}}{\leq} \text{rg}(A)$$

Par conséquent :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t AA) = \text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A{}^t A) = \text{rg}(A)$$

D'où :

$$\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A)$$

Conclusion : $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A)$.

Pourquoi ? Dans les inégalités établies, on regarde bien attentivement le membre de gauche... puis celui de droite...

3. Montrer que le résultat est encore vrai dans le cas où $n \neq p$.
Sans perte de généralité, supposons que $n > p$ (sinon, il suffit de transposer...).
Notons B la matrice dont les colonnes sont celles de la matrice A (dans le même ordre si on veut) auxquelles ont été ajoutées $n - p$ colonnes nulles. On a ainsi, par définition du rang d'une matrice :

$$\text{rg}(B) = \text{rg}(A)$$

La matrice B est alors carrée de taille n ; et donc, d'après la question précédente :

$$\text{rg}({}^t B) = \text{rg}(B)$$

Mais, ${}^t B$ est la matrice dont les colonnes sont celles de la matrice ${}^t A$ qui ont été étendues par $n - p$ 0. Par conséquent, l'espace vectoriel engendré par les colonnes de ${}^t B$ est isomorphe à celui engendré par les colonnes de ${}^t A$.
Ainsi :

$$\text{rg}({}^t B) = \text{rg}({}^t A)$$

On obtient finalement :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{rg}({}^t B) = \text{rg}({}^t A)$$

D'où :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$$

Conclusion : $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$.

★Subtile...★ Ces deux espaces vectoriels ne sont pas égaux, puisque le premier est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quand l'autre est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$...
Pour information, un isomorphisme naturel de $\text{Im}({}^t A)$ dans $\text{Im}({}^t B)$ est obtenu en associant à un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \text{Im}({}^t A)$ le vecteur $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$...

Dans les exercices qui suivent, E est un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On notera également $f^2 = f \circ f$.

●○○○ Exercice 20

Démontrer que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(f) \subset \ker(f)$.
Raisonnons par double-implication...

Rédaction Réflexes de rédaction !!

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrons que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.
Soit $y \in \text{Im}(f)$. Montrons que $y \in \ker(f)$; autrement dit, montrons que $f(y) = 0_E$.
Puisque $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(y) &= f\big(f(x)\big) \\ &= f \circ f(x) \\ &= 0_E \quad f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \end{aligned}$$

Par conséquent : $y \in \ker(f)$.
Conclusion : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow \text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$. Montrons que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$; autrement dit, montrons : $\forall x \in E,\ f \circ f(x) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Par définition :

$$f(x) \in \text{Im}(f)$$

Mais $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$, donc :

$$f(x) \in \ker(f)$$

Par conséquent :

$$f\big(f(x)\big) = 0_E$$

On a donc démontré :

$$\forall x \in E,\ f \circ f(x) = 0_E$$

Conclusion : $\text{Im}(f) \subset \ker(f) \Longrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Conclusion : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

●●○○ Exercice 21 - Projecteurs

On suppose que $f^2 = f$. Démontrer que, pour tout $y \in E$: $y \in \text{Im}(f) \iff f(y) = y$.
Soit $y \in E$. Raisonnons par double-implication...

Rédaction Réflexes de rédaction !!

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $y \in \text{Im}(f)$. Montrons que $f(y) = y$.
Puisque $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(y) &= f\big(f(x)\big) \\ &= f \circ f(x) \quad f \circ f = f \\ &= f(x) \\ &= y \end{aligned}$$

Conclusion : $y \in \text{Im}(f) \Longrightarrow f(y) = y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $f(y) = y$. Montrons que $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Par définition, $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$. Et comme $y = f(y)$...
Conclusion : $f(y) = y \Longrightarrow y \in \mathrm{Im}(f)$.

Conclusion : si $f \circ f = f$, alors pour tout $y \in \mathrm{E}$: $y \in \mathrm{Im}(f) \iff f(y) = y$.

Petite remarque
L'implication $\boxed{\Longleftarrow}$ est toujours vraie... Même si $f^2 \neq f$.

●●●○ Exercice 22 - Endomorphisme nilpotent

On suppose que E est de dimension finie égale à n et qu'il existe $k \in [\![2;+\infty[\![$ tel que : $f^k = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que la famille $\left(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\right)$ soit libre.

Puisque f^{k-1} n'est pas l'endomorphisme nul, il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^{k-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$.
Considérons donc un tel x et montrons que la famille $\left(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\right)$ est libre.

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. Supposons que $a_0 x + a_1 f(x) + \dots + a_{k-1} f^{k-1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et notons $(\star)$ cette égalité.
En appliquant f^{k-1} à cette égalité, on obtient, par linéarité de f^{k-1} :

$$a_0 f^{k-1}(x) + a_1 f^k(x) + \dots + a_{k-1} f^{2k-2}(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

Puisque $f^k = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, on a aussi :

$$\forall i \in [\![k;+\infty[\![,\ f^i = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$$

D'où :

$$a_0 f^{k-1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

Et puisque $f^{k-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$, on obtient :

$$a_0 = 0$$

Par conséquent, l'égalité $(\star)$ devient :

$$a_1 f(x) + \dots + a_{k-1} f^{k-1}(x) = 0_{\mathrm{E}} \quad (\star)$$

Puis, en appliquant f^{k-2} à cette égalité, on va obtenir, de façon analogue :

$$a_1 = 0$$

Et en réitérant, on obtiendra successivement $a_2 = 0$, puis $a_3 = 0, \dots$, jusqu'à $a_{k-2} = 0$. Restera alors :

$$a_{k-1} f^{k-1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

Et comme $f^{k-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$, on aura $a_{k-1} = 0$.
On a donc établi :

$$\forall i \in [\![0;k-1]\!],\ a_i = 0$$

Conclusion : il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que la famille $\left(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\right)$ est libre.

2. En déduire que $k \leq n$.

D'après la question précédente, il existe donc un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que la famille $\left(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\right)$ est libre.
Par conséquent, son cardinal est inférieur ou égal à la dimension de E.

Conclusion : $k \leq n$.

●●●○ Exercice 23 - Un peu théorique...

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

Soit $x \in \ker(f)$. Ainsi : $f(x) = 0_{\mathrm{E}}$.
D'où, f étant linéaire :

$$f\left(f(x)\right) = 0_{\mathrm{E}}$$

Autrement dit :

$$f \circ f(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

Par conséquent : $x \in \ker(f^2)$.

Conclusion : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

2. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Réflexe !
Réflexes de rédaction...

- $\boxed{\Longrightarrow}$ **Supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$ et montrons $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.**
  - $\boxed{\supset}$ toujours vraie (intersection de deux espaces vectoriels)
  - $\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$. Ainsi $y \in \mathrm{Im}(f)$ ET $y \in \ker(f)$.
  Puisque $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. Mais $y \in \ker(f)$, donc $f(y) = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi :

$$f(f(x)) = 0_{\mathrm{E}}$$

  Autrement dit :

$$x \in \ker(f^2)$$

  Mais comme $\ker(f^2) = \ker(f)$, on a alors :

$$x \in \ker(f)$$

  D'où :

$$f(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

  Or $y = f(x)$... Par conséquent : $y = 0_{\mathrm{E}}$. D'où l'inclusion recherchée.

  Conclusion : $\ker(f) = \ker(f^2) \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ **Supposons $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$ et montrons $\ker(f) = \ker(f^2)$.**
    - $\boxed{\subset}$ (toujours vraie) D'après la question précédente...
    - $\boxed{\supset}$ Soit $x \in \ker(f^2)$.
      Ainsi, $f(f(x)) = 0$. Autrement dit, $f(x) \in \ker(f)$. Et on sait également que, par définition, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$.
      Dans ce cas :
      $$f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$$
      Mais comme $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$, on en déduit :
      $$f(x) = 0_E$$
      Par conséquent, $x \in \ker(f)$. D'où l'inclusion recherchée.

  Conclusion : $\ker(f) = \ker(f^2) \Longleftarrow \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

Conclusion : $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$. Ainsi :
$$y = f\big(f(x)\big)$$
En posant $z = f(x)$, on a alors :
$$z \in E \ ; \ y = f(z)$$
Par conséquent, $y \in \mathrm{Im}(f)$. D'où l'inclusion recherchée.