Exercices du chapitre 21
Lois discrètes usuelles

●○○○ **Exercice 1 - Reconnaître les lois usuelles**
Dans chaque cas, "reconnaître" la loi de X puis préciser son espérance et sa variance.

1. On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir 6 pour la première fois. La variable aléatoire X désigne le nombre de tirages nécessaires.
2. Une machine fabrique des composants électroniques et, en moyenne, 1 composant sur 100 est défectueux. La machine fabrique 50 composants en une heure. La variable aléatoire X désigne le nombre de composants défectueux produits en 10 heures.
3. On lance deux dés équilibrés à 4 faces tels que le premier est numéroté 0,0,1,1 et le second 1,1,3,3. La variable aléatoire X désigne la somme des deux nombres obtenus.
4. En France, il y a environ 42% d'individus ayant un groupe sanguin O. La variable aléatoire X désigne le nombre d'individus du groupe O dans un échantillon de 30 personnes.
5. On lance deux pièces équilibrées jusqu'à obtenir un double PILE. La variable aléatoire X désigne le rang de ce premier "double PILE".

●●○○ **Exercice 2 - Démonstrations du cours**

1. Espérance et variance d'une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$
2. Espérance et variance d'une loi géométrique de paramètre p
3. Espérance et variance d'une loi de poisson de paramètre λ
4. Espérance et variance d'une loi binomiale de paramètres n et p

●●○○ **Exercice 3 - Somme de VA indépendantes de même loi de Bernoulli...**
Soient $p \in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

●○○○ **Exercice 4 - Loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$**
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$.

1. Donner $X(\Omega)$, ainsi que la loi de X.
2. On pose $Y = X - a + 1$.
   - 2.a. Donner $Y(\Omega)$ puis reconnaître la loi de Y.
   - 2.b. En déduire l'espérance et la variance de Y puis celles de X.

●○○○ **Exercice 5 - QCM**
Un élève répond au hasard à un QCM composé de 20 questions pour lesquelles il y a 4 propositions à chaque fois et dont une seule est correcte. On note X le nombre de bonnes réponses obtenues à la fin du QCM.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k])$ pour $k \in X(\Omega)$, son espérance et sa variance.
2. Le barème est constitué ainsi : 1 point par bonne réponse et -1/2 point par mauvaise réponse. On note N la variable aléatoire donnant la note obtenue par l'élève.
   - 2.a. Écrire N en fonction de X.
   - 2.b. En déduire que N possède une espérance et la calculer.

●○○○ **Exercice 6 - Jusqu'au premier PILE**
Une pièce a la probabilité p (avec $p \in]0;1[$) de tomber sur PILE. On la lance jusqu'à obtenir PILE pour la première fois. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus et Y celle donnant le rang du premier PILE.

1. Quelle est la loi de Y ? Donner $Y(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y = k])$ pour $k \in Y(\Omega)$, son espérance et sa variance.
2. En déduire la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair de FACE.

●○○○ **Exercice 7 - Loi de Poisson**
Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

●●○○ **Exercice 8 - Loi binomiale**
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer la loi de $Y = n - X$.

●●○○ Exercice 9 - Loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Justifier que les variables aléatoires 2^X et $\frac{1}{1+X}$ admettent une espérance et les calculer.

●●○○ Exercice 10

Soient a un réel strictement positif et une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = n+1]) = \frac{a}{n}\mathbb{P}(X = n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (n-1)!\mathbb{P}([X = n])$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de a, n et $\mathbb{P}(X = 1)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$, puis donner la loi de X.
3. On pose $Y = X - 1$. Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de X.

●○○○ Exercice 11

1. **Partie I : tirages dans une urne**
   Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.
   - 1.a. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée. Donner la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
   - 1.b. On procède cette fois-ci dans $\mathcal{U}$ à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Donner la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
   - 1.c. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire. Donner la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
2. **Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard**
   L'urne $\mathcal{U}$ contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.
   On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur PILE, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$ et, si on obtient FACE, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.
   On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.
   - 2.a. Donner $T(\Omega)$.
   - 2.b. Donner la loi de T. On vérifiera que $\mathbb{P}([T = 1]) = \frac{7}{16}$.
   - 2.c. Calculer $\mathbb{E}(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?

●●○○ Exercice 12 - Deux géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètres respectifs $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$.

1. Décrire l'évènement $[X = Y]$ puis en déduire sa probabilité.
2. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$.
   - 2.a. Donner $Z(\Omega)$. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
   - 2.b. Donner $\mathbb{P}([Z = 0])$.
   - 2.c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}([Z = k])$ et $\mathbb{P}([Z = -k])$.
   - 2.d. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$.

●●○○ Exercice 13 - A partir d'une loi géométrique

Soit X une variable aléatoire suivant une géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

1. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$. Déterminer la loi de Y, puis donner son espérance et sa variance.
2. Soit Z la variable aléatoire définie par
$$Z = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si X est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   - 2.a. Déterminer la loi de Z.
   - 2.b. Justifier que Z possède une espérance et la déterminer.

●●●○ Exercice 14 - Loi sans mémoire

Définition 1 - Loi sans mémoire

Une variable aléatoire X, discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est dite *sans mémoire* lorsque :
$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > n]) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}_{[X>n]}([X > n+m]) = \mathbb{P}([X > m])$$

1. Déterminer la fonction de répartition d'une loi géométrique de paramètre p.
2. Démontrer que si X est un loi géométrique de paramètre p, alors X est *sans mémoire*.
3. Réciproquement, supposons que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, sans mémoire.
   - 3.a. Montrer qu'il existe $p \in]0;1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X > n]) = (1-p)^n$.

3.b. Conclure que X suit une loi géométrique.

●●○○ Exercice 15 - Minimum et maximum de deux géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre p. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$, et on admet que l'on a ainsi défini deux variables aléatoires discrètes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}([X \leq n])$.
2. 2.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir : $\mathbb{P}([U > n]) = (1-p)^{2n}$.
   2.b. Reconnaître alors la loi de U.
3. Déterminer la loi de V.
4. Que dire des variables aléatoires $X + Y$ et $U + V$? En déduire que V admet une espérance et la déterminer.

●●○○ Exercice 16 - Autour de la loi de Poisson

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Poisson de paramètre 1.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
2. En déduire que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de S_n^*.
4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([S_n^* \leq 0]) = e^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

●●○○ Exercice 17 - Type concours (EML 2009 E)

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$ avec $p \in]0;1[$.

1. **Partie A.**
   Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
   1.a. Reconnaître la loi de T. Donner son espérance et sa variance.
   1.b. Exprimer U en fonction de T. En déduire que U possède une espérance et une variance et les donner.
2. **Partie B.**
   Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note :
   - X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués
   - Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues
   - Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues

   2.a. **Loi de X.**
   2.a.i. Montrer que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}([X = k]) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.
   2.a.ii. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$.
   2.a.iii. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

   2.b. **Loi de Y.**
   2.b.i. Pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, déterminer $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1])$. *On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.*
   2.b.ii. En déduire que $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.
   2.b.iii. Déterminer la loi de Y.

   2.c. Donner la loi de Z.

●●○○ Exercice 18 - Type concours

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[N=n]}([X = k])$.
3. Vérifier que $\mathbb{P}([X = 0]) = \dfrac{4}{9}$.

4. *On admet que l'égalité* $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ *est valable pour* $x\in]-1,1[$ *et* $k\in\mathbb{N}$.

   Montrer : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

5. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

●●○○ Exercice 19 - Type concours (Ecricome 2003 E)

On considère une usine produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B en produit 40%. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est $0,1$ alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est $0,2$.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A.
2. On suppose que le nombre d'objets produits par A en une heure est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'objets défectueux produits par A en une heure.
   - 2.a. Rappeler la loi de Y, son espérance et sa variance.
   - 2.b. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $k\in X(\Omega)$, donner $\mathbb{P}_{[Y=n]}([X=k])$. *On distinguera les cas* $k\leq n$ *et* $k>n$.
   - 2.c. En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

●●○○ Exercice 20 - Type concours (EML 2018 E)

Deux joueurs, A et B, décident de s'affronter dans un jeu de hasard.

- Le joueur A lance une pièce donnant PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et FACE avec la probabilité $\frac{1}{3}$ jusqu'à l'apparition du second PILE. On note X_A la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.
- Le joueur B lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p\in]0;1[$), et FACE avec la probabilité $q=1-p$ jusqu'à l'apparition du premier PILE. On note X_B la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.

Dans ces conditions de jeu, X_A et X_B sont indépendantes. Le gagnant est celui ayant obtenu le moins de FACE. En cas d'égalité, aucun des deux joueurs ne gagne : il y a match nul.
On note :

- G l'événement "A gagne",
- H l'événement "B gagne",
- N l'évènement "il y a match nul".

On admet que le jeu se termine presque-sûrement.

1. **Loi de X_B.** On note Y_B le nombre de lancers effectués par le joueur B.
   - 1.a. Reconnaître la loi de Y_B. Préciser $Y_B(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y_B=k])$ pour tout $k\in Y_B(\Omega)$, puis rappeler son espérance et sa variance.
   - 1.b. En déduire la loi de X_B ainsi que son espérance et sa variance.
   - 1.c. On note E l'évènement "le joueur B obtient un nombre pair de FACE". Calculer $\mathbb{P}(E)$.
2. **Loi de X_A.**
   - 2.a. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_A.
   - 2.b. Soit $n\in X_A(\Omega)$. Écrire l'évènement $[X_A=n]$ comme union d'évènements deux à deux incompatibles. En déduire :
   $$\mathbb{P}([X_A=n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$$
   - 2.c. Justifier que X_A possède une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.
3. **Le jeu.** L'objectif de cette question est d'étudier le jeu en question.
   - 3.a. **Simulation informatique.**
     - 3.a.i. Écrire une fonction `Python` de sorte que la commande `simulXB(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X_B lorsque la probabilité d'obtenir PILE est p.
     - 3.a.ii. Expliquer ce que permet d'obtenir la fonction `mystere` suivante :

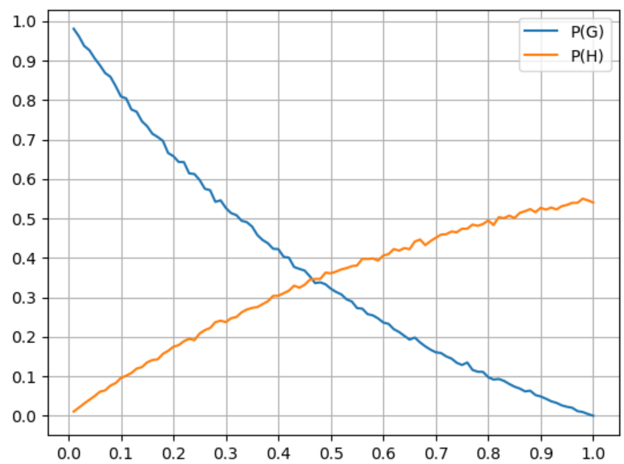
```
import numpy.random as rd

def mystere():
    n=0
    while rd.random()<1/3:
        n=n+1
    while rd.random()<1/3:
        n=n+1
    return n
```

     - 3.a.iii. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction ci-dessous de sorte que les variables locales `pG,pH,pN` contiennent respectivement des valeurs approchées de $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(N)$.

```python
def probas(p):
    nG,nH,nN=0,0,0
    for k in range(10000):
        XA=mystere()
        XB=simulXB(p)
        if ......
            nG=nG+1
        elif ......
            ......
        else:
            ......
    pG,pH,pN=......
    return pG,pH,pN
```

3.a.iv. L'exécution de la commande `probas(0.66)` renvoie : `(0.1911, 0.4344, 0.3745)`. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

3.a.v. Cette fonction nous permet de tracer, en fonction de p, une estimation de $\mathbb{P}(G)$ et $\mathbb{P}(H)$. On obtient le graphique suivant :



Interpréter, dans le contexte de l'exercice, l'abscisse du point d'intersection entre ces deux courbes.

3.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_B > n]) = q^{n+1}$.

3.c. Justifier l'égalité $\mathbb{P}(G) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n])$. En déduire que $\mathbb{P}(G) = \dfrac{4q}{(3-q)^2}$.

3.d. Déterminer $\mathbb{P}(N)$.

3.e. En déduire la valeur de p à choisir pour que le jeu soit équitable.

●●○○ Exercice 21 - Type concours (Ecricome 2014 E)

Soient $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$.
On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p et on procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: "*On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce*". On suppose les résultats des lancers indépendants les uns des autres.
On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : "La pièce donne FACE lors du j-ième lancer" ; et $P_j = \overline{F_j}$;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre "FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE", alors $Y = 4$.
On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Reconnaître la loi de X_n puis donner $\mathbb{P}([X_n = k])$ pour $k \in X_n(\Omega)$. Préciser $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
2. Donner $Y(\Omega)$.
3. Donner les valeurs des probabilités :
$$\mathbb{P}([Y=0])\ \ ;\ \ \mathbb{P}([Y=1])\ \ ;\ \ \mathbb{P}([Y=2])$$
4. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements $[Y = n]$ et $[X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$ sont égaux.
5. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y=n]) = (n+1)p^2q^n$$
6. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance et la calculer.
7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

7.a. Soit Z la variable aléatoire égale au rang du premier PILE. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

7.b. Exprimer Y_1 en fonction de Z puis en déduire la loi de Y_1 ainsi que son espérance.

7.c. En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

●●○○ Exercice 22 - Type concours (ESC 2088 E)

Un joueur A dispose d'une pièce donnant PILE avec une probabilité $\frac{1}{3}$ alors qu'un joueur B dispose d'une pièce donnant PILE avec une probabilité $p \in]0;1[$.
Les résultats des lancers des pièces sont supposés indépendants et le jeu se déroule ainsi : les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce que l'un des deux au moins obtienne PILE. Ensuite :

- si A et B obtiennent PILE en même temps, le jeu s'arrête et personne ne gagne d'argent
- sinon, le premier à obtenir PILE s'arrête et l'autre continue jusqu'à obtenir PILE également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers de cette série "en solitaire".

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A, Y pour le joueur B et $Z = Y - X$.
On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. On précisera également espérance et variance pour chacune d'elles.
2. 2.a. Interpréter les évènements $[Z = 0]$, $[Z < 0]$ et $[Z > 0]$ dans le contexte de l'exercice.

   2.b. Justifier que Z possède une espérance et que $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1-3p}{p}$. Pour quelles valeurs de p, le jeu est-il favorable au joueur B ?

   2.c. Décrire l'évènement $[Z = 0]$ comme union d'évènements deux à deux incompatibles.
   En déduire que $\mathbb{P}([Z = 0]) = \dfrac{p}{1+2p}$.

   2.d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}([Z = n]) = \dfrac{p}{1+2p}(1-p)^n$ puis en déduire $\mathbb{P}([Z > 0])$ et enfin $\mathbb{P}([Z < 0])$.
3. 3.a. Expliquer ce que renvoie la fonction Python ci-dessous.

```python
import numpy.random as rd

def lancer(p):
    if rd.random()<1/3:
        A=1
    else:
        A=0
    if rd.random()<p:
        B=1
    else:
        B=0
    if A==B:
        return 1
    else:
        return 0
```

   3.b. Les joueurs A et B effectuent un seul lancer simultanément. Montrer que la probabilité que les résultats obtenus soient identiques est égale à $\dfrac{2-p}{3}$.

   3.c. On considère le script suivant dans lequel `lancer` est la fonction définie précédemment.

```python
n=0
for k in range(100000):
    n=n+lancer(1/2)
```

   Après une exécution de ce programme, la variable n contient la valeur 44473. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

●●●○ Exercice 23 - Type concours (EDHEC 2020 E)

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirage.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.
   On revient au cas général.
2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Écrire un programme en Python permettant de simuler une réalisation des variables X et Y.
4. 4.a. Justifier que $Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$ puis montrer que : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \dfrac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$.

   4.b. Écrire, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([Y = i])$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.
5. Justifier que Y possède une espérance et une variance.

6. 6.a. Soient i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$$

6.b. Montrer que :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right)$$

6.c. En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \dfrac{(n+1)p}{2}$.

7. 7.a. Établir que si $n \in [\![2;+\infty[\![$, alors :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}(\mathrm{Y}-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right)$$

7.b. En déduire que si $n \in [\![2;+\infty[\![$, alors $\mathbb{E}(\mathrm{Y}(\mathrm{Y}-1)) = \dfrac{\left(n^2-1\right)p^2}{3}$.

7.c. Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

7.d. Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}(\mathrm{Y}(\mathrm{Y}-1))$ et $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

●●●○ Exercice 24 - Couple de VA

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathrm{X}(\Omega) = \mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tous $k, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\Big([\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = n]\Big) = \frac{k+n}{2k!n!}e^{-2}$$

1. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\Big([\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = n]\Big) = 1$.
2. Déterminer la loi de X + Y et reconnaître celle de X + Y − 1.
3. En déduire que X + Y admet une espérance et la déterminer.
4. Déterminer la loi de X. *On admet que* Y *a la même loi que* X.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

●●●○ Exercice 25 - Type concours (EDHEC 2019 S)

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1.a. 1.a.i. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

1.a.ii. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq h_n \leq \ln(n) + 1$.

1.a.iii. En déduire un équivalent de h_n en $+\infty$.

1.b. Justifier la convergence de la suite (u_n).

2. Dans cette question n est un entier naturel non nul. On considère X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X la fonction $\mathrm{G_X}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{G_X}(t) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([\mathrm{X} = k])t^k$$

2.a. Que vaut G(1) ?

2.b. Exprimer l'espérance de X à l'aide de G.

2.c. Établir la relation : $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}''(1) + \mathrm{G}'(1) - \left(\mathrm{G}'(1)\right)^2$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère maintenant l'expérience suivante :
   - on effectue des tirages successifs et sans remise dans une urne contenant n balles numérotées de 1 à n,
   - on note, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, A_k la variable aléatoire égale au numéro de l'urne tirée en k-ième position,
   - on note X_n la variable aléatoire égale au rang de la balle n.

   On note G_n la fonction génératrice de X_n, ainsi que E_n sont espérance et V_n sa variance.

3.a. Donner la loi de X_1.

3.b. 3.b.i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{X}_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

3.b.ii. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([\mathrm{X}_n = 1])$ et $\mathbb{P}([\mathrm{X}_n = n])$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

3.b.iii. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. En considérant le système complet d'évènements $\Big([\mathrm{A}_n = n], [\mathrm{A}_n < n]\Big)$, établir :

$$\forall j \in [\![2;n]\!],\ \mathbb{P}([\mathrm{X}_n = j]) = \frac{1}{n}\mathbb{P}([\mathrm{X}_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n}\mathbb{P}([\mathrm{X}_{n-1} = j])$$

3.b.iv. Donner la loi de X_4.

3.c. Vérifier que la relation établie à la question **3.c.iii.** reste valable quand $j = 1$.

3.d. Soit $n \geq 2$. Établir :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t)$$

3.e. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(t+j)$$

3.f. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = h_n$.

3.g. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre V_n, h_n et u_n. En déduire que $V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

●●●○ Exercice 26

On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise. On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- X_1 est une variable aléatoire certaine égale à 1,
- pour $k \in [\![2;+\infty[\![$, $X_k = 1$ si le numéro obtenu au k-ième tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents, et $X_k = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{k-1}$.
3. **3.a.** Montrer :
$$\forall i < j,\ \mathbb{P}\Big([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\Big) = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-1}}{(n+1)^{j-1}}$$

   3.b. En déduire, pour tous $i < j$, la loi du produit X_iX_j.
4. Soit $N \in [\![2;+\infty[\![$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction des X_k et en déduire son espérance.

●●○○ Exercice 27 - Type concours (Ecricome 2015 E)

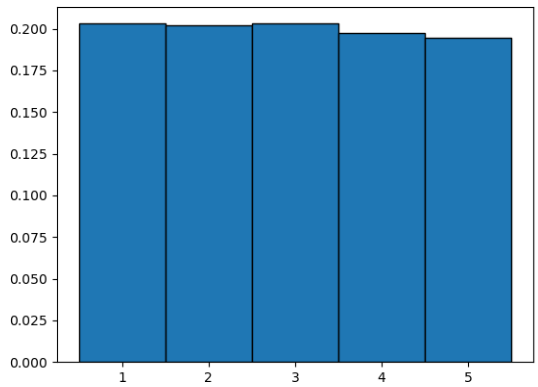
N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose d'une urne $\mathcal{U}_1$ contenant $(N-1)$ balles blanches et une balle noire ; ainsi que d'une urne $\mathcal{U}_2$ contenant N balles blanches.

1. **Première expérience.**
   On effectue des tirages sans remise dans l'urne $\mathcal{U}_1$, jusqu'à l'obtention de la balle noire. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

   1.a. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de la commande `simulX(N)` renvoie une réalisation de X.

   1.b. En déduire un programme permettant d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire X, dans le cas où $N = 5$.

   1.c. L'exécution du programme précédent permet d'obtenir :



   Que peut-on conjecturer sur la loi de X ?

   1.d. Démontrer cette conjecture puis donner l'espérance et la variance de X.

2. **Deuxième expérience.**
   On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules sans remise jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
   On note U_1 l'évènement "on choisit l'urne $\mathcal{U}_1$", et on définit de même U_2.

   2.a. Démontrer que pour tout $j \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}_{U_1}([Y = j]) = \dfrac{1}{N}$.

   2.b. Calculer, pour tout $j \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}_{U_2}([Y = j])$. *On distinguera les cas $j = N$ et $j \in [\![1;N-1]\!]$.*

2.c. Montrer alors que pour tout $j \in [\![1;N]\!]$:

$$\mathbb{P}([Y = j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1;N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

2.d. Vérifier, par le calcul, que $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}([Y = j]) = 1$.

2.e. Justifier que Y possède une espérance et la calculer.

2.f. Ecrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simulY(N)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y.

3. **Troisième expérience.**
On effectue une succession infinie de tirages avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_1$. On admet que l'on obtient presque-sûrement au moins une balle noire et presque-sûrement au moins une balle blanche., et on note :
   - T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une balle blanche et d'au moins une balle noire ;
   - U la variable aléatoire égale au nombre de balles blanches obtenues jusqu'à l'obtention d'au moins une balle blanche et d'au moins une balle noire.

3.a. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de la commande `simulT(N)` renvoie une réalisation de T.

3.b. Écrire une fonction telle que l'exécution de la commande `esperanceT(N)` renvoie une estimation de l'espérance de T.

3.c. Représenter ces différentes valeurs d'estimation de la moyenne de T pour les valeurs de N allant de 3 à 10.

3.d. Préciser $T(\Omega)$.

3.e. Démontrer que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$:

$$\mathbb{P}([T = k]) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

3.f. Montrer que T admet une espérance et la déterminer.

3.g. **3.g.i.** Calculer $\mathbb{P}([U = 1] \cap [T = 2])$.

3.g.ii. Calculer, pour tout $k \in [\![3;+\infty[\![$, $\mathbb{P}([U = 1] \cap [T = k])$.

3.h. Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$.

3.h.i. Calculer $\mathbb{P}([U = j] \cap [T = j+1])$.

3.h.ii. Calculer, pour tout $k \geq 2$ tel que $k \neq j+1$, $\mathbb{P}([U = j] \cap [T = k])$.

3.i. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?

3.j. Calculer $\mathbb{P}([U = 1])$ puis déterminer la loi de U.