



22

FONCTIONS

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

INTRODUCTION...

Les équations différentielles sont apparues au XVII^{ÈME} siècle, alors que Newton et Leibniz (entre autres) mettent en place les théories de dérivation et d'intégration ; tout en s'intéressant de près aux phénomènes d'évolutions physiques et en particulier à la mécanique. Ce n'est qu'à partir du XVIII^{ÈME} siècle que la résolution de ces équations a été possible, grâce notamment aux travaux d'Euler. De nombreux mathématiciens (D'Alembert, Cauchy, Lipschitz, Lagrange...) ont ensuite œuvré à développer la théorie des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser à un cas bien particulier d'équations différentielles ; mais il faut savoir qu'il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre de façon exacte toutes les équations différentielles. Pour cette raison, une branche entière des mathématiques - l'analyse numérique - développe des méthodes et algorithmes performants qui permettent la résolution approchée de ces équations très utiles dans de nombreux domaines (mécanique, électricité, économie, chimie...).

POUR BIEN DÉMARRER...

1 # C'est l'occasion de revoir les études de fonctions (limites, continuité, dérivabilité, intégration).

2 # Il faut savoir parfaitement dériver et primitiver !

Fonction	Une primitive
$x \mapsto 0$	
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	
$x \mapsto \frac{1}{x}$	
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	
$x \mapsto x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	
$x \mapsto e^{\alpha x} \ (\alpha \neq 0)$	
$u' e^u$	
$u' u^n \ (n \in \mathbb{N})$	
$\frac{u'}{u^n} \ (n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket)$	
$\frac{u'}{u}$	
$u' u^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	

3 # Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Donner une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = af(x)$. Peut-on en donner d'autres ?

I GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

DÉFINITIONS 1 - ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE, SOLUTION, TRAJECTOIRE, ÉQUILIBRE

D1# On appelle **équation différentielle** toute équation reliant une fonction y (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.

D2# Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_0, a_1, \dots, a_n, b des fonctions définies et continues sur I , telles que a_n n'est pas la fonction nulle.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** une équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

D3# Par convention, la fonction y et ses dérivées sont toutes sur le même membre de l'équation ; et le reste est sur l'autre membre. Dans le cas où ce second membre est la fonction nulle, on dira que l'équation différentielle est **homogène**.

D4# Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle donné vérifiant l'égalité de fonctions. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.

D5# Une **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe d'une solution de cette équation différentielle.

D6# Un **équilibre** d'une équation différentielle est une solution constante de cette équation différentielle.

PETITE REMARQUE

Souvent, f est la lettre désignant une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera y la **fonction inconnue** d'une équation différentielle.

VOCABULAIRE

Les fonctions a_0, a_1, \dots, a_n sont les **coefficients de l'équation différentielle**.

⚠ ATTENTION !

Il s'agit d'une égalité de fonctions !

PETITE REMARQUE

Si l'intervalle I n'est pas précisé, on considérera par défaut qu'il s'agit de \mathbb{R} .

EXEMPLES 1

E1 L'équation $y'' \times y' + 3y^2 = g$, où $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \mapsto e^x + x^2 - 1$, est une équation différentielle. Une solution f de cette équation différentielle est une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = e^x + x^2 - 1$$

Pour éviter de nommer le membre de droite, on écrira l'équation différentielle ainsi :

$$y'' \times y' + 3y^2 = e^x + x^2 - 1$$

✓ RIGUEUR !

Il faut bien être conscient que c'est un abus de notation : le membre de gauche est une fonction, alors que le membre de droite est un réel, et x n'est même pas quantifié ! Bref, c'est un peu une abomination ce truc... sans doute une écriture due à des physiciens ou des économistes...

E2 Sont des équations différentielles linéaires :

E3 Ne sont pas des équations différentielles linéaires :

EN FAIT...

Une équation différentielle est linéaire lorsque le membre de gauche est une expression linéaire en y ...

E4 L'équation (E) : $y' - 2xy = 2x^2 - 1$, où $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; et (E_H) : $y' - 2xy = 0$ est son équation différentielle homogène associée.

- Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{x^2}$ est solution de $y' - 2xy = 0$.

On a ainsi trouvé une solution particulière de (E).

- Déterminons toutes les solutions de (E) qui sont dans $\mathbb{R}_1[x]$.

- Vérifions que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda + f_p$ est solution de (E).

EST POUR INFO...

Ce résultat est fondamental dans l'étude des équations différentielles linéaires... Nous en reparlerons juste après.

E5 Déterminons tous les équilibres de l'équation différentielle (E) : $y' + y^2 = 1$.

E6 Montrons que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

I.2 LA LINÉARITÉ, C'EST LE PIED!

PROPRIÉTÉS 1 - STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UNE EDL

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée. Notons S_E l'ensemble des solutions de E, S_H l'ensemble des solutions de (E_H) .

P1# S_H est un espace vectoriel.

P2# Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H) . Autrement dit :

solution générale de l'EDL = solution particulière de l'EDL + solution générale de l'équation homogène associée

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$S_E = \{f_p + f_H / f_H \in S_H\}$$

IMPORTANT!

Cette structure de l'ensemble des solutions est importante et nous guide sur la méthode à mettre en œuvre pour résoudre une EDL...

★ DÉMONSTRATION : Considérons, avec les notations précédemment introduites :

$$(E) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

et ainsi :

$$(E_H) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

toutes deux d'inconnue $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Posons $L : y \mapsto a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$, définie sur $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, à valeurs dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

PETITE REMARQUE

Il n'est pas nécessaire de poser cette application, mais cela permet de simplifier les écritures et de faire un lien avec l'algèbre linéaire.

★

PROPRIÉTÉ 2 - PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soient a_0, a_1, \dots, a_n ainsi que b_1 et b_2 des fonctions continues sur I .

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si f_1 est une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2) , alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution particulière de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

★ DÉMONSTRATION : Là encore, considérons l'application linéaire $L : y \mapsto a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$.

Soient f_1 une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2) . Soient également $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de L :

$$\begin{aligned} L(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lambda_1 L(f_1) + \lambda_2 L(f_2) \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} f_1 \text{ solution de } (E_1) \text{ et } f_2 \text{ solution de } (E_2) \end{array}$$

Conclusion : la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

★

EXEMPLE 2

Une solution particulière de $y' + y = 1$:

Une solution particulière de $y' + y = x$:

Par conséquent, une solution particulière de $y' + y = 3 + 2x$ est :

Pour la suite du cours, ciblons sur l'essentiel : les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 à coefficients constants.

II EDL DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

DÉFINITION 2 - EDL1 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient a_0 et a_1 des réels tels que $a_1 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I .

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Puisque $a_1 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$:

$$a_1 y' + a_0 y = b \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{b}{a_1}$$

VOCABULAIRE

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL1 normalisées de la forme : $y' + ay = b$ ($a \in \mathbb{R}$, b une fonction continue sur I).

Si l'EDL1 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

EXEMPLES 3

E1 Sont des EDL1 à coefficients constants :

E2 Ne sont pas des EDL1 à coefficients constants :

II.1 RÉOLUTION D'UNE EDL1

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$
- trouver une solution particulière de $y' + ay = b...$

THÉORÈME 1 - RÉOLUTION DE $y' + ay = 0$

Soient $a \in \mathbb{R}$.

$$(f \text{ est solution de l'EDL1 } y' + ay = 0) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax})$$

Autrement dit : les solutions de l'équation (E_H) : $y' + ay = 0$, où $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, sont les fonctions $x \in I \mapsto \lambda e^{-ax}$, avec λ parcourant \mathbb{R} .

Ou encore : l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est $\{x \in I \mapsto \lambda e^{-ax} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

PETITE REMARQUE

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$. On en a même une base : $(x \mapsto e^{-ax})$.

★ DÉMONSTRATION :

★

EXEMPLE 4

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-2x} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Pour la recherche de solutions particulières : il n'y a pas de règle générale...

EXEMPLES 5

E1 On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 6$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**

L'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{3x} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- **Solution particulière.**

On remarque également que la fonction $x \mapsto -2$ est une solution particulière de (E).

À RETENIR...
Si b est une constante, alors une solution particulière de $y' + ay = b$ est $\frac{b}{a}$, si $a \neq 0$.
Et si $a = 0$?

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' - 3y = 6$ est $\{x \mapsto -2 + \lambda e^{3x} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

E2 Résolvons l'équation différentielle $y' + y = x + 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

♣ **MÉTHODE 1** ♣ Pour déterminer une solution particulière de $y' + ay = b$:

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche); en particulier, si b est constante, la fonction constante $x \mapsto \frac{b}{a}$ convient;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

II.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL1

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y' + ay = b$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

THÉORÈME 2 - DE CAUCHY-LIPSCHITZ SUR EDL1

Si a est un réel et b une fonction continue sur I , alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

VOCABULAIRE

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et la condition $y(x_0) = y_0$ en est la **condition initiale**.

★ DÉMONSTRATION : En exercice. ★

Ce théorème permet alors de dire que si deux trajectoires d'une EDL1 ont un point commun, alors elles sont identiques. Ou bien, par contraposée : deux trajectoires différentes d'une EDL1 ne se croisent jamais. Ou encore : deux trajectoires d'une EDL1 sont soit identiques, soit d'intersection vide.

♣ MÉTHODE 2 ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée,
- on utilise la condition initiale donnée pour déterminer la valeur de la constante λ dans la forme générale des solutions.

EXEMPLE 6

Résolvons le problème de Cauchy établi au début du chapitre :

III EDL DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

DÉFINITION 3 - EDL2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient a_0, a_1, a_2 des réels tels que $a_2 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I .

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Puisque $a_2 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

VOCABULAIRE

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL2 normalisées de la forme : $y'' + ay' + by = c$ ($a, b \in \mathbb{R}$, c une fonction continue sur I).

Si l'EDL2 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

EXEMPLES 7

E1 Sont des EDL2 à coefficients constants :

E2 Ne sont pas des EDL2 à coefficients constants :

III.1 RÉOLUTION D'UNE EDL2

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait donc maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$
- trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = c...$

Pour l'équation homogène, commençons par une petite définition, qui n'est pas sans nous rappeler quelques souvenirs...

DÉFINITION 4 - ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{R}$, est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

THÉORÈME 3 - RÉOLUTION DE $y'' + ay' + by = 0$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et :

$$(f \text{ est solution de l'EDL2 } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$$

Autrement dit : les solutions de l'équation (E_H) : $y'' + ay' + by = 0$, où $y \in C^2(I, \mathbb{R})$, sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, avec λ, μ parcourant \mathbb{R} .

Ou encore : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{x \in I \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet une solution r_0 et :

$$(f \text{ est solution de l'EDL2 } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x})$$

Autrement dit : les solutions de l'équation (E_H) : $y'' + ay' + by = 0$, où $y \in C^2(I, \mathbb{R})$, sont les fonctions $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}$, avec λ, μ parcourant \mathbb{R} .

Ou encore : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{x \in I \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

PETITE REMARQUE

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$. On en a même une base :

- si $\Delta > 0$:
 $(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$
- si $\Delta = 0$:
 $(x \mapsto x e^{r_0 x}, x \mapsto e^{r_0 x})$

★ DÉMONSTRATION :

★

EXEMPLES 8

E1 L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$ est

E2 L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est

Pour la recherche de solutions particulières : il n'y a pas de règle générale...

EXEMPLES 9

E1 On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est $\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

- **Solution particulière.**

On remarque également que la fonction $x \mapsto 1$ est une solution particulière de $y'' + 2y' + y = 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$ est $\{x \mapsto 1 + (\lambda x + \mu)e^{-x} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

À RETENIR...

Si c est une constante, alors une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$ est $\frac{c}{b}$, si $b \neq 0$.
Et si $b = 0$?

E2 Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y = 4x + 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

♣ **MÉTHODE 3** ♣ Pour déterminer une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$:

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche); en particulier, si c est constante, la fonction constante $x \mapsto \frac{c}{b}$ (quand $b \neq 0$) convient;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

III.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL2

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y'' + ay' + by = c$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

THÉORÈME 4 - DE CAUCHY-LIPSCHITZ SUR EDL2

Si a et b sont des réels réels et c une fonction continue sur I , alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, le problème

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 ; y'(x_0) = z_0 \end{cases}, \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}), \text{ possède une et une seule solution.}$$

★ DÉMONSTRATION : Celui-ci, on l'admet, faut pas déconner non-plus!

VOCABULAIRE

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et les conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$ en sont les **conditions initiales**.

♣ **MÉTHODE 4** ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée,
- on utilise les conditions initiales données pour déterminer les valeurs des constantes λ et μ dans la forme générale des solutions.

EXEMPLE 10

Résolvons le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2x - 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ON TOURNE EN ROND ?

On voit que la fonction exponentielle joue un rôle essentiel dans la résolution des équations différentielles vues dans ce chapitre. Mais... cette même fonction a été définie comme unique solution d'un certain problème de Cauchy; et nous en avons admis l'existence... Il serait peut-être temps de s'en occuper !