Les Chartreux

Exercices du chapitre 22
Équations différentielles linéaires

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Résolution d'EDL1

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y' + 2y = 2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   - L'ensemble des solutions de $y' + 2y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{-2x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - Une solution particulière de $y' + 2y = 2$ est $x \longmapsto 1$.

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y' + 2y = 2$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{-2x} + 1 \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. $y' - y = 2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   - L'ensemble des solutions de $y' - y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - Une solution particulière de $y' - y = 2$ est $x \longmapsto -2$.

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y' - y = 2$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{x} - 2 \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. $y' - y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   - L'ensemble des solutions de $y' - y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - Une solution particulière de $y' - y = x$ est $x \longmapsto -x - 1$.

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y' - y = x$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{x} - x - 1 \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4. $y' - y = 5x - 4$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   - L'ensemble des solutions de $y' - y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - D'après les deux questions précédentes et par principe de superposition, une solution particulière de $y' - y = 5x - 4$ est $x \longmapsto -5x - 1$.

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y' - y = 5x - 4$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{x} - 5x - 1 \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5. $y' + y = e^x + x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   - L'ensemble des solutions de $y' + y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{-x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - Solution particulière de $y' + y = e^x + x$:
     - une solution particulière de $y' + y = e^x$ est $x \longmapsto \frac{1}{2}e^x$;
     - une solution particulière de $y' + y = x$ est $x \longmapsto x - 1$;

     ainsi, une solution particulière de $y' + y = e^x + x$ est $x \longmapsto \frac{1}{2}e^x + x - 1$

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y' + y = e^x + x$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{-x} + \frac{1}{2}e^x + x - 1 \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

6. $y' - y = -2e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   - L'ensemble des solutions de $y' - y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - Une solution particulière de $y' - y = -2e^{-x}$ est $x \longmapsto e^{-x}$.

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y' - y = -2e^{-x}$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{x} + e^{-x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

7. $y' + y = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$
   - L'ensemble des solutions de $y' + y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{-x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - Une solution particulière de $y' + y = \frac{1}{x} + \ln(x)$ est $x \longmapsto \ln(x)$.

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y' + y = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{-x} + \ln(x) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

8. $y' - 3y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   - L'ensemble des solutions de $y' - 3y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{3x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - Une solution particulière de $y' - 3y = x$ est $x \longmapsto \frac{-1}{3}x - \frac{1}{9}$.

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y' - 3y = x$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{3x} + \frac{-1}{3}x - \frac{1}{9} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

9. $y' - 2y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2.
   - L'ensemble des solutions de $y' - 2y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{2x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- Solution particulière de $y'-2y=x^2$:
Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ $(a\neq 0)$. Posons $f: x\longmapsto ax^2+bx+c$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\left(f \text{ est solution de } y'-2y=x^2\right) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2ax+b-2(ax^2+bx+c)=x^2\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ -2ax^2+(2a-2b)x-2c+b=x^2 \quad \text{par identification}\\ &\iff \begin{cases} a=\frac{-1}{2}\\ b=\frac{-1}{2}\\ c=\frac{-1}{4}\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x\longmapsto \frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est une solution particulière de $y'-2y=x^2$.

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de $y'-2y=x^2$ est $\{x\longmapsto \lambda e^{2x}+\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

10. $y'-4y=e^{2x}$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
    - L'ensemble des solutions de $y'-4y=0$ est $\{x\longmapsto\lambda e^{4x}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.
    - Une solution particulière de $y'-4y=e^{2x}$ est $x\longmapsto\frac{-1}{2}e^{2x}$.

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de $y'-4y=e^{2x}$ est $\{x\longmapsto\lambda e^{4x}+\frac{-1}{2}e^{2x}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

11. $y'-4y=e^{4x}$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x\longmapsto \mathrm{P}(x)e^{4x}$, *avec* $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.
    - L'ensemble des solutions de $y'-4y=0$ est $\{x\longmapsto\lambda e^{4x}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.
    - Solution particulière de $y'-4y=e^{4x}$:
Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Posons $f: x\longmapsto(ax+b)e^{4x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\left(f \text{ est solution de } y'-4y=e^{4x}\right) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ ae^{4x}+4(ax+b)e^{4x}-4(ax+b)e^{4x}=e^{4x}\\ &\iff a=1\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x\longmapsto xe^{4x}$ est une solution particulière de $y'-4y=e^{4x}$ (aucune condition sur b, qui peut être n'importe quel réel... autant prendre $b=0$).

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de $y'-4y=e^{4x}$ est $\{x\longmapsto\lambda e^{4x}+xe^{4x}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

12. $y'+y=2xe^{-x}$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x\longmapsto \mathrm{P}(x)e^{-x}$, *avec* $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
    - L'ensemble des solutions de $y'+y=0$ est $\{x\longmapsto\lambda e^{-x}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.
    - Solution particulière de $y'+y=2xe^{-x}$:
Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. Posons $f: x\longmapsto(ax^2+bx+c)e^{-x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\left(f \text{ est solution de } y'+y=2xe^{-x}\right) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ (2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}+(ax^2+bx+c)e^{-x}=2xe^{-x}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2ax+b=2x \quad \text{par identification}\\ &\iff \begin{cases} a=1\\ b=0\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x\longmapsto x^2e^{-x}$ est une solution particulière de $y'+y=2xe^{-x}$ (aucune condition sur c, qui peut être n'importe quel réel... autant prendre $c=0$).

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de $y'+y=2xe^{-x}$ est $\{x\longmapsto\lambda e^{-x}+x^2e^{-x}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

●○○○ Exercice 2 - Résolution d'EDL2

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y''+y'-2y=4$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
    - L'ensemble des solutions de $y''+y'-2y=0$ est $\{x\longmapsto\lambda e^{x}+\mu e^{-2x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.
    - Une solution particulière de $y''+y'-2y=4$ est $x\longmapsto -2$.

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de $y''+y'-2y=4$ est $\{x\longmapsto -2+\lambda e^{x}+\mu e^{-2x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

2. $y''+y'-6y=6x-1$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
    - L'ensemble des solutions de $y''+y'-6y=0$ est $\{x\longmapsto\lambda e^{-3x}+\mu e^{2x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.
    - Une solution particulière de $y''+y'-6y=6x-1$ est $x\longmapsto -x$.

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de $y''+y'-6y=6x-1$ est $\{x\longmapsto -x+\lambda e^{-3x}+\mu e^{2x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

3. $y''-2y'+y=x$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 1.
    - L'ensemble des solutions de $y''-2y'+y=0$ est $\{x\longmapsto(\lambda x+\mu)e^{x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.
    - Une solution particulière de $y''-2y'+y=x$ est $x\longmapsto x+2$.

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de $y''-2y'+y=x$ est $\{x\longmapsto x+2+(\lambda x+\mu)e^{x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

4. $y''-4y'+3y=x^2$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2

- L'ensemble des solutions de $y''-4y'+3y=0$ est $\{x\longmapsto \lambda e^{x}+\mu e^{3x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.
- Solution particulière de $y''-4y'+3y=x^2$:
Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ (avec $a\neq 0$). Posons $f:x\longmapsto ax^2+bx+c$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\left(f \text{ est solution de } y''-4y'+3y=x^2\right) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2a-4(2ax+b)+3(ax^2+bx+c)=x^2\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 3ax^2+(-8a+3b)x+2a-4b+3c=x^2 \quad \text{par identification}\\ &\iff \begin{cases} a=\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{8}{9}\\ c=\dfrac{26}{27}\end{cases}\end{aligned}$$

La fonction $x\longmapsto \frac{1}{3}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}$ est une solution particulière de $y''-4y'+3y=x^2$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''-4y'+3y=x^2$ est $\{x\longmapsto \frac{1}{3}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}+\lambda e^{x}+\mu e^{3x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

5. $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x\longmapsto \mathrm{P}(x)e^{-x}$, avec $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.
   - L'ensemble des solutions de $y''-4y'+3y=0$ est $\{x\longmapsto \lambda e^{x}+\mu e^{3x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.
   - Solution particulière de $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$:
   Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Posons $f:x\longmapsto (ax+b)e^{-x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\left(f \text{ est solution de } y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}\right) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ (ax+b-2a)e^{-x}-4(-ax-b+a)e^{-x}+3(ax+b)e^{-x}=(2x+1)e^{-x}\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 8ax-6a+8b=2x+1 \quad \text{par identificatio}\\ &\iff \begin{cases} a=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{5}{16}\end{cases}\end{aligned}$$

   La fonction $x\longmapsto \left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{16}\right)e^{-x}$ est une solution particulière de $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''-4y'+3y=x^2$ est $\{x\longmapsto \left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{16}\right)e^{-x}+\lambda e^{x}+\mu e^{3x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

6. $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{x}$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x\longmapsto \mathrm{P}(x)e^{x}$, avec $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
   - L'ensemble des solutions de $y''-4y'+3y=0$ est $\{x\longmapsto \lambda e^{x}+\mu e^{3x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.
   - Solution particulière de $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{x}$:
   Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. Posons $f:x\longmapsto (ax^2+bx+c)e^{x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\left(f \text{ est solution de } y''-4y'+3y=(2x+1)e^{x}\right) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ (ax^2+bx+c+4ax+2b+2a)e^{x}-4(ax^2+bx+c+2ax+b)e^{x}+3(ax^2+bx+c)e^{x}=(2x\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ -4ax+2a-2b=2x+1\\ &\iff \begin{cases} a=\dfrac{-1}{2}\\ b=-1\end{cases}\end{aligned}$$

   La fonction $x\longmapsto \left(\frac{-1}{2}x^2+-x\right)e^{x}$ est une solution particulière de $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{x}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''-4y'+3y=x^2$ est $\{x\longmapsto \left(\frac{-1}{2}x^2+-x\right)e^{x}+\lambda e^{x}+\mu e^{3x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

●●○○ Exercice 3 - Solution particulière d'une EDL2

Notons (E) l'équation différentielle $y''+3y'+2y=\dfrac{t-1}{t^2}e^{-t}$, d'inconnue $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+,\mathrm{R})$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
Sans difficulté, on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation $y''+3y'+2y=0$ est $\left\{t\longmapsto \lambda e^{-t}+\mu e^{-2t},\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$.

2. Soit y une solution de (E). On pose $z:t\longmapsto y(t)e^{t}$.
   - 2.a. Donner une équation différentielle vérifiée par z.
   Puisque y est solution de (E), elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$; ce qui est alors le cas de z. De plus :
   $$\forall t\in\mathbb{R},\ \ z'(t)=e^{t}(y(t)+y'(t)) \qquad ; \qquad z''(t)=e^{t}(y(t)+2y'(t)+y''(t))$$
   Or y est solution de (E), d'où :
   $$\forall t\in\mathbb{R},\ \ z''(t)+z'(t)=\frac{t-1}{t^2}$$
   - 2.b. Déterminer alors l'expression de z.
     - **Résolvons l'équation $w'+w=\dfrac{t-1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_*^+$.**
     Sans difficulté, on trouve que l'ensemble des solutions de cette équation est : $\left\{t\longmapsto \dfrac{1}{t}+\lambda e^{-t},\ \ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.
     - On en déduit alors qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t>0$, $z'(t)=\frac{1}{t}+\lambda e^{-t}$.

   Conclusion : il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $t>0$, $z(t)=\ln(t)-\lambda e^{-t}+\mu$.

2.c. Donner alors une solution particulière de (E).

D'après ce qui précède, vérifions que la fonction $f : t \longmapsto \ln(t)e^{-t}$ est solution particulière de (E) (on en veut une, donc on choisit ici $\lambda = \mu = 0$)....

C'est bien le cas !

3. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{t \longmapsto \ln(t)e^{-t}\lambda e^{-t} + \mu e^{-2t},\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$

●●○○ Exercice 4 - Changement d'inconnue

On considère le problème de Cauchy :

$$(\mathrm{E}) : \begin{cases} y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Procédons par analyse-synthèse pour le résoudre.

1. **Analyse.** Soit y une solution du problème de Cauchy (E). On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) > 0$ et on pose $z = \sqrt{y}$.

1.a. Vérifier que $2z' + 2z = x + 1$.

Puisque y est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction z est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2z'(x) + 2z(x) &= \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} + 2\sqrt{y(x)} \\ &= \frac{y'(x) + 2y(x)}{\sqrt{y(x)}} \quad \text{car } y \text{ est solution de (E)} \\ &= \frac{(x+1)\sqrt{y(x)}}{\sqrt{y(x)}} \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $2z' + 2z = x + 1$.

1.b. En déduire les candidats-solutions possibles pour z, puis pour y.

Puisque $z' + z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (on pense à normaliser pour utiliser le cours), on obtient aisément : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda e^{-x} + \frac{1}{2}x$.

Mais comme $y(0) = 1$, on a aussi $z(0) = 1$, d'où $\lambda = 1$.

Conclusion : la seule fonction possible pour z est la fonction $x \longmapsto e^{-x} + \frac{1}{2}x$.

Par conséquent, la seule solution possible de (E) est la fonction $x \longmapsto \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x\right)^2$.

2. **Synthèse.** Les candidats-solutions sont-elles des solutions du problème de Cauchy (E) ?

On vérifie aisément que la fonction $x \longmapsto \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x\right)^2$ est bien solution du problème.

Remarque

> On peut donc conclure que ce problème de Cauchy possède au moins une solution, celle trouvée.
> Puisque l'équation différentielle n'est pas linéaire, aucun résultat de cours ne permet de conclure sur son unicité ; même si c'est bien le cas ici.

●●●○ Exercice 5 - Changement d'inconnue

Résoudre le problème de Cauchy (E) : $\begin{cases} xy' - xe^{-\frac{y}{x}} - y = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(]e^{-1}; +\infty[, \mathbb{R})$, en posant $z : x \longmapsto \frac{1}{x}y(x)$.

Soit $y \in \mathcal{C}^1(]e^{-1}; +\infty[, \mathbb{R})$.

La fonction $z : x \longmapsto \frac{1}{x}y(x)$ est alors $\mathcal{C}^1$ sur $]e^{-1}; +\infty[$ et, pour tout $x \in]e^{-1}; +\infty[$, $y(x) = xz(x)$, d'où :

$$\forall x \in]e^{-1}; +\infty[,\ y'(x) = z(x) + xz'(x)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} xy' - xe^{-\frac{y}{x}} - y = 0 &\iff xz + x^2z' - xe^{-z} - xz = 0 \\ &\iff \forall x \in]e^{-1}; +\infty[,\ x^2z'(x) = xe^{-z(x)} \\ &\iff \forall x \in]e^{-1}; +\infty[,\ z'(x)e^{z(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{car } x \in]e^{-1}; +\infty[, \text{ donc } x \neq 0 \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in]e^{-1}; +\infty[,\ e^{z(x)} = \ln(x) + C \end{aligned}$$

Or $y(1) = 0$ et ainsi $z(1) = 0$... d'où on obtient :

$$\big(y \text{ est solution de (E)}\big) \iff \forall x \in]e^{-1}; +\infty[,\ e^{z(x)} = \ln(x) + 1$$

Et, pour tout $x \in]e^{-1};+\infty[$, $\ln(x)+1>0$... Par conséquent :

$$\big(y \text{ est solution de (E)}\big) \iff \forall x \in]e^{-1};+\infty[,\ z(x)=\ln(\ln(x)+1)$$

Conclusion : l'unique solution de (E) est la fonction $x \longmapsto x\ln(\ln(x)+1)$.

●●○○ Exercice 6 - Transformation par changement de variable

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y''-3xy'+4y=0$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_*^+,\mathbb{R})$.

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. **Analyse.** Soit y une solution de (E). On pose $z : t \longmapsto y(e^t)$.
   - 2.a. Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   - 2.b. En déduire que z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera. *Indication : on pourra poser le changement de variable $x=e^t$ dans* (E).
   - 2.c. En déduire z.
   - 2.d. Conclure sur les candidats-solutions de (E).
3. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
4. Conclure.

●●○○ Exercice 7 - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=\dfrac{1}{1+e^x}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Résoudre $y'+y=0$.
   L'ensemble des solutions de $y'+y=0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{-x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et posons $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{-x}$. Établir :

$$\big(f \text{ est solution de (E)}\big) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

   Puisque λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est également le cas de f ; et :

$$\begin{aligned}\big(f \text{ est solution de (E)}\big) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)+f(x)=\frac{1}{1+e^x}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{-x}-\lambda(x)e^{-x}+\lambda(x)e^{-x}=\frac{1}{1+e^x}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}\end{aligned}$$

3. En déduire une solution particulière de (E).
   Pour trouver une solution particulière de (E), il suffit alors de déterminer une fonction λ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.
   Prenons $\lambda : x \longmapsto \ln(1+e^x)$.

   Conclusion : d'après ce qui précède, la fonction $x \longmapsto \ln(1+e^x)e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).
   Puisque (E) est une EDL, le théorème de structure de l'ensemble des solutions est bien valable, et l'ensemble des solutions de (E) est alors $\{x \longmapsto \lambda e^{-x}+\ln(1+e^x)e^{-x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

●●○○ Exercice 8 - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle (E) : $y'-y=e^{e^{-x}}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Résoudre $y'-y=0$.
   L'ensemble des solutions de $y'-y=0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et posons $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{x}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ' pour que f soit solution de (E).
   Puisque λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est également le cas de f ; et :

$$\begin{aligned}\big(f \text{ est solution de (E)}\big) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)-f(x)=e^{e^{-x}}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{x}+\lambda(x)e^{x}-\lambda(x)e^{x}=e^{e^{-x}}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)=e^{-x}e^{e^{-x}}\end{aligned}$$

3. En déduire une solution particulière de (E).
   Pour trouver une solution particulière de (E), il suffit alors de déterminer une fonction λ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)=e^{-x}e^{e^{-x}}$.
   Prenons $\lambda : x \longmapsto -e^{e^{-x}}$.

   Conclusion : d'après ce qui précède, la fonction $x \longmapsto -e^{x}e^{e^{-x}}$ est une solution particulière de (E).

4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).
   Puisque (E) est une EDL, le théorème de structure de l'ensemble des solutions est bien valable, et l'ensemble des solutions de (E) est alors $\{x \longmapsto \lambda e^{x}+-e^{x}e^{e^{-x}} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

●●●○ Exercice 9 - EDL1 normalisée à coefficient non constant (cas général)

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation (E) : $y' + ay = b$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, et on note $(\mathrm{E_H})$ l'équation différentielle homogène associée à (E).

1. Justifier que a possède des primitives sur I. *On notera* A *l'une d'elles.*

   La fonction a est continue sur l'intervalle I ; elle possède donc des primitives sur I (conséquence du théorème fondamental de l'analyse).

2. Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E_H})$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-\mathrm{A}(x)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$, où A désigne une primitive de a sur I.

   On adapte la démonstration du théorème du cours sur les EDL1...

   $\boxed{\supset}$ Sans difficulté, on vérifie que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \lambda e^{-\mathrm{A}(x)}$ est solution de $(\mathrm{E_H})$.

   $\boxed{\subset}$ Soit f une solution de $(\mathrm{E_H})$. On pose $g : x \longmapsto f(x)e^{\mathrm{A}(x)}$. La fonction g est alors $\mathcal{C}^1$ sur I, et sans difficulté, on obtient :

   $$\forall x \in \mathrm{I},\ g'(x) = 0$$

   Par conséquent, I étant un intervalle :

   $$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathrm{I},\ g(x) = \lambda$$

   Autrement dit :

   $$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = \lambda e^{-\mathrm{A}(x)}$$

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E_H})$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-\mathrm{A}(x)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

3. Supposons que (E) possède au moins une solution, notée f_p.
   Établir que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: f est solution de $y' + ay = b$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = f_p(x) + \lambda e^{-\mathrm{A}(x)}$.

   C'est le théorème de structure de l'ensemble des solutions des EDL... démontrons-le dans ce cas particulier.
   Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. On a :

   $$\begin{aligned}
   \left(f \text{ est solution de } y' + ay = b\right) &\iff f' + af = b \\
   &\iff f' + af = f_p' + af_p && \text{car } f_p \text{ est solution de } y' + ay = b \\
   &\iff (f - f_p)' + a(f - f_p) = 0 \\
   &\iff \left(f - f_p \text{ est solution de } (\mathrm{E_H})\right) \\
   &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathrm{I},\ (f - f_p)(x) = \lambda e^{-\mathrm{A}(x)} && \text{d'après la question précédente} \\
   &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f_p(x) + \lambda e^{-\mathrm{A}(x)}
   \end{aligned}$$

4. Soient maintenant $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{-\mathrm{A}(x)}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit solution de (E).

   Puisque λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, c'est également le cas de f ; et :

   $$\begin{aligned}
   \left(f \text{ est solution de (E)}\right) &\iff \forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \\
   &\iff \forall x \in \mathrm{I},\ \lambda'(x)e^{-\mathrm{A}(x)} - \mathrm{A}'(x)\lambda(x)e^{-\mathrm{A}(x)} + a(x)\lambda(x)e^{x} = b(x) \\
   &\iff \forall x \in \mathrm{I},\ \lambda'(x) = b(x)e^{\mathrm{A}(x)} && \text{car A est une primitive de } a \\
   &\iff \left(\lambda \text{ est une primitive de } x \longmapsto b(x)e^{\mathrm{A}(x)}\right)
   \end{aligned}$$

   Conclusion : la fonction $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{-\mathrm{A}(x)}$ est solution de $y' + ay = b$ si, et seulement si, λ est une primitive de $x \longmapsto b(x)e^{\mathrm{A}(x)}$.

5. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

   Considérons alors x_0 un réel de I. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\lambda : x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{\mathrm{A}(t)}dt$ est une primitive de $x \longmapsto b(x)e^{\mathrm{A}(x)}$ sur I.

   D'après la question précédente, la fonction $f_p : x \longmapsto e^{-\mathrm{A}(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{\mathrm{A}(t)}dt$ est alors une solution particulière de (E).

   Conclusion : d'après la question 3, on conclut que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-\mathrm{A}(x)} + e^{-\mathrm{A}(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{\mathrm{A}(t)}dt \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

6. En déduire le théorème sur le problème de Cauchy associé à une EDL1.

7. **Applications.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

   7.a. $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$

   On trouve que l'ensemble des solutions est $\left\{x \longmapsto \lambda x + \dfrac{1}{2}x^3 \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

   7.b. $y' - 2xy = -(2x-1)e^{x}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

   On trouve que l'ensemble des solutions est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{x^2} + e^{x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

●●○○ Exercice 10 - Système différentiel homogène à coefficients constants

C'est le sujet zéro Ecricome 2022, dont la correction est disponible ici.

1. **Algèbre linéaire.** Considérons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
   - 1.a. Déterminer le rang de $f - 6\mathrm{id}$. En déduire la dimension puis une base de $\ker(f - 6\mathrm{id})$.
   - 1.b. Posons $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi que $U = AV - 2V$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
     - 1.b.i. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
     - 1.b.ii. Déterminer la matrice de f dans cette base, notée T.
     - 1.b.iii. Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible. *On ne cherchera pas à calculer* P^{-1}, *mais on admettra que* $A = PTP^{-1}$.
2. **Système différentiel.**
   On considère le système différentiel suivant :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) & = & 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) & = & x(t) - y(t) + 2z(t) \end{array} \right.$$
   d'inconnues $x, y, z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et on admet que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
   - 2.a. Vérifier que pour tout réel t : $X'(t) = AX(t)$.
   - 2.b. On note, pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et on admet que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
     Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Y'(t) = TY(t)$.
   - 2.c. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \longmapsto cte^{2t}$ est solution de l'équation différentielle $f' = 2f + ce^{2t}$.
   - 2.d. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $Y(t)$ en fonction de t.
   - 2.e. Montrer alors qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{array} \right.$$
   - 2.f. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$:
$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)\right)e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right)e^{6t} \\ y(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - z_0)\right)e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right)e^{6t} \\ z(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0\right)e^{2t} \end{array} \right.$$
   - 2.g. Que dire si $x(0) = y(0)$?

●●○○ Exercice 11 - EDL3 homogène à coefficients constants

On considère le problème de Cauchy suivant :
$$\left\{ \begin{array}{l} y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \;\; ; \;\; y''(0) = 0 \end{array} \right.$$
d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note, pour tout réel x, $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Y'(x) = AY(x)$.
2. **Diagonalisation de A.**
   - 2.a. Déterminer les réels λ de sorte que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.
   - 2.b. Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente, déterminer une base de $\ker(A - \lambda I_3)$. *On prendra, si possible, des matrices colonnes dont la première composante vaut 1.*
   - 2.c. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   - 2.d. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera D la matrice obtenue.*

3. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ et $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$. On admet qu'il existe trois fonctions u, v, w, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x : $Z(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ et $Z'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \\ w'(x) \end{pmatrix}$.
   - 3.a. Déterminer $Z(0)$.
   - 3.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Y'(x) = AY(x) \iff Z'(x) = DZ(x)$$

   - 3.c. Résoudre le système différentiel $Z' = DZ$.
4. Conclure sur le problème de Cauchy initial.

●●○○ Exercice 12 - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y) \quad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$.
   - 1.a. Que dire de f dans le cas où $f(0) = 0$?
     Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que f n'est pas la fonction constante nulle.
     Si $f(0) = 0$, alors on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+0) \underset{(\star)}{=} f(x)f(0) = 0$...

     Conclusion : si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

   - 1.b. Déterminer $f(0)$.
     On a : $f(0) = f(0+0) \underset{(\star)}{=} f(0)^2$.
     Par conséquent : $f(0) = 0$, ou $f(0) = 1$. Mais comme on suppose que f n'est pas la fonction nulle, $f(0)$ ne peut pas valoir 0, d'après la question précédente.

     Conclusion : $f(0) = 1$.

   - 1.c. Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - f(0)}{h}$$

     Immédiat, avec $(\star)$.
   - 1.d. En déduire une équation différentielle vérifiée par f.
     Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite quand $h \to 0$ dans l'égalité précédente...

     Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(0)f(x)$.

   - 1.e. Conclure sur les candidats-solutions.
     En posant $a = f'(0)$, f est solution de $f' = af$. Ainsi : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{ax}$.
     Mais comme $f(0) = 1$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{ax}$.
     On obtient alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = ae^{ax}$ et ainsi on retrouve $f'(0) = a$, sans aucune condition sur ce réel.

     Conclusion : les candidats-solutions sont les fonctions $x \longmapsto e^{ax}$, avec a parcourant $\mathbb{R}$.
2. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
   Oui...
3. Conclure.
   Les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$ sont la fonction nulle et les fonctions $x \longmapsto e^{ax}$, avec a parcourant $\mathbb{R}$.

●●○○ Exercice 13 - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1 \ ;\ f(0) = -4 \quad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations $(\star)$. Posons $g : x \longmapsto f(x)f(-x)$.
   - 1.a. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.
     Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, g l'est également et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f'(x)f(-x) - f'((-x))f(-(-x)) && \text{par } (\star) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

     Conclusion : la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.
     Et comme $g(0) = f(0)^2 = 16$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 16$.

1.b. En déduire une équation différentielle vérifiée par f.

On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(-x) = 16$$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$. Et, en utilisant ($\star$), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f'(x)}{f(x)} = 16$$

Conclusion : f est solution de $y' = \frac{1}{16}y$.

1.c. Conclure sur les candidats-solutions.

On en déduit alors que la seule solution possible est la fonction $x \longmapsto -4e^{\frac{1}{16}x}$.

2. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?

Oui...

3. Conclure.

La seule solution du problème est la fonction $x \longmapsto -4e^{\frac{1}{16}x}$.

•••• Exercice 14 - Comportement des solutions d'une ED non linéaire

Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $y' = e^{-y} - e^{-3y} + e^{-5y}$. Déterminer les limites de y et y' en $+\infty$.

Dans les grandes lignes...

- On commence par justifier que les limites de y et y' existent bien en $+\infty$...
  - On a $y' = e^{-y}(1 - e^{-2y} + e^{-4y}) = e^{-y}\left((1 - e^{-2y} + (e^{-2y})^2\right) > 0$...
  - La fonction y est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. D'après le théorème de limite monotone, elle possède donc une limite en $+\infty$.
  - En redérivant l'égalité, on obtient de façon analogue que $y'' > 0$: y' est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, étant minorée par 0, d'après le théorème de limite monotone, elle possède une limite finie en $+\infty$.
    Remarque : on peut aussi justifier plus simplement que y' possède une limite finie en $+\infty$, en utilisant l'égalité $y' = e^{-y} - e^{-3y} + e^{-5y}$ et en distinguant selon que y tende vers l'infini ou un réel en $+\infty$... Mais la décroissance de y' servira plus tard !
- Par l'absurde, on démontre que $\lim\limits_{+\infty} y' = 0$. Puisque l'on sait que y' est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, on suppose donc que $\lim\limits_{+\infty} y' > 0$. Notons $\mathrm{L} = \lim\limits_{+\infty} y'$.
  On veut faire un lien entre y' et y... on pense au théorème fondamental de l'analyse !
  $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ y(x) = \int_0^x y'(t)dt$$
  Et comme y' est décroissante, on obtient, par croissance de l'intégrale :
  $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ y(x) \geq xy'(x)$$
  Puisqu'on a supposé $\mathrm{L} > 0$, on obtient par comparaison :
  $$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$
  Mais, puisque $y' = e^{-y} - e^{-3y} + e^{-5y}$, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = 0$: absurde !
  Conclusion : y' tend vers 0.
- Par l'absurde, on obtient alors immédiatement que y tend vers $+\infty$.